ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2008. Том 10, N 1. С. 33 – 38

УДК 533.6.013.42

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ МЕМБРАН И ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С УПРУГИМ ДНОМ

Ю. Н. КОНОНОВ*, **Е. А. ТАТАРЕНКО****,

* *Донецкий национальный университет*

** *Донбасская национальная академия строительства и архитектуры*

Получено 31.08.2007

Построено аналитическое решение плоской задачи гидроупругости, описывающей взаимосвязанные свободные колебания упругих мембран, расположенных на свободной и внутренней поверхностях двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с плоским упругим дном в виде пластинки. Выведено и исследовано частотное уравнение. Рассмотрены случаи отсутствия мембран, случаи, когда мембрана находится только на свободной или внутренней поверхности двухслойной жидкости. Получено условие устойчивости связанных колебаний двухслойной жидкости, мембран и упругого дна. Проведены численные исследования собственных частот.

Побудовано аналітичне рішення плоскої задачі гідропружності, що описує взаємозалежні вільні коливання пружних мембран, розташованих на вільній і внутрішній поверхнях двошарової ідеальної нестисливої рідини в прямокутному каналі із плоским пружним дном у вигляді пластинки. Виведено та досліджено частотне рівняння. Розглянуто випадки, коли мембрана відсутня, коли перебуває тільки на вільній або внутрішній поверхні двошарової рідини. Отримано умову стійкості зв'язаних коливань двошарової рідини, мембран і пружного дна. Проведено чисельні дослідження власних частот.

The analytical solution of a flat problem of the hydroelasticity describing interconnected free oscillations of elastic diaphragms, the arranged on free and interior surfaces of a two-layer ideal incompressible liquid in the rectangular channel with a flat elastic bottom is constructed. The frequency equation is deduced. Cases when the diaphragm is only on a free or interior surface of a two-layer liquid are considered. The condition of a stability of the connected oscillations of a two-layer liquid, diaphragms and an elastic bottom is received. Are carried out numerical researches of fundamental frequencies.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–2] исследованы собственные колебания двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с жестким дном и упругими мембранами или пластинками на свободной и внутренней поверхностях. В настоящем сообщении обобщены результаты этих работ на случай плоского упругого дна в виде прямоугольной пластинки. Задача о влиянии упругости дна на собственные частоты колебаний однородной тяжелой идеальной жидкости, находящейся в прямом круговом цилиндре, была рассмотрена в [3]. Обобщение этой задачи на случай однородной и многослойной идеальной капиллярной жидкости с позиций функционального анализа было дано в работах [4–6]. В диссертации [7] дан анализ влияния упругого дна на устойчивость движения вязкой двухслойной жидкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямоугольный канал с плоским упругим дном шириной b, заполненный двухслойной идеальной и несжимаемой жидкостью с плотностями ρ_n до глубин h_n $(n=1,2)$. На свободной поверхности верхней жидкости $(n=1)$ и на поверхности раздела двухслойной жидкости равномерно натянуты гибкие мембраны с растягивающими усилиями в срединной поверхности T_n, массовой плотностью материала ρ_{0n} и толщиной δ_{0n}. Края мембран жестко закреплены на стенках канала. Дно представляется в виде плоской упругой пластинки, жестко защемленной по краю. Колебания жидкостей, мембран и пластинки будем рассматривать в плоской постановке. Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы ось Ox была направлена вдоль канала, а ось Oz совпадала с осью симметрии его поперечного сечения и направлена против ускорения силы тяжести. Плоскость Oxy совпадает с плоскостью раздела жидкостей в невозмущенном состоянии. Задачу будем решать в рамках линейной теории, а движения жидкостей считать потенциальными.

