

4. Юрасов А.В. Электронная коммерция: Учеб. Пособие. – М.: Дело, 2003. – 480 с.
5. Царев В.В. Внутрифирменное планирование. - СПб.: Питер, 2002.- 496с.
6. Балабанов И.Т. Электронная коммерция. – СПб.: Питер, 2001. – 336 с - (Серия «Учебники для вузов»).
7. Фатхутдинов Р.А. Инновационный менеджмент. – СПб.: Питер, 2004. – 78 с.
8. Скоблякова И.В. Инновационные системы венчурное финансирование. – М.: Издательство Машиностроение-1, 2006. – 210 с.
9. Крылов Э.И., Власова В.М., Журавкина И.В. Анализ эффективности инвестиционной и инновационной деятельности предприятия: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 2003. – 608 с.
10. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде - количественный подход. – М.: Физматлит, 2002. – 176 с
11. Блюмин С.Л., Шуйкова Н.А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности. – Липецк:ЛЭГИ, 2001. – 138 с.

УДК 519.8:330

О.А. Шумейко

### **Динамічна модель оптимального розподілу інвестицій при заміні обладнання**

*У статті пропонується технологія реалізації моделі оптимального розподілу інвестиційних коштів при розв'язанні задачі оптимальної стратегії заміни обладнання. Пропонується алгоритм задачі реалізований засобами системи комп'ютерної математики Mathcad який дозволяє безпосередньо реалізувати цю модель, з використанням динамічного програмування.*

**Ключові слова:** *інвестиції, розподіл, динамічне програмування, модель, Mathcad.*

*The article proposed technology model of optimal allocation of investment funds to solve the problem of optimal strategy for replacement of equipment. The algorithm is implemented by means of the problem of computer mathematics Mathcad which allows you to directly implement this model using dynamic programming.*

**Keywords:** *investments, distribution, dynamic programming model, Mathcad.*

### **Постановка проблеми в загальному вигляді.**

Однією з важливих економічних проблем є визначення оптимальної стратегії в заміні старих верстатів, агрегатів, машин на нові.

Старіння обладнання включає його фізичний і моральний знос, в результаті чого зростають виробничі витрати по випуску продукції на старому обладнанні, збільшуються витрати на його ремонт і обслуговування, знижуються продуктивність і ліквідна вартість.

Настає час, коли старе обладнання вигідніше продати, замінити новим, ніж експлуатувати ціною великих витрат; причому його можна замінити новим обладнанням того ж виду або новим, більш досконалим.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Загальні аспекти застосування принципів динамічного програмування для розв'язання економічних задач досліджувалися у роботах Белмана Р, Клаба Р, Бакаева О.О., Хемді А. Таха та інших.

**Мета статті.** Запропонувати модель, що визначає оптимальні терміни заміни обладнання побудовану на засадах динамічного програмування. Реалізувати цю модель за допомогою програмних засобів системи комп'ютерної математики Mathcad. Навести приклад

розв'язання практичної задачі за допомогою запропонованої моделі.

**Виклад основного матеріалу.** Оптимальна стратегія заміни устаткування полягає у визначенні оптимальних термінів заміни. Критерієм оптимальності при цьому може служити прибуток від експлуатації обладнання, який слід оптимізувати, або сумарні витрати на експлуатацію протягом аналізованого проміжку часу, що підлягають мінімізації.

Введемо позначення:  $r(t)$  – вартість продукції, виробленої за один рік на одиниці обладнання віком  $t$  років;

$w(t)$  – щорічні витрати на обслуговування обладнання віком  $t$  років;

$s(t)$  – залишкова вартість обладнання віком  $t$  років;

$P$  – покупна ціна устаткування.

Розглянемо період  $N$  років, в межах якого потрібно визначити оптимальний цикл заміни обладнання.

Позначимо через  $f_N(t)$  максимальний дохід, отримуваний від устаткування віку  $t$  років за решту  $N$  років циклу використання обладнання за умови оптимальної стратегії.

