

Теоретико-експериментальні дослідження згину тришарових брусів

О. В. Горик^а, В. Г. Піскунов^б, В. М. Чередніков^а

^а Полтавський державний технічний університет ім. Ю. Кондратюка, Полтава, Україна

^б Український транспортний університет, Київ, Україна

Наведено результати теоретико-експериментальних досліджень задач згину композитних неоднорідних брусів тришарової структури. Порівнянню результатів теоретичних розрахунків з експериментальними даними підлягали основні співвідношення напружено-деформованого стану за класичною та уточненою некласичною теоріями згину композитних брусів. Некласичну теорію побудовано на гіпотезі, яка враховує викривлення (депланцію) перерізів внаслідок деформацій поперечного зсуву. Для дослідження використано результати експериментального вивчення згину тришарових зразків.

Вступ. Задачі згину в теорії розрахунку елементів споруд, особливо у класичній теорії, достатньо обґрунтовані теоретично й експериментально. Однак більшої уваги потребують питання визначення меж і випадків використання тих чи інших вихідних гіпотез, аналізу необхідності врахування особливостей напружено-деформованого стану (НДС) брусів, які здебільшого стосуються елементів композитної будови. Для таких розрахунків створено некласичні теорії, які дають можливість урахувувати депланцію поперечних перерізів, обтиснення зовнішнім навантаженням, а також визначати збурення напружень у зонах закріплення елементів і прикладання зовнішніх зосереджених зусиль та ін.

Значні дослідження в цьому аспекті виконано для шаруватих систем (плит, оболонок) [1–11], у яких неоднорідність виявляється в напрямку однієї з координатних осей. Менше є результатів досліджень композитних брусів, неоднорідність яких виявляється в різних напрямках залежно від форми перерізу, структури неоднорідної будови [12–14].

Незважаючи на велику кількість теоретичних досліджень задач згину неоднорідних елементів, що широко використовуються в машинобудуванні і будівельній техніці, експериментальні дані, які могли б бути використані для оцінки різних методів розрахунку, в наукових джерелах зустрічаються досить рідко.

Наведемо теоретичні основи задачі згину композитних брусів і виконаємо порівняльний аналіз результатів розрахунку з експериментальними дослідженнями тришарових балок, що описані в [1, 2].

Теоретичні основи дослідження. У класичній моделі теорії згину брусів, у тому числі й композитних, в основу розрахунку покладено гіпотезу плоских перерізів. Усі параметри НДС визначаються залежно від однієї шуканої функції прогину $w_{кл}(x) = w_0$, яка при навантаженні $q = q(x)$ задовольняє диференціальне рівняння рівноваги:

$$D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} = q. \quad (1)$$

При цьому координата x відраховується вздовж осі X , перпендикулярної до поперечного перерізу бруса.

Деформації й відповідні напруження визначались за умови дії зовнішнього навантаження у головній площині жорсткості так:

поздовжні деформації й нормальні напруження –

$$\varepsilon_{0x}^{(k)} = -\frac{d^2 w_0}{dx^2} z; \quad \sigma_{0x}^{(k)} = -\frac{d^2 w_0}{dx^2} E^{(k)} z; \quad (2)$$

кутові зсувні деформації та дотичні напруження –

$$\gamma_{0xz}^{(k)} = \frac{d^3 w_0}{dx^3} \frac{f_0(z)}{G_{xz}^{(k)}}; \quad \tau_{0xz}^{(k)} = \frac{d^3 w_0}{dx^3} f_0(z). \quad (3)$$

Тут k – порядковий номер фази композита.

Функція розподілення зсувних деформацій по висоті перерізу вздовж вертикальної осі Z – $f_0(z)$, яка має відому квадратичну форму, визначається наступним чином:

$$f_0(z) = \int_{z_{3н}}^z E^{(k)} z dz. \quad (4)$$

Тут і далі $z_{3н}$ і $z_{3в}$ – координати горизонтальних площин, дотичних до тіла бруса відповідно знизу й зверху, а $y_{3л}$ та $y_{3п}$ – координати вертикальних відповідно зліва і справа.

Для побудови неklasичної уточненої моделі згину вираз (3), що визначає деформації зсуву,

$$\gamma_{0xz}^{(k)} = \frac{d^3 w_0}{dx^3} \frac{f_0(z)}{G_{xz}^{(k)}} \Rightarrow \frac{d\chi}{dx} \frac{f_0(z)}{G_{xz}^{(k)}}, \quad (5)$$