Колебания мембран и пластинки описываются уравнениями:

$$\rho_{0n}\delta_{0n}\frac{\partial^2 w_n^*}{\partial t^2} - T_n\frac{\partial^2 w_n^*}{\partial y^2} =$$
$$= P_n - P_{n-1},\ z = z_n,$$

$$\rho_{03}\delta_{03}\frac{\partial^2 w_3^*}{\partial t^2}+D_3\frac{\partial^4 w_3^*}{\partial y^4}-T_3\frac{\partial^2 w_3^*}{\partial y^2}= \qquad (1)$$

$$=p_a-P_2,\ z=z_3,$$

при следующих граничных условиях

$$w_n^*\left(t,\pm\frac{b}{2}\right)=0,$$
$$w_3^*\left(t,\pm\frac{b}{2}\right)=0,\ \left.\frac{\partial w_3^*}{\partial y}\right|_{y=\pm b/2}=0. \qquad (2)$$

Поперечная нагрузка $P_n(t,y)$, которую испытывают мембраны и пластинка со стороны жидкости, может быть определена с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа–Коши

$$P_n=-\rho_n\left[\left.\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial t^2}\right|_{z=z_n}+gz+\chi_n\right]. \qquad (3)$$

Здесь $z=w_n^*+z_n$ для мембран и $z=w_3^*+z_3$ – для пластинки; $\Phi_n(t,x,y)$ – потенциал смещений n-ой жидкости; $w_n^*(y,t)$ – нормальный прогиб n -ой мембраны; $w_3^*(y,t)$ – нормальный прогиб дна; g – ускорение силы тяжести; $\chi_n(t)$ – произвольная функция времени; $z_1=h_1$, $z_2=0$, $z_3=-h_2$, $P_0=P_3=p_a$.

Потенциал смещений двухслойной жидкости $\Phi_n(t,y,z)$ определяется из решения краевой задачи:

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial z^2}=0,\quad (y,z)\in Q_n,$$
$$\left.\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}\right|_{y=\pm b/2}=0,\ \left.\frac{\partial\Phi_n}{\partial z}\right|_{z=z_n}=w_n^*,$$
$$\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2}=w_3^*,\ \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0}, \qquad (4)$$
$$\int\limits_{-b/2}^{b/2}w_n^*(t,y)dy=\int\limits_{-b/2}^{b/2}w_3^*(t,y)dy=i_0^*,$$

где Q_n – область поперечного сечения канала, занятая n -ой жидкостью.

Представим прогиб мембран и пластинки в виде суммы статического и динамического прогибов:

$$w_n^*=w_n^0+w_n,\ w_3^*=w_3^0+w_3. \qquad (5)$$

Для исследования собственных колебаний механической системы запишем неизвестные динамические функции в виде

$$w_3=W_3(y)e^{i\omega t},\quad w_n=W_n(y)e^{i\omega t},$$
$$\chi_n=gc_ne^{i\omega t},\quad \Phi_n=\phi_n(y,z)e^{i\omega t}. \qquad (6)$$

Подставим выражения (5)-(6) в соотношения (1)-(4) и перейдем к безразмерным величинам в динамической задаче. В качестве характерного линейного размера выбираем ширину канала b. В результате получим граничную задачу на собственные значения:

$$W_n''-\gamma_n^2W_n=\lambda^2d_n\left(\phi_{n-1}(y,z_n)\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}-\right.$$
$$\left.-\phi_n(y,z_n)\right)+d_n\left(c_n-c_{n-1}\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right),$$
$$W_3^{IV}--K_3W_3''-\gamma_3^2W_3=d_3\left(c_2-\lambda^2\phi_2(y,-h_2)\right),$$
$$W_n\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0,\ W_3\left(\pm\frac{1}{2}\right)=W_3'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0,$$
$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}W_n(y)dy=\int\limits_{-1/2}^{1/2}W_3(y)dy=i_0,$$
$$\frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi_n}{\partial z^2}=0,\quad (y,z)\in Q_n,$$
$$\left.\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\right|_{y=\pm 1/2}=0,\quad \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2}=W_3,$$
$$\left.\frac{\partial\phi_n}{\partial z}\right|_{z=z_n}=W_n,\ \left.\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right|_{z=0}, \qquad (7)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\lambda^2=\frac{\omega^2b}{g},\ a_n=\frac{g\rho_{0n}\delta_{0n}b}{T_n},\ d_n=\frac{\rho_ngb^2}{T_n},$$
$$\gamma_n^2=d_n\left(1-\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right)-\lambda^2a_n,\ K_3=\frac{T_3b^2}{D_3},$$
$$d_3=\frac{\rho_2gb^4}{D_3},\ a_3=\frac{g\rho_{03}\delta_{03}b^3}{D_3},\ \gamma_3^2=d_3+\lambda^2a_3,$$

c_n – произвольные постоянные, $n=1,2$.

