

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ДВУХМЕРНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ

А. А. ГУРЖИЙ*, В. В. МЕЛЕШКО**, Т. С. КРАСНОПОЛЬСКАЯ*,
Л. ЗАННЕТТИ***, Г. Я. Ф. ВАН ХЕЙСТ****, Т. П. КОНОВАЛЮК*

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев,

** Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев,

*** Туринский политехнический институт, Италия

**** Эйнховенский технологический университет, Нидерланды

Получено 17.08.2007

Рассматривается двухмерное ламинарное течение невязкой жидкости, генерируемое периодической (как импульсной, так и синусоидальной) инжекцией жидкости из щели (инжектора) в плоской стенке в невозмущенное полупространство. Предложена усовершенствованная математическая модель периодического течения с учетом равенства объемов жидкости во время выдавливания (истоковое течение) и затягивания (стоковое течение) жидкости. Поле скорости течения представляется в виде суперпозиции поля скорости потенциального течения из инжектора и поля скорости вихревой пары. Во время истока жидкости интенсивность вихрей оценивается общей завихренностью течения в канале инжектора, во время стока жидкости интенсивность вихревой пары остается неизменной. Математическая модель тестируется на задаче адвекции пассивной примеси в поле скорости периодического инжектора. Сравнение численных результатов и экспериментальных данных свидетельствует об адекватности модели инжектора реальному течению в достаточно широком диапазоне скоростей инжекции.

Розглядається двовірна ламінарна течія невязкої рідини, яка генерується періодичною (як імпульсною, так і синусоїдальною) інжекцією рідини з щілини (інжектора) в плоскій стінці в необурений півпростір. Запропоновано удосконалену математичну модель періодичної течії з урахуванням рівності об'ємів рідини під час видавлювання (істокова течія) і затягування (стокова течія) рідини. Поле швидкості в течії представляється у вигляді суперпозиції поля швидкості потенційної течії з щілини і поля швидкості вихрової пари. Під час витoku рідини інтенсивність вихорів оцінюється загальною завихренністю течії в каналі інжектора, під час стоку інтенсивність вихрової пари залишається незмінною. Математична модель тестується на задачі адвекції пасивної домішки в полі швидкості періодичного інжектора. Порівняння чисельних результатів і експериментальних даних свідчить про адекватність моделі інжектора реальній течії в досить широкому діапазоні швидкостей інжекції.

Two-dimensional laminar flow of inviscid fluid generated by periodic (both impulse, and sinusoidal forcing) injection of fluid from a chink (injector) in a flat wall into non-perturbed half-space is considered. The advanced mathematical model for periodic flow, which takes into account the equality of fluid volumes both during push-out (source flow) and during push-in (sink flow) flows is suggested. The velocity field of the flow is represented by superposition of the velocity field of potential flow from a chink and the velocity field induced by vortex pair. During an ejection the intensity of vortex pair is estimated by general flow vorticity in the injector channel, while during an injection vortex intensities remains constant. The mathematical model of the flow is tested on an advection problem of a passive impurity in a velocity field of periodic injector. Comparison of numerical and experimental data testifies an adequacy of the model of injector to real flow in wide enough range of injection velocities.

ВВЕДЕНИЕ

Задача об истечении струй жидкостей из узких отверстий принадлежит к числу наиболее интересных проблем гидродинамики [1–3]. Повышенное внимание исследователей к периодическим потокам из отверстий с конечной шириной объясняется не только внутренней красотой течений, которые качественно меняют свою структуру в зависимости от направления истечения из отверстия, но и привлекательностью построения и обоснования решений в различных приближениях с теоретической точки зрения. Наблюдения показывают [4–6], что при истечении жидкости формируется струйное течение, в то время как при втекании жидкости поток жидкости остается потенциальным [7]. Периодические течения из отверстий находят ши-

рокое применение в природе и технике, среди которых можно выделить перенос различных примесей и загрязнений течениями в заливах и устьях рек, гаванях, впрыскивание топливных смесей в двигательных установках, внесение химических реагентов в химической аппаратуре и многое другое.

Во многих случаях, важных с практической точки зрения, анализ масштабов поля скорости показывает, что величина скорости по одной из координат может оказаться значительно меньше значений скоростей по другим координатам. Такое резкое отличие в масштабах скоростей может появиться либо из геометрии течения [1, 7], либо по причине наличия стратификации течения [8]. Другими словами, многие течения жидкости или газа из отверстий (инжекторов) можно трактовать как двухмерные течения. Такое допущение существенным образом упрощает задачу исследования и по-

зволяет затратить меньшие усилия для проведения качественного анализа особенностей течений жидкостей в областях, близлежащих к инжектируемым системам.

Отдельный интерес к течениям жидкостей из щелей принадлежит задачам переноса скалярных полей (примесей, солености, температуры) вихревыми дипольными структурами, генерируемыми при формировании и развитии струи из щели. Известно, что крупномасштабные вихревые структуры способны вовлекать в собственное движение часть близлежащей жидкости, формируя так называемое вихревое облако или атмосферу вихря [9, 10]. Большая часть этого облака состоит из инжектируемой жидкости. Такие особенности двумерных вихревых течений хорошо наблюдаются в течениях различного масштаба. В качестве примера можно привести выбросы больших масс загрязнений из гаваней (или узких проливов) во время отливов в мировом океане, вынос обедненного кислородом газа струйным течением во время выдоха животными и человеком, перенос струей химических реагентов клапанными системами в зону реакции [7, 11, 12]. В современной литературе задачу о перемешивании пассивной жидкости в заданном поле скорости часто называют задачей об адвекции [13].

В прикладных задачах, связанных с инжекцией определенной части жидкости из щели, особый интерес исследователей привлекают периодические течения. Часто анализ масштабов задачи позволяет заключить, что вносимая инжектором в течение кинетическая энергия оказывается значительно больше энергии диссипации в реальной жидкости. В таких случаях вязкостными эффектами можно пренебречь и периодические течения жидкости из инжекторов можно рассматривать в приближении идеальной несжимаемой жидкости [7].

Следует отметить, что периодические течения из инжекторов вносят свои особенности в процессы тепло- и массопереноса. Если при истечении жидкости (исток) доминирующими являются струйные течения с соответствующими дипольными вихревыми структурами [1, 14, 15], то при втекании жидкости (сток) в инжектор, как показывают наблюдения и эксперименты, преобладающими становятся потенциальные течения, которые при определенных условиях могут приводить даже к разрушению вихревых структур, оказавшихся в непосредственной близости к отверстию [7, 14].

В настоящее время существует несколько подходов к описанию поля скорости при периодическом инжектировании фиксированного объема жидко-

сти в невозмущенное пространство в приближении идеальной жидкости. Потенциальные течения, возникающие при стоке (или истоке) жидкости из отверстия, хорошо изучены как для щели конечной ширины, так и для точечного источника (см., например, [2, 15]). Иначе обстоит дело с описанием формирования при инжекции струйных течений. В современной литературе можно отметить несколько подходов к описанию поля скорости струйных течений, основанных на истечении жидкости с конечным импульсом из бесконечно тонкой щели в безграничное пространство [2, 3], на генерации струи системой дискретных вихревых структур, параметры которых определяются из условия Кутта-Жуковского на краях отверстия в бесконечной плоскости [2, 16], а также на формировании дипольных вихревых структур, кинематические параметры которых определяются значениями скорости инжекции [3, 7].