приймаємо за гіпотезу, яка в першому наближенні дає змогу враховувати зсувну депланацію поперечних перерізів. Задача згину в цьому випадку зводиться до розв'язку системи диференціальних рівнянь відносно двох функцій – функції прогину $w(x) = w_1$ й функції зсуву $\chi(x) = \chi_1$ [10, 12]:

$$\begin{cases} D_{11} \frac{d^4 w_1}{dx^4} + D_{12} \frac{d^4 \chi_1}{dx^4} = q; \\ D_{21} \frac{d^4 w_1}{dx^4} + D_{22} \frac{d^4 \chi_1}{dx^4} - D_{23} \frac{d^2 \chi_1}{dx^2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Вплив властивостей матеріалу окремих фаз і матриці композита враховується “інтегрально” узагальненими характеристиками жорсткості – коефіцієнтами D_{ij} . Ці коефіцієнти також містять інформацію про форму перерізу та розташування окремих фаз і визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} D_{11} &= B_{22} - \frac{B_{21}B_{12}}{B_{11}}; & D_{12} &= B_{23} - \frac{B_{21}B_{13}}{B_{11}}; \\ D_{21} &= B_{32} - \frac{B_{21}B_{31}}{B_{11}}; & D_{22} &= B_{33} - \frac{B_{13}B_{31}}{B_{11}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Доведено [10, 12], що для шаруватих брусів, у яких Z – вісь симетрії перерізу та постійні для кожного шару по товщині значення модуля зсуву $G_{xz}^{(k)}$ і ширина $b^{(k)}$, що відповідає умовам експерименту [1, 2], виконується співвідношення

$$D_{23} = \int_{y_{3л}}^{y_{3п}} \int_{z_{3н}}^z f_0(z) \frac{f_0(z)}{G_{xz}^{(k)}} dz dy = \int_{z_{3н}}^{z_{3п}} b^{(k)} \frac{f_0^2(z)}{G_{xz}^{(k)}} dz = D_{12}. \quad (8)$$

Прийнявши до уваги рівність коефіцієнтів $B_{12} = B_{21}$, $B_{13} = B_{31}$, $B_{23} = B_{32}$, зведені характеристики жорсткості при згині D_{11} , згині зі зсувом D_{12} та зсуві D_{22} будуть визначені так:

$$D_{11} = B_{22} - \frac{B_{12}^2}{B_{11}}; \quad D_{12} = D_{21} = D_{23} = B_{23} - \frac{B_{12}B_{13}}{B_{11}}; \quad D_{22} = B_{33} - \frac{B_{13}^2}{B_{11}}. \quad (9)$$

Інтегральні коефіцієнти B_{ij} , що входять до формул (7) і (9), визначаються виразом

$$B_{ij} = \int_{y_{3л}}^{y_{3п}} \int_{z_{3н}}^{z_{3п}} E^{(k)} z^{\delta_{i2} + \delta_{2j}} [\psi_1^{(k)}(z)]^{\delta_{i3} + \delta_{3j}} dz dy, \quad (10)$$

де i – номер рядка; j – номер стовпця матриці коефіцієнтів;

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad \text{– символ Кронекера.}$$

У рівнянні (10) маємо функцію розподілу переміщень по висоті перерізу:

$$\psi_1^{(k)}(z) = - \int_0^z \frac{f_0(z)}{G_{xz}^{(k)}} dz. \quad (11)$$

Після відокремлення шуканих функцій прогину та зсуву залежністю

$$w_1 = w_0 - \frac{D_{12}}{D_{11}} \chi_1 \quad (12)$$

змішана неklasична задача поперечного згину (6) зводиться до двох окремих – класичної задачі згину (1) і задачі зсуву, яка описується в [13] диференціальним рівнянням:

$$\frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{D_{12}} \frac{d^4 \chi_1}{dx^4} - D_{11} \frac{d^2 \chi_1}{dx^2} = -q. \quad (13)$$

Параметри напружено-деформованого стану бруса за неklasичною моделлю згину визначались наступними співвідношеннями.

Поздовжні переміщення –

$$u_1^{(k)} = u_1 - \frac{dw_1}{dx} z - \frac{d\chi_1}{dx} \psi_1^{(k)}(z). \quad (14)$$

Тут $u_1 = u_1(x)$ – функція інтегрування, яка є поздовжнім переміщенням при $z = 0$, тобто на рівні осі X ; переміщення $u_1^{(k)} = u_1^{(k)}(x, z)$ належить до фази k .

Поздовжні деформації –

$$\varepsilon_{1x}^{(k)} = \frac{du_1}{dx} - \frac{d^2 w_1}{dx^2} z - \frac{d^2 \chi_1}{dx^2} \psi_1^{(k)}(z). \quad (15)$$

Відповідні нормальні напруження –

$$\sigma_{1x}^{(k)} = \varepsilon_{1x}^{(k)} E^{(k)}. \quad (16)$$

Деформації зсуву –

$$\gamma_{1xz}^{(k)} = \frac{1}{G_{xz}^{(k)}} \left[\frac{d^3 w_1}{dx^3} f_0(z) + \frac{d^3 \chi_1}{dx^3} f_1(z) \right]. \quad (17)$$

Відповідні дотичні напруження –

$$\tau_{1xz}^{(k)} = \frac{d^3 w_1}{dx^3} f_0(z) + \frac{d^3 \chi_1}{dx^3} f_1(z). \quad (18)$$

У (17), (18) маємо дві функції розподілу кутових зсувних деформацій (дотичних напружень): $f_0(z)$, $f_1(z)$ – відповідно до згину та зсуву.