Будем предполагать, что выполняются неравенства

$$\lambda^2<\frac{d_n}{a_n}\left(1-\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right). \qquad (8)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

После применения метода разделения переменных составляющие потенциала смещений жидкости ϕ_n можно представить в виде

$$\phi_n = i_0 z +$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i_{nk}\mathrm{ch}\,\pi k(z-z_{n+1}) - i_{n+1k}\mathrm{ch}\,\pi k(z-z_n)}{\pi k\mathrm{sh}\,\pi k h_n}Y_k. \qquad (9)$$

Здесь

$$Y_k = \cos\pi k\left(y+\frac{1}{2}\right),\ i_{nk} = \int\limits_{-1/2}^{1/2} W_n Y_k dy.$$

С учетом выражения (9) исходную задачу (7) сведем к краевой задаче на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения относительно составляющей прогиба мембран и пластинки:

$$W_n'' - \gamma_n^2 W_n = d_n\lambda^2 i_0 z_n\left(1-\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}Y_k + d_n\left(c_n - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}c_{n-1}\right),$$
$$W_3^{IV} - K_3 W_3'' - \gamma_3^2 W_3 = \qquad (10)$$
$$= c_2 d_3 + d_3\lambda^2 i_0 h_2 - \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k}Y_k,$$

где

$$B_{nk} = \frac{2\lambda^2 d_n}{\pi k}\left(i_{n-1k}b_{n-1k}\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} - i_{nk}u_{nk} + i_{n+1k}b_{nk}\right),$$
$$B_{3k} = \frac{2\lambda^2 d_3}{\pi k}(i_{2k}b_{2k} - u_{3k}i_{3k}),$$
$$b_{nk} = \frac{1}{\mathrm{sh}\,\pi k h_n},\quad u_{3k} = \mathrm{cth}\,\pi k h_2,$$
$$u_{nk} = \mathrm{cth}\,\pi k h_n + \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\mathrm{cth}\,\pi k h_{n-1}.$$

Представив частные решения этих уравнений в форме, отвечающей их правым частям

$$W_n^* = W_{0n} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{nk}Y_k,$$
$$W_3^* = W_{03} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{3k}Y_k,$$

запишем общее решение задачи в виде

$$W_n = A_n\mathrm{sh}\,\gamma_n y + B_n\mathrm{ch}\,\gamma_n y + W_n^*(y),$$
$$W_3 = A_3\mathrm{ch}\,p_2 y + B_3\mathrm{sh}\,p_2 y + C_3\cos p_1 y + \qquad (11)$$
$$+D_3\sin p_1 y + W_3^*(y).$$

Здесь $p_{1,2} = \sqrt{0.5\left(\sqrt{K_3^2+4\gamma_3^2} \mp K_3\right)}$; A_n, B_n, A_3, B_3, C_3, D_3 – произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (7).

Подставляя выражения (11) в уравнение (10), имеем

$$W_{nk} = -B_{nk}/(\gamma_n^2 + \pi^2 k^2),$$
$$W_{3k} = -B_{3k}/((\pi k)^4 + K_3\pi^2 k^2 - \gamma_3^2),$$
$$-\gamma_n^2 W_{0n} = d_n\lambda^2 i_0 z_n\left(\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} - 1\right) + \qquad (12)$$
$$+d_n\left(c_n - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}c_{n-1}\right),$$
$$-\gamma_3^2 W_{03} = d_3\lambda^2 i_0 h_2 + d_3 c_2.$$