К сожалению, первый подход, указанный выше, не нашел должного применения при описании поля скорости в задачах адвекции, поскольку поле скорости, по мере приближения к источнику, имеет особенность и не учитывает геометрию инжектора. Как раз распределение поля скорости около инжектора определяет процесс формирования выброса пассивной примеси и начальную стадию ее движения. Второй подход в задачах адвекции применяется достаточно редко, потому что поле скорости в рассматриваемой задаче о перемешивании пассивной примеси требует представления распределения поля скорости без сингулярностей. Наличие точечных вихрей в системе приводит к интенсивному перемешиванию пассивной примеси в области, близлежащей к точечному вихрю, где наведенное поле скорости стремится к бесконечности. Несмотря на то, что подход, основанный на методе точечных вихрей, сходящихся с кромок инжекторов, приводит к достаточно точным профилям скоростей в области струи при сравнении с экспериментальными данными [14], указанный метод вносит существенные ошибки в поле скорости в областях, прилегающих к системе точечных вихрей. В отношении третьего подхода к решению задачи о перемешивании жидкости периодическими струйными течениями необходимо отметить главный недостаток: объем жидкости, вытекающей из инжектора за время работы истока, и объем жидкости, втекающей в инжектор за время работы стока, при одинаковых кинематических условиях оказываются разными.

Целью настоящей работы является формирование модельного представления поля скорости периодического течения идеальной несжимаемой

жидкости из инжектора фиксированного размера применительно к задаче об адвекции пассивной примеси. За основу модели течения предлагается принять подход, основанный на формировании струей пары крупномасштабных вихревых структур, с учетом объемов вытекающей и втекающей жидкостей из инжектора.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

В настоящей части статьи воспроизведем основные результаты экспериментов, направленных на изучение процесса перемешивания пассивной жидкости при периодическом импульсном и синусоидальном инжестировании части подкрашенной жидкости в невозмущенную среду, которые были детально представлены в работе [7].

Эксперименты проводились в прямоугольном бассейне размерами $1500 \times 1000 \times 300$ мм. Первая часть экспериментальных данных была получена при инжестировании фиксированного объема воды в стратифицированную по плотности воду. Схема экспериментальной установки показана на рис. 1 в двух проекциях (вид сбоку и вид сверху). Для получения стратификации бассейн сначала заполнялся пресной водой, а после того, как движение воды прекращалось, бассейн заполнялся соленой водой с плотностью $\rho = 1074$ кг/м³. В эксперименте часть бассейна была перегородена непроницаемой стенкой, в которой была сформирована вертикальная щель. При проведении эксперимента часть жидкости с промежуточным значением плотности (по отношению к плотностям пресной и соленой воды) периодически инжестировалась поршнем с фиксированной скоростью и продолжительностью. Половину периода поршень выдавливал подкрашенную жидкость, другую половину периода поршень втягивал жидкость из бассейна с той же скоростью. Переключение режимов движения поршня осуществлялось электрической схемой и происходило мгновенно. Инжеструемая жидкость в эксперименте подкрашивалась флюориновой краской с концентрацией порядка $10^{-4} \dots 10^{-8}$ г/л, которая под действием ламп дневного света испускает интенсивное свечение. Движение жидкости записывалось на камеру, размещенную над бассейном, в центральной его части.

Данные измерений были пронормированы на ширину щели W , скорость инжестии U и продолжительность действия инжектора T . Показано, что режимы течения определяются безразмерным параметром W/UT . Для малых значений, $W/UT < 0.13$, течение характеризуется интенсив-

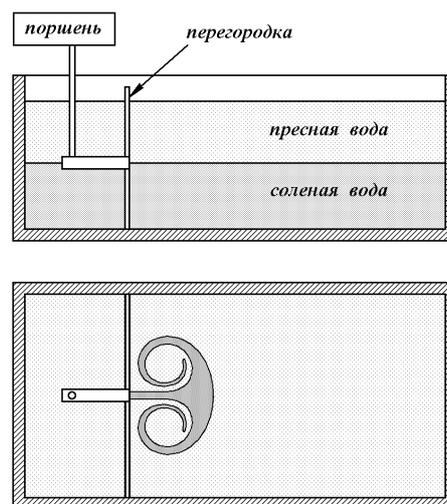


Рис. 1. Схема экспериментальной установки с импульсной инжестией фиксированного объема жидкости в стратифицированную по плотности среду [7]

ной инжестией, которая сопровождается генерацией двухмерной вихревой пары, удаляющейся от инжектора. Если $W/UT > 0.13$, то поле скорости инжектора является преобладающим и за полный период инжектор затягивает образованную в течение первого полупериода вихревую пару.

Пример течения для $W/UT = 0.05$ показан на рис. 2. В течение первого полупериода инжеструемая струя формирует диполь, который состоит преимущественно из окрашенной жидкости. Наличие у диполя самоиндуцированной скорости приводит к поступательному удалению диполя от инжектора. Скорости движения вихревой пары и инжектора совпадают по направлению. В течение второго полупериода поле скорости течения жидкости в инжекторе меняет свой знак (инжектор втягивает жидкость) и поступательная скорость вихревого диполя уменьшается. Второй период инжестии приводит к формированию аналогичного вихревого диполя, который следует в том же направлении за первым. Характерная структура течения, полученная после двух периодов действия инжектора, показана на рис. 2, а. Видно, что первая вихревая пара в течение двух периодов удалилась от инжектора на достаточно большое расстояние по сравнению с собственными размерами, в то время как вторая вихревая структура оказалась почти затянутой в инжектор. Интересно заметить, что первая вихревая пара содержит большей частью подкрашенную жидкость, в то время как вторая вихревая пара сформирована

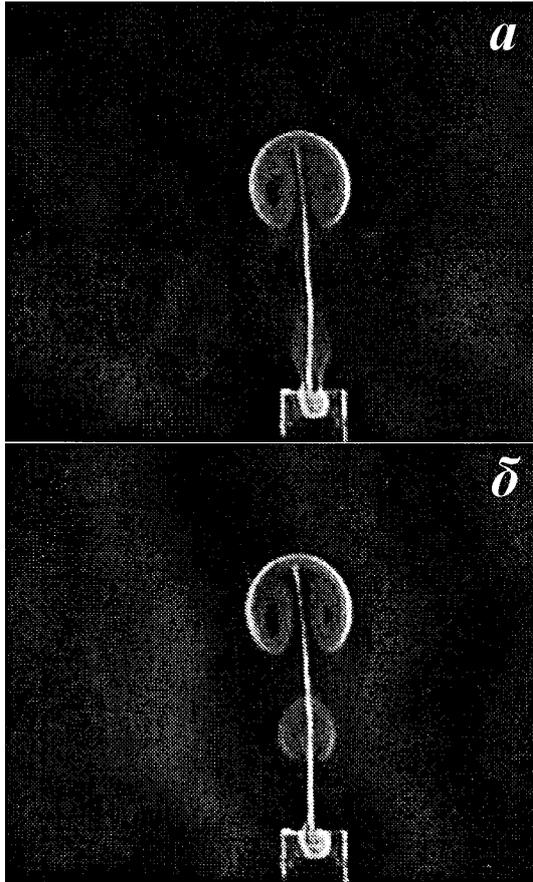


Рис. 2. Визуализация распространяющихся вихревых диполей в эксперименте [7] при $W/UT = 0.05$ после одного периода (а) и двух периодов действия инжектора (б)

в основном из неокрашенной жидкости, (рис. 2, б). В течение следующего периода снова образуется вихревая пара, все вихревые структуры удаляются от инжектора, образуя характерную вихревую цепочку.