Вік обладнання відраховується в напрямку перебігу процесу. Так,  $t = 0$  відповідає випадку застосування нового устаткування. Часові ж стадії процесу нумеруються у зворотному напрямку по відношенню до ходу процесу. Так,  $N = 1$  відноситься до однієї часової стадії, що залишається до завершення процесу, а  $N = N$  до початку процесу.

На кожному етапі  $N$  – стадійного процесу має бути прийнято рішення про збереження або заміну устаткування. Обраний варіант повинен забезпечувати отримання максимального прибутку.

Функціональні рівняння, засновані на принципі оптимальності, мають вигляд

$$f_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) \rightarrow \text{Збереження;} \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \rightarrow \text{Заміна,} \end{cases} \quad (1)$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) \rightarrow \text{Збереження;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \rightarrow \text{Заміна.} \end{cases} \quad (2)$$

Рівняння (1) описує  $N$  – стадійний процес, а (2) – одно стадійний. Обидва рівняння складаються з двох частин: верхній рядок визначає дохід, одержуваний при збереженні обладнання; нижній – дохід, одержуваний при заміні обладнання та продовження процесу роботи на новому обладнанні.

У рівнянні (1) функція  $r(t) - u(t)$  є різниця між вартістю виробленої продукції та експлуатаційними витратами на  $N$  – й стадії процесу.

Функція  $f_{N-1}(t+1)$  характеризує сумарний прибуток від  $(N-1)$  стадій, що залишилися для обладнання, вік якого на початку здійснення цих стадій складає  $(t+1)$  років.

Нижній рядок (1) характеризується наступним чином: функція  $s(t)$  представляє чисті витрати на заміну устаткування, вік якого  $t$  років.

Функція  $r(0)$  виражає дохід, отримуваний від нового обладнання віку 0 років. Передбачається, що перехід від

роботи на устаткуванні віку  $t$  років до роботи на новому обладнанні відбувається миттєво, тобто період заміни старого обладнання і перехід на роботу на новому обладнанні укладаються в одну й ту ж стадію.

Остання функція  $f_{N-1}$  являє собою доход від  $N - 1$  стадій, що залишилися до початку здійснення яких вік обладнання становить один рік.

Аналогічна інтерпретація може бути дана рівнянню для одно стадійного процесу. Тут немає доданка виду  $f_0(t + 1)$ , тому що  $N$  приймає значення  $1, 2, \dots, N$ . Рівність  $f_N(t) = 0$  впливає з визначення функції  $f_N(t)$ .

Рівняння (1) та (2) є рекурентними співвідношеннями, які дозволяють визначити величину  $f_N(t)$  в залежності від  $f_{N-1}(t + 1)$ . Структура цих рівнянь показує, що при переході від однієї стадії процесу до наступної вік обладнання збільшується з  $t$  до  $(t + 1)$  років, а число залишилися стадій зменшується  $N$  з до  $(N - 1)$ .

Розрахунок починають з використання рівняння (1). Рівняння (1) і (2) дозволяють оцінити варіанти заміни і збереження обладнання, з тим щоб прийняти той з них, який передбачає більший дохід. Ці співвідношення дають можливість не тільки вибрати лінію поведінки при вирішенні питання про збереження або заміни устаткування, а й визначити прибуток, одержуваний при прийнятті кожного з цих рішень.

**Задача 1.** Визначити оптимальний цикл заміни устаткування при наступних вихідних даних:  $P = 10$ ,  $S(t) = 0$ ,  $f(t) = r(t) - u(t)$ , які представлені в таблиці 1.