Выберем постоянную W_{0n}, W_{03} из условия несжимаемости жидкостей, и с учетом выражения (12) представим функцию $W_n(y)$ следующим образом:

$$W_n(y) = A_n\mathrm{ch}\,\gamma_n y + B_n\mathrm{sh}\,\gamma_n y + W_{0n} +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{nn}b_n + \sum_{j=1,n\neq j}^{3} A_{jn}b_j\right)Y_k,$$
$$W_3(y) = A_3\mathrm{ch}\,p_2 y + B_3\mathrm{sh}\,p_2 y + C_3\cos p_1 y + D_3\sin p_1 y +$$
$$+W_{03} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{33}b_3 + \sum_{j=1}^{2} A_{j3}b_j\right)Y_k,$$

где

$$A_{ii} = 2\,(\delta_{ii}-1),\ A_{ji} = 2(-1)^{i+j}\delta_{ji},$$
$$\Delta_k = \left|\begin{array}{ccc} 1-M_{1k}u_{1k} & M_{1k}b_{1k} & 0 \\ M_{2k}b_{1k}\rho_{12} & 1-M_{2k}u_{2k} & M_{2k}b_{2k} \\ 0 & M_{3k}b_{2k} & 1-M_{3k}u_{3k} \end{array}\right|,$$
$$M_{nk} = \frac{\lambda^2 d_n}{\pi k\,(\gamma_n^2 + \pi^2 k^2)},$$
$$M_{3k} = \frac{\lambda^2 d_3}{\pi k\,(\pi^4 k^4 + K_3\pi^2 k^2 - \gamma_3^2)},$$
$$b_n = A_n\int\limits_{-1/2}^{1/2}\mathrm{ch}\,(\gamma_n y)\,Y_k dy + B_n\int\limits_{-1/2}^{1/2}\mathrm{sh}\,(\gamma_n y)\,Y_k dy,$$
$$b_3 = A_n\int\limits_{-1/2}^{1/2}\mathrm{ch}\,(p_2 y)\,Y_k dy + B_n\int\limits_{-1/2}^{1/2}\mathrm{sh}\,(p_2 y)\,Y_k dy +$$
$$+C_n\int\limits_{-1/2}^{1/2}\cos(p_1 y)\,Y_k dy + D_n\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sin(p_1 y)\,Y_k dy, \qquad (13)$$

δ_{ji} – миноры соответствующих элементов определителя Δ_k. Для удобства записи здесь и далее третий индекс k будем опускать.

Неизвестные постоянные определим из условий жесткого закрепления мембран и пластинки. При этом получим линейную алгебраическую систему, которая с учетом значений определенных интегралов (13) расщепляется на две независимые подсистемы относительно A_n, A_3 и относительно B_n, B_3.

Условия существования нетривиальных решений этих систем приводят к двум характеристическим уравнениям относительно параметра λ.

Если значения λ совпадают с корнями уравнения

$$\left| \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,3}} \right| = 0, \qquad (14)$$

где

$$a_{ij} = f_i + (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{ji}}{S_{kj}},\ S_{kn} = \gamma_n^2 + \alpha_k^2,$$
$$S_{k3} = \alpha_k^4 + K_3\alpha_k^2 - \gamma_3^2,$$
$$\alpha_k = 2k\pi,\ \rho_{12} = \rho_1/\rho_2, \qquad (15)$$
$$f_1 = \frac{\rho_{12}}{2d_1Q},\ f_2 = \frac{1}{2d_2Q},\ f_3 = \frac{1}{2d_3Q},$$
$$Q = -\lambda^2\left(\rho_{12}\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \frac{a_3}{d_3} + \rho_{12}h_1 + h_2\right),$$

то им соответствуют симметричные формы связанных колебаний мембран, жидкостей и дна, а частоты для несимметричных колебаний определяются из выражений (14), (15) при

$$f_i = 0,\ \alpha_k = \beta_k,\ \beta_k = (2k-1)\pi. \qquad (16)$$

При выводе уравнения (14) гиперболические функции были разложены на простейшие дроби так, как это сделано в [8]. Хотя при этом корни этого уравнения находятся с большей погрешностью, однако это удобно для численных исследований и качественного анализа.

Если неравенство (8) не выполняется, то по аналогии с работой [8] переходим к новым переменным.