Вторая часть экспериментальных исследований проводилась при синусоидальном инжектировании части подкрашенной жидкости в невозмущенное полупространство в приближении мелкой воды. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. В бассейн наливалось незначительное количество воды, формируя слой воды глубиной $\delta h = (1-2)$ мм. Бассейн разделялся перегородкой со щелью, меньшая часть которого подкрашивалась флюориновой краской.

Периодические движения жидкости через щель достигались вертикальными движениями цилиндра в глубоководной части бассейна. Исследования показали, что приближение мелкой воды позволяет успешно моделировать двухмерные дви-

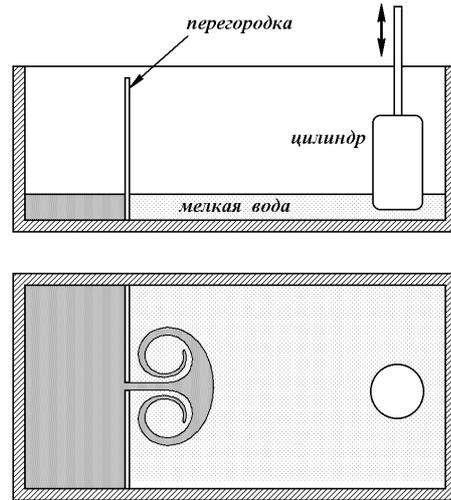


Рис. 3. Схема экспериментальной установки с осциллирующей инжекцией части жидкости в приближении мелкой водой [7]

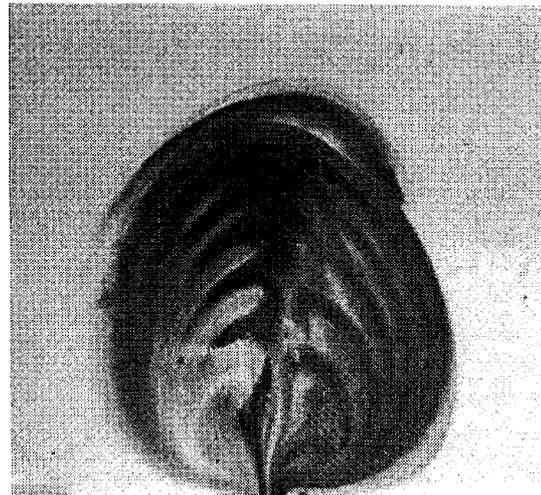


Рис. 4. Визуализация слоевой структуры в эксперименте [7] в приближении мелкой водой при $W/UT = 0.18$ после 5 периодов действия инжектора

жения в диапазоне значений $W/UT > 0.13$, которые соответствуют медленным режимам инжекции. В этом случае образуемая струей вихревая пара затягивается каналом инжектора на втором полупериоде его действия. В результате осциллирующего действия инжектора формируется многослойная структура в непосредственной близости от инжектора. Характерный пример течения для $W/UT = 0.18$, полученный после пяти периодов инжектирования, показан на рис. 4.

Приведенные два случая перемешивания подкрашенной жидкости в экспериментах с импуль-

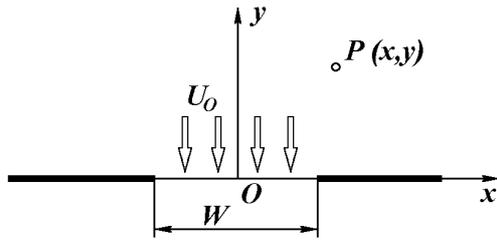


Рис. 5. Геометрия задачи

сней и синусоидальной инъекциями соответствуют достаточно широкому диапазону скоростей инъекции. Другие случаи и подробный анализ процесса перемешивания можно найти в работе [7].

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА

В основу теоретической модели течения положена идея, предложенная в работе [7], в которой периодические течения из инжектора описывались полем скорости, наведенным вихревой парой во время истока жидкости из инжектора, и суперпозицией поля скорости вихревой пары и инжектора во время стока жидкости в инжектор. Несмотря на то, что такой подход удовлетворительно описывает процесс образования струи из инжектора при достаточно больших скоростях инъекции в пределах ламинарного течения жидкости из инжектора, предложенная в работе модель обладает определенными недостатками. Прежде всего, она не принимает во внимание соотношение между объемами жидкостей во время работы истока и стока. Кроме того, течение жидкости в модели удовлетворяет граничным условиям не на всей твердой поверхности. Особенно этот недостаток проявляется в области, прилегающей к инжектору.

В настоящей работе предлагается новая теоретическая модель течения, которая принимает во внимание указанные выше недостатки.

Рассмотрим задачу о двухмерном стационарном течении с полем скорости $[U(x, y), V(x, y)]$ идеальной несжимаемой жидкости в инжекторе шириной W со скоростью U_0 в выходном сечении ($|x| < W/2$, при $y = 0$) в декартовой системе координат, совмещенной с осью инжектора (рис. 5). Пусть T – период действия инжектора. В течение первого полупериода, $0 < t \leq T/2$, инжектор работает как источник, а в течение второго полупериода, $T/2 < t \leq T$, инжектор действует как сток жидкости.

Вне инжектора, на твердой ограничивающей те-

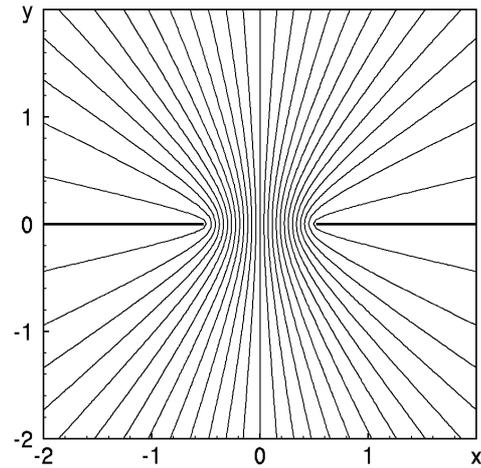


Рис. 6. Распределение функции тока при потенциальном течении жидкости в двухмерном инжекторе

чение поверхности, поле скорости должно удовлетворять условию непроницаемости стенки:

$$V(x, 0) = 0 \quad \text{при } |x| > W/2. \quad (1)$$

Распределение функции тока $\Psi(x, y)$ для потенциального течения жидкости из инжектора в выбранной системе координат и граничных условий (1) записывается в виде [1, 9]

$$\Psi_1(x, y) = \pm \frac{U_0}{2} \left| \left[\left(x - \frac{W}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2} - \left[\left(x + \frac{W}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right|. \quad (2)$$

Здесь и далее верхний знак перед выражением используется для случая вытекания (исток) жидкости, а нижний знак соответствует случаю втекания (сток) жидкости в инжектор. Пример распределения функции тока, заданной уравнением (2), для инжектора шириной $W = 1.0$ при скорости инъекции $U_0 = 1.0$ представлен на рис. 6. Видно, что функция тока обладает симметрией относительно координатных осей. Она имеет постоянное значение на границах, в общем случае $\Psi_1(x, 0) = U_0 W/2$ при $|x| > W/2$. Следовательно, частицы жидкости движутся вдоль ограничивающих поверхностей и их не пересекают. Уравнение (2) удовлетворяет условию (1).