Рівняння (1) та (2) запишемо у наступному вигляді:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} f(t) + f_{N-1}(t+1), \\ -p + f(0) + f_{N-1}(1), \end{cases} \quad (3)$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} f(t), \\ -p + f(0). \end{cases}$$

Для  $N = 1$

$$f_1(0) = \max \begin{cases} f(0) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 10 \\ -10 + 10 \end{cases} = 10,$$

$$f_1(1) = \max \begin{cases} f(1) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 9 \\ -10 + 10 \end{cases} = 9,$$

$$f_1(12) = \max \begin{cases} f(12) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 0 \\ -10 + 10 \end{cases} = 0.$$

Для  $N = 2$

$$f_2(0) = \max \begin{cases} f(0) + f_1(1) \\ -p + f(0)f_1(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 10 + 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 19,$$

$$f_2(1) = \max \begin{cases} f(1) + f_1(2) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} \\ = \max \begin{cases} 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 17,$$

Обчислення продовжуємо до тих пір, поки не буде виконана умова  $f_1(1) > f_2(t)$ , тобто у даний момент обладнання необхідно замінити, так як прибуток, отриманий в результаті заміни обладнання, більший, ніж при використанні старого.

По результатах обчислень і по лінії, що розділяє область рішень збереження і заміни обладнання, знаходимо оптимальний цикл заміни обладнання.

**Практична задача.** Підприємство визначає оптимальний план заміни працюючого в даний час трирічного механізму протягом наступних чотирьох років, тобто аж до початку п'ятого року. У таблиці 1 наведено вихідні дані до задачі. Вимагається обов'язкова заміна механізму, що знаходиться в експлуатації шість років. Вартість нового механізму становить 50 000 умовних грошових одиниць.

Таблиця 1

Час використання механізму (t), років	Прибуток від використання $g(t)$ , ум. гр. од.	Вартість обслуговування $c(t)$ , ум. гр. од.	Вартість продажу механізму $s(t)$ , ум. гр. од.
0	10 000	100	50 000
1	9 500	300	40 000
2	9 250	600	30 000
3	8 600	750	25 000
4	7 750	850	15 000
5	7 000	900	5 000
6	6 100	1 100	2 500

Визначення допустимих значень часу використання механізму на кожному етапі являється нетривіальною задачею. На рис 1 задача, що розглядається, представлена у вигляді графів. На початку першого року є механізм, що експлуатується три роки. Ми можемо або замінити його, або продовжувати використовувати протягом наступного року. При заміні механізму, на початку наступного року його вік буде дорівнювати одному року, в іншому випадку його вік буде чотири роки. Такий самий підхід використовується на початку кожного кроку, з другого по четвертий.

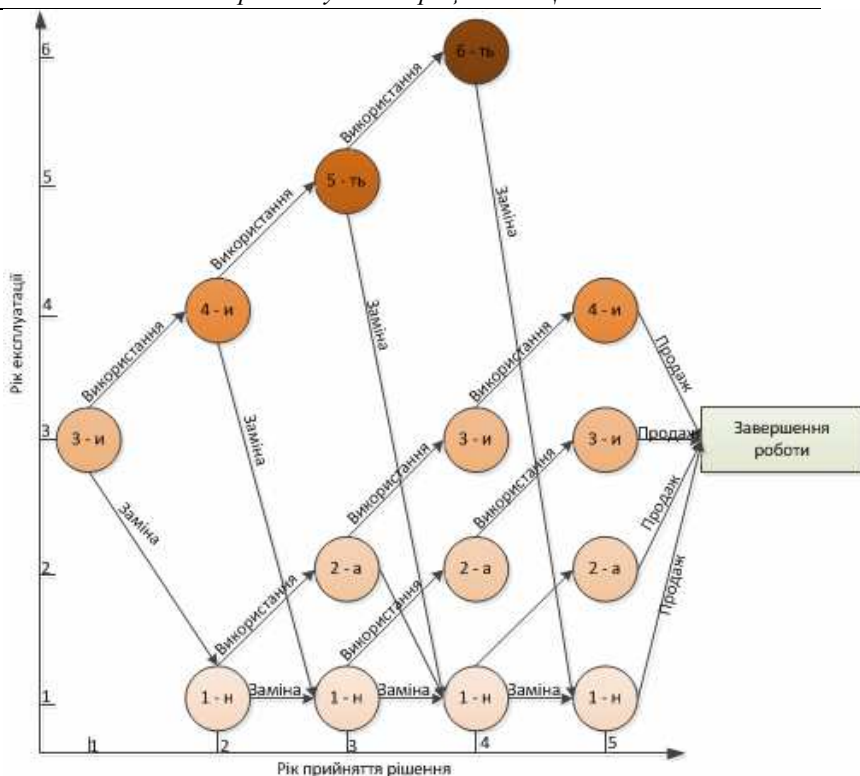


Рис.1. Представлення динамічної задачі заміни обладнання у виді графу.