Для того, чтобы получить частотное уравнение собственных колебаний двухслойной жидкости при отсутствии n-ой мембраны, следует в определителе (14) вычеркнуть n-й столбец и n-ю строку, поскольку исключаются из рассмотрения соответствующие граничные условия. Кроме этого, в определителе Δ_k следует положить $T_n = 0$, $\rho_{0n}\delta_{0n} = 0$.

Если в рассматриваемой механической системе отсутствует верхняя мембрана, то частотное уравнение будет иметь вид

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = 0.$$

Здесь $Q = -\lambda^2\left(\frac{a_2}{d_2} + \frac{a_3}{d_3} + h_2\right)$,

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k}u_{1k} & \frac{\lambda^2}{\alpha_k}b_{1k} & 0 \\ M_{2k}b_{1k}\rho_{12} & 1 - M_{2k}u_{2k} & M_{2k}b_{2k} \\ 0 & M_{3k}b_{2k} & 1 - M_{3k}u_{3k} \end{vmatrix},$$

а если отсутствует и верхняя жидкость, то дополнительно полагаем $\rho_1 = 0$.

Уравнение свободных колебаний однослойной жидкости со свободной поверхностью и упругим дном запишется так:

$$a_{33} = 0,\ Q = -\lambda^2\left(\frac{a_3}{d_3} + h_2\right),\ \Delta_k =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k}u_{1k} & \frac{\lambda^2}{\alpha_k}b_{1k} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k}u_{2k} & \frac{\lambda^2}{\alpha_k}b_{2k} \\ 0 & M_{3k}b_{2k} & 1 - M_{3k}u_{3k} \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Остальные переменные вычисляются по формулам (15)-(16). Для случая несимметричных колебаний это частотное уравнение будет следующим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\lambda^2}{\beta_k}u_{3k}}{\Delta_k(\beta_k^4 + K_3\beta_k^2 - \gamma_3^2)} = 0, \qquad (18)$$

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{\beta_k}u_{3k} & \frac{\lambda^2}{\beta_k}b_{2k} \\ M_{3k}b_{2k} & 1 - M_{3k}u_{3k} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что с учетом одного слагаемого в ряде ($k = 1$) уравнение (18) имеет корень $\lambda^2 = \beta_1 \mathrm{th}\beta_1 h_2$, который соответствует первой собственной частоте колебаний однородной жидкости с абсолютно жестким дном.

В случае, если одна из мембран или упругое днище становятся абсолютно жесткими ($i_0 = 0$), то в симметричном и несимметричном случаях величины $f_i = 0$.

Вычеркивая 3-й столбец и 3-ю строку в определителе (14) и полагая $f_i = 0$, $D_3 = \infty$, получаем частотное уравнение работы [1].

3. СТАТИЧЕСКИЙ ПРОГИБ

Статический прогиб определяется из краевой задачи

$$w_1^{0\prime\prime}-d_1w_1^0=d_1h_1+d_1C_1+\frac{p_a}{T_1},$$
$$w_2^{0\prime\prime}-d_2(1-\rho_{12})w_2^0=d_2\left(C_2-\rho_{12}C_1\right), \qquad (19)$$
$$w_3^{0(IV)}-K_3w_3^{0\prime\prime}-d_3w_3^0=-d_3h_2+d_3c_2+\frac{p_a}{D_3}$$

при следующих граничных условиях

$$w_n^0\left(\pm\frac{1}{2}\right)=w_3^0\left(\pm\frac{1}{2}\right)=w_3^{0\prime}\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Решение задачи (19) имеет вид

$$w_n^0=\tilde{c}_n\left(\frac{\operatorname{ch}yr_n}{\operatorname{ch}\frac{r_n}{2}}-1\right),\ w_3^0=\tilde{c}_3\times$$
$$\times\left(\frac{r_{32}\operatorname{sh}\frac{r_{32}}{2}\cos r_{31}y+r_{31}\sin\frac{r_{31}}{2}\operatorname{ch}r_{32}y}{r_{32}\operatorname{sh}\frac{r_{32}}{2}\cos\frac{r_{31}}{2}+r_{31}\sin\frac{r_{31}}{2}\operatorname{ch}\frac{r_{32}}{2}}-1\right),$$