Используя связь между функцией тока и ком-

понентами поля скорости

$$U(x, y) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad V(x, y) = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad (3)$$

находим выражения для проекций поля скорости рассматриваемого течения в точке с координатами (x, y) при $y \geq 0$:

$$U(x, y) = \pm \frac{U_0 y}{2} \left\{ \frac{1}{[(x - W/2)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x + W/2)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}, \quad (4)$$

$$V(x, y) = \mp \frac{U_0}{2} \left\{ \frac{x - W/2}{[(x - W/2)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{x + W/2}{[(x + W/2)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}. \quad (5)$$

Заметим, что скорость течения на выходе инжектора ($|x| < W/2, y = 0$) будет

$$U(x) = 0, \quad V(x) = \pm U_0. \quad (6)$$

Следует указать один из недостатков представления течения жидкости из инжектора в виде (1): на острой кромке ($x = \pm W/2, y = 0$) составляющая скорости V имеет бесконечное значение. Однако, как будет показано ниже, пассивная жидкость в процессе своего движения не достигает острой кромки. Поэтому, выражения (4) и (5) можно применять в дальнейшем для моделирования процесса перемешивания пассивной жидкости периодическими течениями в инжекторе конечной ширины.

В дальнейшем задачу удобно пронормировать на ширину щели W и период инжекции T . В этом случае скорость будет отнесена к величине W/T . Выражения для компонент поля скорости течения жидкости в безразмерном виде можно представить следующим образом:

$$U^*(x, y) = \pm \frac{U_0 y}{2} \left\{ \frac{1}{[(x - 1/2)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x + 1/2)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}, \quad (7)$$

$$V^*(x, y) = \mp \frac{U_0}{2} \left\{ \frac{x - 1/2}{[(x - 1/2)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{x + 1/2}{[(x + 1/2)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}. \quad (8)$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу только в безразмерных параметрах.

Несколько сложнее обстоит дело с формированием вихревых структур при вытеснении жидкости из щели. Оригинальная идея, связанная с

сопоставлением параметров струи и образуемой вихревой пары, была предложена в работе [17] и впоследствии развита в исследованиях [7].

Пусть нижняя часть инжектора ($y < 0$) представляет собой бесконечный канал шириной W , а характерная скорость жидкости на выходе канала имеет значение порядка U_0 (см. уравнение (6)). Предположим, что ширина пограничного слоя на выходе канала имеет порядок δ . Тогда завихренность, которая формируется в непосредственной близости к границам канала, имеет величину порядка U_0/δ . Пусть t – время, в течение которого развивается пограничный слой, $t < 0.5$, тогда площадь пограничного слоя будет иметь порядок $S \approx \delta \cdot (U_0 t)/2$. Следовательно, интенсивность завихренности, которая выносится из выходного сечения инжектора, имеет порядок

$$\Gamma = \int_S \omega dS \approx \frac{U_0}{\delta} \cdot \delta \cdot \frac{U_0 t}{2} = \frac{U_0^2}{2} t. \quad (9)$$

Эта завихренность выносится во внешнее течение с обеих поверхностей канала. Они обладают противоположными по знаку циркуляциями и формируют дипольную вихревую структуру. Интенсивность завихренности вихрей в диполе пропорциональна квадрату скорости инжекции и прямо пропорциональна продолжительности инжекции. Таким образом, завихренность вихревой пары является переменной величиной и меняется во времени в соответствии с выражениями

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \frac{U_0^2}{2} t, & 0 \leq t \leq 0.5, \\ \frac{U_0^2}{4}, & 0.5 < t \leq 1.0. \end{cases} \quad (10)$$

На каждом периоде инжекции формируется новая вихревая пара. Вихревые пары, сформированные на предыдущих периодах инжекции, значения интенсивностей вихрей в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости с течением времени сохраняют.

Функция тока течения системы N точечных вихрей в безграничном пространстве с текущими координатами (x_j, y_j) (здесь $j = 1, \dots, N$) имеет вид [9, 10]

$$\Psi_2(x, y) = \frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{j=1}^N \ln[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2]. \quad (11)$$

Используя выражения (3) находим уравнения движения системы N точечных вихрей в безгра-

ничном пространстве:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (12)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(x_j - x_i)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (13)$$

Здесь и далее штрих при знаке суммы означает, что суммирование проводится для всех значений индекса за исключением $i = j$.

Для выполнения условия равенства объемов инжектируемой жидкости при истечении и затягивании в течение каждого из полупериодов действия инжектора необходимо при формировании течения принять во внимание поле скорости инжектора как в течение первого полупериода (со скоростью инжекции $+U_0$ при $0 \leq t < 0.5$), так и в течение второго полупериода (со скоростью инжекции $-U_0$ при $0.5 < t \leq 1.0$). В то же время, для выполнения граничного условия на твердой поверхности, необходимо ввести в рассматриваемую систему дополнительную мнимую вихревую пару с координатами, отображенными относительно плоскости $y = 0$ [9, 10, 18]. Другими словами, поле функции тока течения, наведенное вихревой парой, должно представлять собой суперпозицию функции тока действительной вихревой пары с текущими координатами $x_1 = -x_2 = x_v$, $y_1 = y_2 = y_v$ и интенсивностями $-\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma(t)$ (см. уравнение (10)) и мнимой вихревой пары с координатами $x_3 = -x_4 = x_v$, $-y_3 = -y_4 = y_v$ и интенсивностями $\Gamma_3 = -\Gamma_4 = \Gamma(t)$, наложенными на поле течения инжектора.

Таким образом, поле функции тока течения представляет собой суперпозицию

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y) \quad (14)$$

для любого момента времени. Знак $\Psi_1(x, y)$ зависит от направления инжекции. Значение $\Psi_2(x, y)$ определяется количеством вихрей в рассматриваемой системе N и зависит от номера N_T периода инжекции, $N = 4N_T$. Причем в процессе инжектирования вихри в образуемой вихревой паре обладают переменными во времени интенсивностями, в то время как остальные вихри значения интенсивностей сохраняют неизменными.