Якщо однорічний механізм замінюється на початку другого чи третього року, то механізм, що його замінить до початку наступного року також буде однорічним. До того ж, на початку четвертого року шестирічний механізм обов'язково повинен бути замінений, якщо він ще експлуатується; в кінці четвертого року всі механізми обов'язково продаються. На схемі також видно, що на початку другого року можливі лише механізми зі строком експлуатації один чи чотири роки. На початку третього



року механізм може мати вік один, два чи п'ять років, а на початку четвертого – один, два, три чи шість років.

Розв'язання даної задачі еквівалентно до пошуку маршруту максимальної довжини (у нашому випадку, що приносить максимальний прибуток) від початку першого року до кінця четвертого у графах на рисунку.

Послідовність отримання оптимального розв'язку наступна. На початку першого року оптимальним розв'язком при  $t = 3$  є заміна механізму. Тобто, новий механізм до початку другого року буде знаходитись в експлуатації 1 рік, інакше механізм буде мати вік 2 роки. Описаний вище процес продовжується до тих пір, поки не буде визначено оптимальний розв'язок для четвертого року.

**Реалізація у Mathcad.** Вводимо вхідні дані задачі:

$t := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)^T$	Час використання механізму
$r := (10000 \ 9500 \ 9250 \ 8600 \ 7750 \ 7000 \ 6100)^T$	Прибуток від використання
$c := (100 \ 300 \ 600 \ 750 \ 850 \ 900 \ 1100)^T$	Вартість обслуговування
$s := (0 \ 40000 \ 30000 \ 25000 \ 15000 \ 5000 \ 2500)^T$	Вартість продажу механізму

Програми функції для реалізації моделі розробляємо у виді окремих модулів:

---

$Isp(stage, r, s, c, t, n, m, Prib) \equiv$ 

if stage = 1	for i ∈ 0..n for j ∈ 0..m $Isp_i \leftarrow r_i + s_{i+1} - c_i$ if $i < n \wedge i = t_j$ Isp
otherwise	for i ∈ 0..n for j ∈ 0..m $Isp_i \leftarrow r_i + Prib_{i+1} - c_i$ if $i = t_j$ Isp

Програма-функція знаходження вартості використання обладнання на заданому етапі при продовженні використання обладнання. На початку перевіряється, чи є етап початковим, далі, в залежності від переданого параметру stage виконується обчислення вартості.

$Zam(stage, r, s, c, t, n, m, o, Prib) \equiv$ 

if stage = 1	for i ∈ 0..n for j ∈ 0..m $Zam_i \leftarrow r_0 + s_i + s_1 - c_0 - o$ if $i = t_j \wedge i \leq n$ Zam
otherwise	for i ∈ 0..n for j ∈ 0..m $Zam_i \leftarrow r_0 + s_i - c_0 - o + Prib_1$ if $i = t_j$ Zam

Програма-функція знаходження вартості використання обладнання на заданому етапі у випадку заміни обладнання. На початку перевіряється, чи є етап

початковим, далі, в залежності від переданого параметру stage виконується обчислення вартості

$$\text{Prib}(\text{Isp}, \text{Zam}, n) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Prib}_i \leftarrow \text{Isp}_i \text{ if } \text{Isp}_i \geq \text{Zam}_i \\ \text{Prib}_i \leftarrow \text{Zam}_i \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \text{Prib} \end{array} \right.$$

Програма-функція знаходження максимального прибутку на заданому етапі шляхом порівняння прибутку від використання обладнання та його заміною.