где $\tilde{c}_1=h_1+C_1+\dfrac{p_a}{d_1T_1}$; $\tilde{c}_2=\dfrac{C_2-\rho_{12}C_1}{1-\rho_{12}}$;

$$\tilde{c}_3=h_2-C_2-\frac{p_a}{d_3D_3};\ r_n=\sqrt{d_n\left(1-\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right)};$$
$$r_{3j}=\sqrt{0.5\left(\sqrt{K_3^2+4d_3}+(-1)^jK_3\right)}.$$

c_n находим из условия несжимаемости жидкости.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ

Необходимым условием устойчивости совместных колебаний мембран, упругого дна и двухслойной жидкости является положительность всех корней частотного уравнения (14). В случае симметричных колебаний для приближенного анализа этого уравнения ограничимся одним слагаемым в рядах (15). В случае несимметричных колебаний учет одного слагаемого в уравнении (14) не приводит к уравнению, содержащему неизвестную частоту, поэтому оставим два слагаемых в a_{22}. Потребуем выполнения правила знаков Декарта для полученных многочленов. Это приводит при несимметричных формах колебаний к условиям

$$\rho_1-\rho_2<\frac{\beta_1^2}{gb^2}T_2,\quad \rho_2<\beta_1^4\frac{D_3}{gb^4}+\beta_1^2\frac{T_3}{gb^2}. \qquad (20)$$

Для симметричных колебаний вместо β_1 подставляем α_1.

Условия (20) не зависят от параметров верхней мембраны, глубин заполнения и массовых характеристик мембран и пластинки. Эти условия не изменяются, если упругая мембрана отсутствует на свободной поверхности или является абсолютно жесткой. В случае абсолютно жесткого дна ($T_3=\infty$) из двух неравенств (20) остается только первое. Если более тяжелая жидкость находится внизу сосуда ($\rho_2\geq\rho_1$), то это неравенство всегда выполнено.

В случае однородной жидкости условия устойчивости следуют из (20), в которых полагается $\rho_1=0$.

На основании проведенных исследований общего уравнения (14) для ряда частных случаев можно предположить, что для m-слойной жидкости условия устойчивости будут иметь вид

$$\rho_1-\rho_2<\frac{\beta_1^2}{gb^2}T_2,\ \rho_2-\rho_3<\frac{\beta_1^2}{gb^2}T_3,\ \ldots,$$
$$\rho_{m-1}-\rho_m<\frac{\beta_1^2}{gb^2}T_m,$$
$$\rho_{m+1}<\beta_1^4\tfrac{D_{m+1}}{gb^4}+\beta_1^2\tfrac{T_{m+1}}{gb^2}.$$

5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 1 показаны статические прогибы мембран и пластинки при $h_1=h_2=0.5$, $\rho_1=500$, $\rho_2=1000$, $b=1$, $m_1=m_2=m_3=10$, $D_3=50$. Рис. 1, *а* соответствует параметрам $T_1=T_2=T_3=98.1$, рис. 1, *б* – $T_2=T_3=98.1$, $T_1=981$, рис. 1, *в* – $T_1=T_3=98.1$, $T_2=981$, рис. 1, *г* – $T_1=T_2=98.1$, $T_3=981$. Кривые *1, 2, 3* обозначают прогибы верхней, внутренней мембран и дна соответственно. На основании приведенных графиков видно, что на прогиб мембран и пластинки в наиболее значительной степени влияет натяжение дна.

На рис. 2 на примере однородной жидкости показана зависимость первых двух собственных частот от натяжения мембраны для следующих значений параметров: $\rho_1=0$, $\rho_2=1000$, $m_2=10$, $m_3=10^{-5}$, $T_3=981$, $D_3=10$, $h=1$. Кривые *1, 2* соответствуют собственным частоты колебаний мембраны в вакууме; *3, 4* – собственным частотам колебаний мембраны на поверхности однородной жидкости в сосуде с абсолютно жестким дном. Кривые, изображенные с помощью символов, соответствуют собственным частотам колебаний механической системы с упругим дном. Из ри-