Пример распределения функции тока для скорости инжекции $U_0 = 20.0$ и вихревой пары с координатами $x_v = 1.07$, $y_v = 1.13$ с интенсивностью $\Gamma = 50.0$ показан на рис. 7. Приведенные параметры соответствуют эксперименту, показанному на рис. 2, в момент времени $t = 0.25T$.

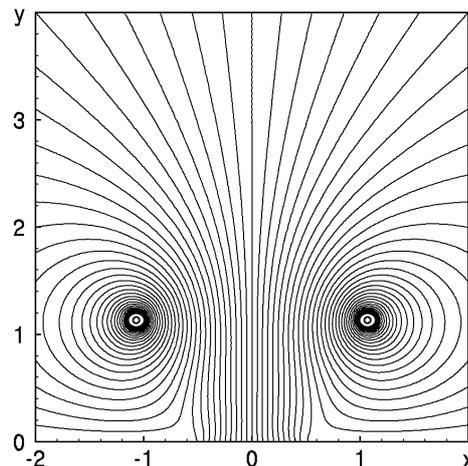


Рис. 7. Распределение функции тока при потенциальном течении жидкости через узкую щель в поле скорости вихревой пары над плоской стенкой

Видно, что распределение функции тока обладает симметрией относительно оси oy . Анализ показывает, что функция $\Psi(x, y)$ на твердой поверхности принимает неизменное значение, следовательно, граничное условие (1) на твердой поверхности выполнено.

Таким образом траектории движения вихревой пары в поле скорости инжектора описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_v}{dt} = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \left[\frac{y_v}{x_v^2 + y_v^2} - \frac{1}{y_v} \right] + U^*(x_v, y_v), \quad (15)$$

$$\frac{dy_v}{dt} = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \left[\frac{1}{x_v} - \frac{y_v}{x_v^2 + y_v^2} \right] + V^*(x_v, y_v) \quad (16)$$

с начальными условиями

$$x_v(0) = x_v^0, \quad y_v(0) = y_v^0. \quad (17)$$

На рис. 8 показаны траектории движения вихря в вихревой паре в течение первого периода инжекции для различных значений скорости инжекции U_0 . В начальный момент вихрь помещен в точку с координатами $x_v = 0.55$ и $y_v = 0.05$. Точками отмечены положения вихря через равные интервалы времени $\Delta t = 0.5$. Следует отметить общую тенденцию в динамике вихревой пары: в течение первого полупериода действия инжектора вихревая пара удаляется от инжектора, при этом расстояние между вихрями постоянно увеличивается. Чем больше скорость инжекции, тем

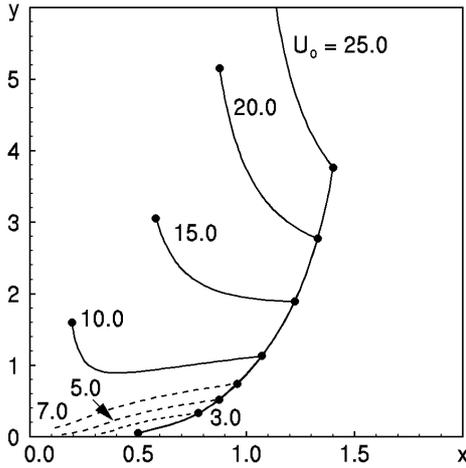


Рис. 8. Траектории вихря в вихревой паре при импульсной инъекции жидкости для различных значений скорости инъекции U_0

больше расстояние между вихрями в вихревой паре. В течение второго полупериода расстояние между вихрями всегда уменьшается. Это приводит к увеличению самоиндуцированной скорости вихревой пары. Однако, если вихри расположены в непосредственной близости к выходному сечению инжектора, поле скорости инжектора затягивает вихревую пару в канал инжектора. На рис. 8 сплошными линиями отмечены траектории вихрей, которые после одного периода действия инжектора удаляются от выходного отверстия, а штриховые линии соответствуют случаям, при которых инжектор затягивает вихри. Исследования показывают, что критическое значение скорости инъекции лежит в диапазоне $U_0 = (7.0 \dots 7.2)$ и хорошо согласуется с результатами исследований в [7].

Теперь рассмотрим случай синусоидального движения жидкости в инжекторе. При этом скорость течения жидкости в безразмерном виде задается выражением

$$U_0(t) = u_0 \sin(2\pi t), \quad (18)$$

где u_0 – амплитуда скорости инъекции.

В этом случае интенсивность вихрей в вихревой паре меняется с течением времени следующим образом:

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2} \int_0^t U_0^2(t) dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{U_0^2}{4} - \frac{\sin 4\pi t}{4\pi}, & 0 \leq t \leq 0.5, \\ \frac{U_0^2}{8}, & 0.5 < t \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Сравнение выражений (19) и (10) позволяет заключить, что при синусоидальном действии инжектора интенсивность завихренности образующейся вихревой пары за полупериод достигает меньшего значения по сравнению со случаем импульсного инжектирования.

Траектории движения вихрей в поле скорости синусоидального инжектора описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (15) и (16) с начальными условиями (17).

Пример траекторий движения вихрей при различных амплитудах скорости u_0 инъекции показаны на рис. 9. Как и ранее, точки соответствуют положениям вихрей через равные интервалы времени $\Delta t = 0.5$. Видно, что при малых скоростях инъекции в образующейся вихревой паре самоиндуцированной скорости вихрей оказывается недостаточно для того, чтобы вырваться из области инъекции (штриховые траектории). При $U_0 < 10.0$ вихри поглощаются инжектором. По мере увеличения скорости инъекции ($U_0 > 10.0$) образующаяся вихревая пара обладает достаточной самоиндуцированной скоростью для того, что покинуть область инъекции. Сравнение рис. 8 и 9 позволяет заключить, что общие тенденции в динамике вихревой пары в обоих случаях являются аналогичными. Различия в динамике вихревых пар носят только количественный характер.

3. АДВЕКЦИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Рассмотрим процесс перемешивания пассивной жидкой области в поле скорости периодически действующего инжектора. Следуя эксперименту [7], выделим внутри инжектора часть жидкости и окружим ее пассивным контуром, состоящим из последовательности жидких частиц, которые в дальнейшем будем именовать маркерами. Задача о деформации отмеченных жидких областей, обычно именуемая в литературе как задача об адвекции [13], сводится к анализу траекторий Лагранжевых частиц жидкости в рассматриваемом Эйлеровом поле скорости.