Де: Stage – поточний етап моделювання;

r – прибуток від використання;

s – вартість ліквідації механізму;

c – вартість обслуговування механізму;

t – перелік усіх можливих років використання механізму;

m – перелік років використання на даному етапі;

Процес розрахунків:

$$t_4 := (1 \ 2 \ 3 \ 4)^T$$

$$\text{Isp4} := \text{Isp}(1, r, s, c, t_4, \text{last}(t), \text{last}(t_4), 0)$$

$$\text{Zam4} := \text{Zam}(1, r, s, c, t_4, \text{last}(t), \text{last}(t_4), m, 0)$$

$$\text{Prib4} := \text{Prib}(\text{Isp4}, \text{Zam4}, \text{last}(\text{Zam4}))$$

+

$$t_3 := (1 \ 2 \ 3)^T$$

$$\text{Isp3} := \text{Isp}(0, r, s, c, t_3, \text{last}(t), \text{last}(t_3), \text{Prib4})$$

$$\text{Zam3} := \text{Zam}(0, r, s, c, t_3, \text{last}(t), \text{last}(t_3), m, \text{Prib4})$$

$$\text{Prib3} := \text{Prib}(\text{Isp3}, \text{Zam3}, \text{last}(\text{Zam3}))$$

$$t_2 := (1 \ 2)^T$$

$$\text{Isp2} := \text{Isp}(0, r, s, c, t_2, \text{last}(t), \text{last}(t_2), \text{Prib3})$$

$$\text{Zam2} := \text{Zam}(0, r, s, c, t_2, \text{last}(t), \text{last}(t_2), m, \text{Prib3})$$

$$\text{Prib2} := \text{Prib}(\text{Isp2}, \text{Zam2}, \text{last}(\text{Zam2}))$$

$$t_1 := (1)$$

$$\text{Isp1} := \text{Isp}(0, r, s, c, t_1, \text{last}(t), \text{last}(t_1), \text{Prib2})$$

$$\text{Zam1} := \text{Zam}(0, r, s, c, t_1, \text{last}(t), \text{last}(t_1), m, \text{Prib2})$$

$$\text{Prib1} := \text{Prib}(\text{Isp1}, \text{Zam1}, \text{last}(\text{Zam1}))$$

**Аналіз результатів:**

Етап 4				
t	Використання	Заміна	Прибуток f4(t)	Обраний варіант
1	39,2	39,9	39,9	Заміна
2	33,65	29,9	33,65	Використання
3	22,85	24,9	24,9	Заміна
4	11,9	14,9	14,9	Заміна
Етап 3				
t	Використання	Заміна	Прибуток f3(t)	Обраний варіант
1	42,85	39,8	42,85	Використання
2	33,55	29,8	33,55	Використання
3	22,75	24,8	24,8	Заміна
Етап 2				
t	Використання	Заміна	Прибуток f2(t)	Обраний варіант
1	42,75	42,75	42,75	Не впливає
2	33,45	32,75	33,75	Заміна

Етап 1				
t	Використання	Заміна	Прибуток f1(t)	Обраний варіант
1	42,65	42,65	42,65	Не впливає

Тобто, починаючи з першого року експлуатації механізму, альтернативними оптимальними стратегіями відносно заміни механізму будуть:

- Заміна → Використання → Використання → Заміна;
- Заміна → Заміна → Використання → Використання.

Отже, загальний прибуток складає 42 650 умовних грошових одиниць.

**Висновки.** Розглянуто задачу оптимального розподілу інвестицій за допомогою динамічного програмування. Запропоновано алгоритм розв'язання та розв'язана чисельна задача за допомогою Mathcad.

**Список використаних джерел**

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 400 с.
2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. – 458 с.
3. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969. – 118 с.
4. Хемди А Таха. Введение в исследование операций. 6-е издание.: Пер. с англ. – М.: «Вильямс», 2001. – 912 с.

УДК 330.115:338.48

**Е.А. Шембелева**

**Економіко-математические модели управления развитием системы туризма**

*Обговорюються можливості підготовки обґрунтованих управлінських рішень при управлінні*