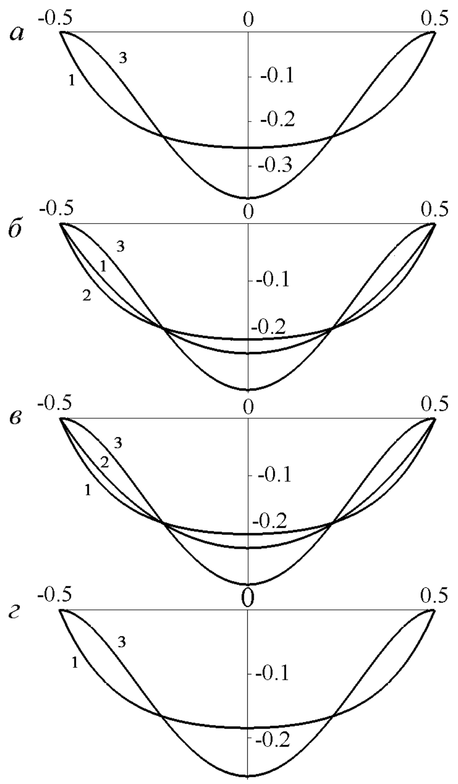

Рис. 1. Статический прогиб мембран и дна

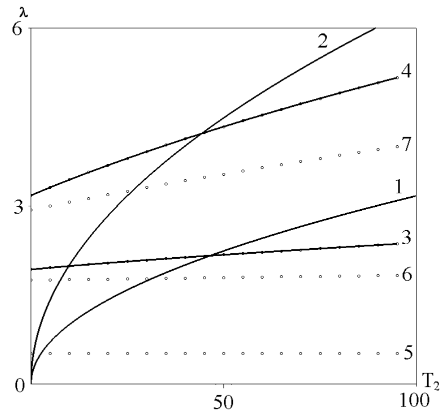

Рис. 2. Собственные частоты в случае однородной жидкости

сунка видно, что упругость дна приводит к уменьшению собственных частот. Следует отметить, что глубина заполнения канала оказывает существенное влияние на частоты при $h_2 = 0.1 - 0.3$.

Из рис. 2 следует, что для абсолютно жесткого дна при малых натяжениях мембраны частоты возрастают, а при больших – убывают по сравнению с частотами колебаний мембраны в вакууме. Упругость дна приводит к появлению новой группы частот, которые меньше частот, вычисленных для абсолютно жесткого дна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведено частотное уравнение собственных колебаний двухслойной жидкости в прямоугольном канале с плоским дном в виде упругой пластинки и с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях жидкости. Это уравнение исследовано для ряда частных случаев: отсутствия мембран, мембрана находится только на свободной или внутренней поверхности двухслойной жидкости.

Получены условия устойчивости совместных колебаний жидкостей, упругих мембран и упругого дна. Эти условия не зависят от параметров верхней мембраны, глубин заполнения и массовых характеристик мембран и пластинки и имеют один и тот же вид, если упругая мембрана отсутствует на свободной поверхности или является абсолютно жесткой.

Показано, что частотный спектр состоит из трех наборов собственных частот, соответствующих колебаниям мембран и дна.

1. *Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А.* Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на "свободной"и внутренней поверхностях // Акустичний вісник.– 2003.– **6**, № 4.– С. 44–52.
2. *Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А.* Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале // Теор. и прикл. механика.– 2002.– **36**.– С. 170–176.
3. *Петренко М. П.* О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами // Прикладная механика.– 1969.– **5**, No 6.– С. 44–50.
4. *Нго Зуй Кан* О движении несмешивающихся жидкостей в сосуде с плоским упругим днищем // Изв. АН СССР. МТТ.– 1979.– № 5.– С. 48–54.
5. *Нго Зуй Кан* О движении идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, заполняющей сосуд с плоским упругим днищем // Изв. АН СССР. МТТ.– 1980.– № 3.– С. 143–154.
6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.– М.: Наука, 1989.– 416 с.
7. *Имедашвили В. Г.* Колебания жидкости в сосудах.– Автореф. Дис...: Ростов, 2000.– 15 с.
8. *Троценко В. А.* Свободные колебании жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикладная механика.– 1995.– **31**, N 8.– С. 74–80.