Следуя теореме Гельмгольца [2, 18], каждая пассивная жидкая частица может трактоваться точечным вихрем нулевой интенсивности. В этом случае траектории движения системы M пассивных маркеров описываются системой дифференциаль-

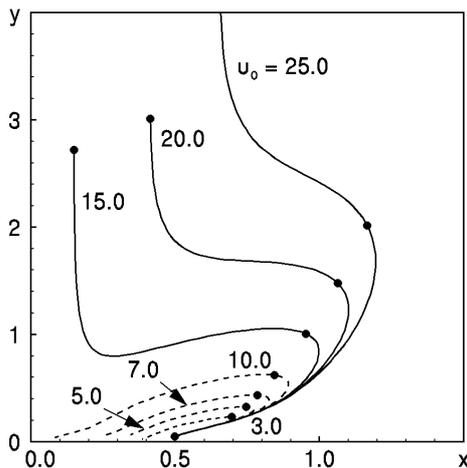


Рис. 9. Траектории вихря в вихревой паре при различных значениях скорости u_0 синусоидальной инъекции жидкости

ных уравнений первого порядка, которая непосредственно следует из уравнений (12):

$$\frac{dX_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(t) (y_i - Y_j)}{(x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2} + U^*(X_j, Y_j), \quad (20)$$

$$\frac{dY_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i(t) (X_j - x_i)}{(x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2} + V^*(X_j, Y_j), \quad (21)$$

(здесь $j = 1, \dots, M$) с соответствующими начальными условиями для каждого маркера в рассматриваемой гидродинамической системе

$$X_j(0) = X_j^0, \quad Y_j(0) = Y_j^0. \quad (22)$$

Система уравнений (20)–(22) совместно с уравнениями движения (15)–(17) будет в дальнейшем использоваться при моделировании процесса перемешивания пассивной примеси в поле скорости импульсного и синусоидального инжекторов.

Часто, при анализе процесса адвекции, траектории жидких частиц проявляют сильную зависимость от своего начального положения. В результате расстояние между двумя ближайшими маркерами сильно увеличивается и наступает интенсивное перемешивание. Для того, чтобы построить выделенную в начальный момент область пассивной жидкости для фиксированных моментов времени, в исследованиях применялся метод кусочной сплайн-интерполяции [19], кото-

рый позволяет сформировать границы замкнутой области, используя упорядоченную последовательность маркеров, находящихся на границе области. Указанный метод анализирует деформацию контура и, при необходимости, позволяет добавлять необходимое количество маркеров для того, чтобы расстояния между соседними маркерами сохранялись в пределах заданной величины.

Рассмотрим сначала адвекцию пассивной примеси в поле скорости импульсного инжектора со скоростью инъекции $U_0 = 20.0$. Этот случай соответствует значению параметра $W/UT = 0.05$ в лабораторном эксперименте [7], результаты которого показаны на рис. 2. Выделим в начальный момент область пассивной жидкости, которая занимает внутреннюю часть инжектора и незначительно выходит в область внешнего течения на расстояние $y_c = 0.05$, как показано на рис. 10,а. Полагаем, что в начальный момент вихри расположены в непосредственной близости от выходного отверстия инжектора, в точке с координатами (0.55, 0.05). На рисунке штриховой линией показаны траектории вихрей, а закрашенными кружочками отмечены положения вихрей в первой вихревой паре через равные интервалы времени $\Delta t = 0.5$.

С началом действия импульсного инжектора вихри в вихревой паре обладают еще малыми по модулю интенсивностями и их движение в основном определяется полем скорости инжектора. С течением времени интенсивность вихрей увеличивается и поле скорости, наведенное вихрями, совместно с полем скорости инжектора формируют струю, направленную вверх. Распределение функции тока для момента времени $t = 0.2$ показано на рис. 7. Положение границ области выделенной пассивной жидкости в этот момент показано на рис. 10,б. Видно, что большая часть жидкости выносится инжектором, однако часть жидкости, которая находится в непосредственной близости к вихрям, начинает закручиваться вокруг вихрей в соответствии со знаком циркуляции точечных вихрей.

К моменту $t = 0.5$ вихри удалились на достаточное расстояние и завершили формирование грибовидного облака из выделенной жидкости, охватывающей оба вихря в вихревой паре (рис. 10,в). На рисунке хорошо заметно сильное закручивание исходного контура, охватывающего выделенную область пассивной жидкости, в непосредственной близости к точечным вихрям. Следует обратить внимание на то, что выходное отверстие инжектора к рассматриваемому моменту времени полностью занято окрашенной жидкостью, и сопутству-

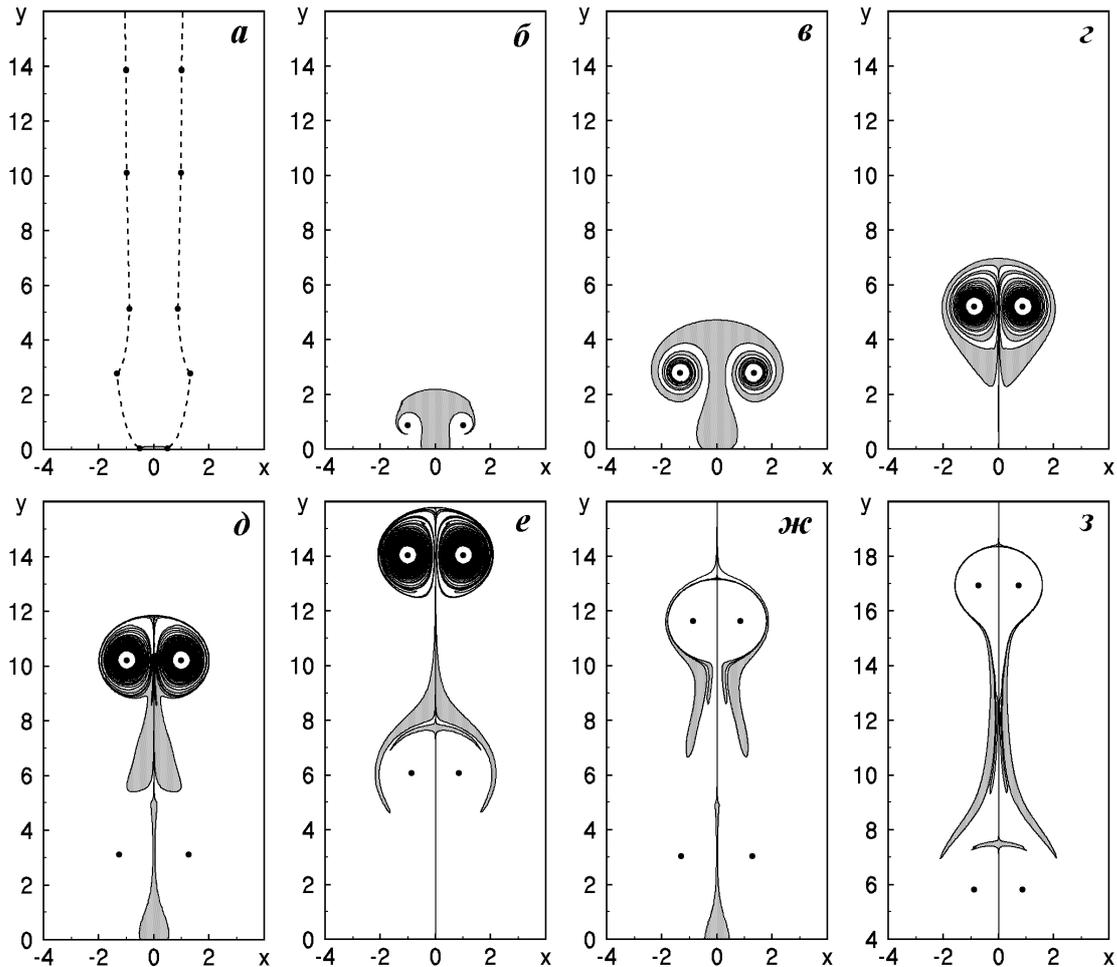


Рис. 10. Адвекция пассивной примеси при интенсивной импульсной инжекции жидкости в моменты: а) $t = 0.0$; б) $t = 0.2$; в) $t = 0.5$; г) $t = 1.0$; д) $t = 1.5$; е) $t = 2.0$; ж) $t = 2.5$; з) $t = 3.0$

ющая первой вихревой паре жидкость большей частью содержит окрашенную жидкость. Следует обратить внимание, что в этот момент вихревая пара практически завершила формирование вихревого облака: эллипсоидальной области пассивной жидкости, которая сопровождается вихрями [3, 10, 18].

Сток жидкости в инжекторе в значительной мере замедлил поступательное движение вихревой пары. Более того, кормовая часть вихревого облака начинает отрываться от вихрей и затягиваться инжектором, формируя характерный хвост в течениях за вихревой парой. Структура течения и положение вихревой пары в момент $t = 1.0$ показаны на рисунке 10, г. Заметим, что в течение второго полупериода действия инжектора в канал поступала неокрашенная жидкость.

В течение следующего полупериода действия

импульсного инжектора начинает формироваться вторая вихревая пара, в то время как первая пара с неизменной интенсивностью продолжает свое поступательное движение. На рис. 10, д показано положение вихрей в момент $t = 1.5$. Поскольку за предыдущий полупериод в инжектор попала неокрашенная жидкость, то вторая вихревая пара формируется практически из неокрашенной жидкости, что хорошо наблюдается в эксперименте. На рис. 2, б видно, что жидкость в вихревом облаке второй вихревой пары окрашена менее ярко по сравнению с жидкостью, сопровождающей первую пару. В течение второго полупериода действия инжектора близлежащая жидкость снова затягивается в инжектор. На рис. 10, е видно, что часть окрашенной жидкости обтекает вторую вихревую пару и устремляется в инжектор.

При действии инжектора на третьем периоде

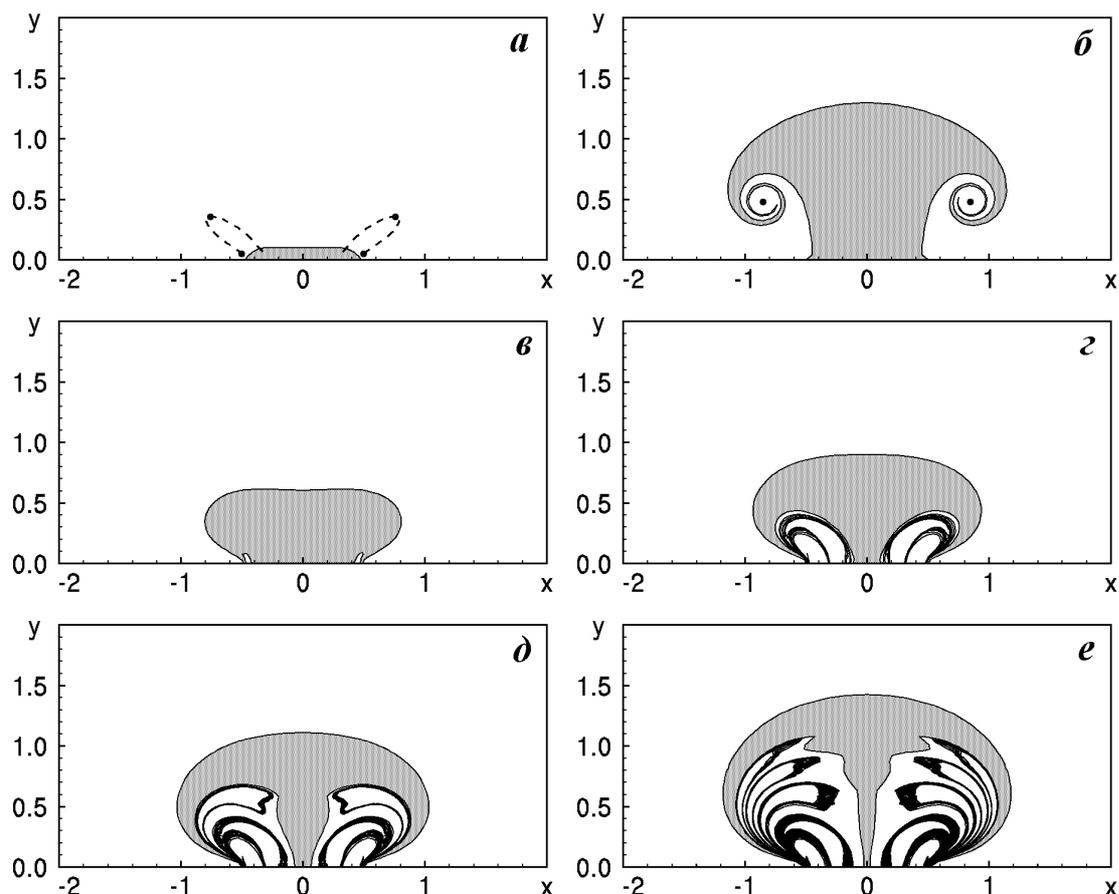


Рис. 11. Адвекция пассивной примеси при слабой синусоидальной инжекции жидкости из щели в моменты: а – $t = 0.0$; б – $t = 0.5$; в – $t = 1.0$; г – $t = 1.5$; д – $t = 2.0$; е – $t = 4.5$

происходит формирование третьей вихревой пары, которая, как и вторая вихревая пара, сформирована практически из неокрашенной жидкости. Структура течения и положение вихрей второй и третьей вихревых пар показаны на рис. 10, *ж*, *з*, которые соответствуют моментам времени $t = 2.5$ и $t = 3.0$ соответственно.

Рассмотрим теперь адвекцию пассивной примеси в поле скорости синусоидального инжектора с амплитудой скорости инжекции $u_0 = 5.6$. Этот случай соответствует значению параметра $W/UT = 0.18$ в лабораторных исследованиях [7], результаты которого представлены на рис. 4. Выделим область пассивной жидкости, которая в начальный момент, как и ранее, занимает внутреннюю область инжектора и незначительно выходит в область внешнего течения. Начальное положение выделенного контура показано на рис. 11, *а*. Полагаем, что в начальный момент вихри расположены в точке с координатами $(0.55, 0.05)$. На ри-

сунке штриховой линией показаны траектории вихрей, а закрашенными кружочками отмечены положения вихрей через равные интервалы времени $\Delta t = 0.5$. В рассматриваемом случае движения вихревая пара за полный период действия инжекции затягивается в канал инжектора. При выполнении расчетов полагаем, что вихри, попавшие внутрь инжектора, $y_0 < 0$, разрушаются и в дальнейших вычислениях участия не принимают.

На начальном этапе процесса перемешивания интенсивность вихрей в вихревой паре оказывается значительно меньше, по сравнению со случаем, рассмотренным ранее. Поэтому движение выделенной области пассивной жидкости в течение первого полупериода действия инжектора определяется полем скорости инжектора. При этом формируется характерная грибовидная область, которая охватывает точечные вихри формирующейся вихревой пары. Характерный момент, соответствующий моменту времени $t = 0.5$, показан на

рис. 11,б. В течение второго полупериода вихревая пара и часть близлежащей к инжектору жидкости вновь попадают в инжектор. Это приводит к тому, что часть подкрашенной жидкости остается перед выходным отверстием инжектора, рис. 11,б.

В течение второго полупериода основная масса пассивной жидкости в поле скорости синусоидального инжектора и образуемой вихревой пары выносятся на несколько большее расстояние по сравнению с выносом жидкости в течение первого полупериода. При этом снова формируется характерная грибовидная структура, которая показана на рис. 11,г для момента $t = 1.5$. В дальнейшем вихревая пара снова попадает в канал инжектора. При этом в нижней части выделенной области образуется многослойная структура, в которой подкрашенная жидкость из инжектора и неокрашенная жидкость из внешнего течения подверглись интенсивному перемешиванию.

В результате, после нескольких периодов действия инжектора в непосредственной близости от инжектора возникает многослойная структура. Характерный случай, соответствующий моменту $t = 4.5$, представлен на рис. 11, е. В центральной части течения процесс перемешивания протекает достаточно медленно и можно заметить тонкую область окрашенной жидкости, соединяющей инжектор с головной частью грибовидной области, которая также имеет место на снимке из лабораторного эксперимента (рис. 4).

ВЫВОДЫ

В настоящих исследованиях предложено модельное представление двухмерного ламинарного периодического течения из инжектора конечной ширины в бесконечной стенке в приближении идеальной несжимаемой жидкости. Рассматриваются два случая инъекции: импульсное и синусоидальное истечение жидкости. Распределение функции тока течения представлено в виде суперпозиции поля функции тока потенциального течения из отверстия конечной ширины и поля функции тока, наведенного со стороны вихревой пары, сформированной на выходе инжектора. Причем во время стока интенсивность вихревой пары является переменной величиной и ее значение определяется количеством завихренности, выносимой каналом из пограничного слоя инжектора при ламинарном течении жидкости. Во время стока жидкости интенсивность вихрей в вихревой паре остается неизменной. В предлагаемой модели предполагается, что вихревая пара, затянута инжектором в канал, ра-

зрушает вихри полностью.

Предложенная в настоящей работе модель течения учитывает соотношение между объемами жидкостей во время стока и истока из инжектора, поскольку, как показывают экспериментальные данные, вклад потенциального течения жидкости из инжектора имеет место в течение всего временного интервала с учетом направления инъекции. Введение в рассмотрение мнимой вихревой пары над плоской стенкой позволило удовлетворить граничные условия на твердых поверхностях, формирующих выходное отверстие инжектора. Однако, надо признать, что введение мнимой вихревой пары не наводит поле скорости в выходном сечении инжектора. Но влияние вихревой пары на течение в инжекторе оказывается незначительным, поскольку в начальный момент источка жидкости вихревая пара обладает малой интенсивностью и ее вклад в общее поле скорости инжектора. Когда вихревая пара заканчивает накопление своей интенсивности, она оказывается вынесенной течением инжектора на достаточно большое расстояние от инжектора и влияние вихря на профиль скорости инжектора становится незначительным. Для малых скоростей инъекции вихревая пара остается в области, прилегающей к инжектору, однако вклад ее в поле скорости течения остается малым по сравнению с полем скорости инжектора.

Предложенное модельное представление периодического течения жидкости из инжектора было протестировано на задаче об адвекции пассивной примеси в поле скорости импульсного и синусоидального инжектирования фиксированного объема жидкости в невозмущенное полупространство, ограниченное плоской стенкой. Сравнение результатов численного моделирования с результатами экспериментальных исследований [7] свидетельствует о хорошей адекватности модели реальному течению. Исследования показали, что при скорости инъекции $U_{0,кр} > (7.0 - 7.2)$ для импульсной инъекции и $U_{0,кр} > (10.2 - 10.5)$ для синусоидальной инъекции, струя жидкости из инжектора формирует вихревую дипольную структуру, которая удаляется от выходного отверстия инжектора. Для скоростей, меньших $U_{0,кр}$, сформированные вихри имеют малую интенсивность и инжектор в течение каждого второго полупериода затягивает вихревую диполь в канал инжектора. Полученные значения критических скоростей находятся в хорошем соответствии с результатами экспериментальных исследований.

Авторы выражают благодарность М. Вэлдсу [7] за предоставленные экспериментальные данные.

Работа выполнена в рамках бюджетной темы 1.10.1.6С7 Института гидромеханики НАН Украины и в рамках проекта INTAS 04-80-7297 “Vortex dynamics”.

1. Биркгоф Г. Гидродинамика.– М.: ИЛ, 1963.– 245 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.
4. Brancher P., Chomaz J.M., Huerre P. Direct numerical simulations of round jets: Vortex induction and side jets // Phys. Fluids.– 1994.– **A6**, N.4.– P. 1768–1774.
5. Dahm W.J.A., Frieler C.E., Tryggvason G. Vortex structure and dynamics in the near field of a coaxial jet // J. Fluid Mech.– 1992.– **241**.– P. 371–402.
6. Rhines P.B. Jets // Chaos.– 1994.– **4**,N.2.– P. 313–339.
7. Wells M.G., van Heijst G.J.F. A model of tidal flushing of an estuary by dipole formation // Dyn. Atmos. and Oceans.– 2003.– **37**.– P. 223–244.
8. Гилл А. Динамика атмосферы и океана (в 2-х томах).– М.: Мир, 1986.– 397 с.
9. Ламб Г. Гидродинамика.– М.–Л.: Гостехиздат, 1947.– 928 с.
10. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наукова думка, 1993.– 279 с.
11. Beerens S.P. Mixing by chaotic advection in tidal areas.– Utrecht: Thesis: Utrecht Univ. Press, 1995.– 162 p.
12. Fujiwara T., Nakata K., Nakatsuji K. Tidal-jet and vortex pair driving of the residual circulation in a tidal estuary // Cont. Shelf Res.– 1994.– **14**.– P. 1025–1038.
13. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Phil. Trans. R. Soc. London.– 1990.– **333**.– P. 273–288.
14. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа.– М.: Мир, 1982.– 114 с.
15. Биркгоф Г., Сарантанелло Э. Струи, следы и каверны.– М.: Мир, 1964.– 466 с.
16. Голубев В.В. Теория крыла аэроплана конечного размаха.– М.: Гос.науч.-тех.издат, 1931.– 350 с.
17. Дюренд В.Ф. Аэродинамика.– М.: ГИОП, 1936.– 408 с.
18. Вилля Г. Теория вихрей.– М.–Л.: Гостехиздат, 1936.– 266 с.
19. Гуржий О. А., Мелешко В. В., ван Хейст Г. Я. Ф. Метод кусковой сплайн-інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доп. АН України.– 1996.– N.8.– С. 48–54.