Якщо початок системи координат збігається з центром жорсткості C , то $f_0(z)$ визначається за формулою (4), а $f_1(z)$ так:

$$f_1(z) = \int_{z_{\text{зп}}}^z E^{(k)} \psi_1^{(k)}(z) dz - \frac{B_{13}}{B_{11}} \int_{z_{\text{зп}}}^z E^{(k)} dz. \quad (19)$$

Для окремого випадку бруса прямокутного перерізу з трансверсально-ізотропного композитного матеріалу формула (18) спрощується і залишається тільки перший інтеграл.

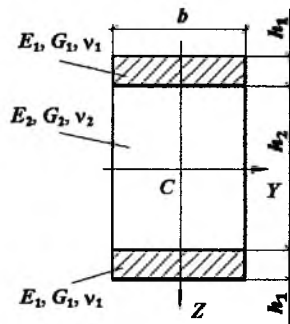


Рис. 1. Переріз зразка.

Порівняння розрахунку з експериментом. Для апробації наведених співвідношень НДС неklasичної моделі розрахунку композитних брусів було виконано порівняльний аналіз теоретичних даних з експериментальними [1]. Досліджувалися тришарові довгі зразки (балки) із симетричною за висотою структурою (рис. 1), створеною з листів алюмінієво-магнієвого сплаву (h_1) і заповнювача з пінополістиролу (h_2). Геометричні параметри та фізико-механічні властивості мате-

ріалу окремих шарів досліджуваних зразків наведено в табл. 1, а зведені характеристики жорсткості D_{ij} перерізів зразків, отримані згідно з (9), – в табл. 2.

Т а б л и ц я 1

Параметри матеріалу шарів досліджуваних зразків

№ зразка	a , мм	h_1 , мм	h_2 , мм	E_1 , МПа	E_2 , МПа	G_1 , МПа	G_2 , МПа	ν_1	ν_2
1	19,9	0,45	10,10	$7 \cdot 10^4$	127	$2,69 \cdot 10^4$	49,6	0,30	0,28
2	19,8	0,45	10,10	$7 \cdot 10^4$	254	$2,69 \cdot 10^4$	99,2	0,30	0,28
3	19,7	0,45	10,25	$7 \cdot 10^4$	256	$2,69 \cdot 10^4$	100,0	0,30	0,28
4	19,9	0,45	10,10	$7 \cdot 10^4$	179	$2,69 \cdot 10^4$	68,9	0,30	0,30
5	19,7	0,45	10,10	$7 \cdot 10^4$	197	$2,69 \cdot 10^4$	75,8	0,30	0,30

Т а б л и ц я 2

Характеристики жорсткості перерізів зразків

№ зразка	D_{11} , Н·м ²	D_{12} , Н·м ⁴	D_{22} , Н·м ⁶
1	35,12313	0,11342	$3,66474 \cdot 10^{-4}$
2	35,16253	0,05716	$9,29744 \cdot 10^{-5}$
3	36,54787	0,06014	$9,90139 \cdot 10^{-5}$
4	35,21198	0,08214	$1,91740 \cdot 10^{-4}$
5	34,88853	0,07403	$1,57164 \cdot 10^{-4}$

Зразки навантажувались зосередженою силою F , прикладеною посередині прольоту, та рівномірно розподіленим навантаженням q . У першому випадку крайові умови відповідали шарнірному закріпленню кінців, у другому – шарнірному й жорсткому.

Результати теоретико-експериментальних досліджень зведено в табл. 3 і 4.

Т а б л и ц я 3

Дані для зразків, навантажених силою F

№ зразка	Прольот l , мм	F , Н	Прогин w (мм) при $x = l/2$			Напруження σ_x (МПа) при $x = (l/2 - 50)$ мм		
			w_0	w_1	$w_{\text{експ}}$	σ_{0x}	σ_{1x}	$\sigma_{\text{експ}}$
Шарнірне закріплення кінців зразка								
1	300	75	1,201	1,714	1,71	41,1	41,1	39,5
2	300	75	1,200	1,458	1,44	41,0	41,0	38,0
3	300	75	1,154	1,406	1,42	40,2	40,2	39,0
1	200	75	0,356	0,697	0,70	20,6	20,6	19,5
2	200	75	0,355	0,527	0,55	20,5	20,5	19,0
3	200	75	0,342	0,509	0,54	20,1	20,1	19,0

Т а б л и ц я 4

Дані для зразків під рівномірним навантаженням q

№ зразка	Прольот l , мм	q , Н/м	Прогин w (мм) при $x = l/2$			Напруження σ_x (МПа) при $x = l/2$ мм		
			w_0	w_1	$w_{\text{експ}}$	σ_{0x}	σ_{1x}	$\sigma_{\text{експ}}$
Шарнірне закріплення кінців зразка								
1	300	497,5	1,494	2,008	1,99	61,2	61,7	63,5
4	300	497,5	1,490	1,861	1,88	61,3	62,1	61,0
5	300	492,5	1,489	1,826	1,78	61,1	61,6	61,0
Жорстке закріплення кінців зразка								
1	300	597	0,359	0,966	1,15	24,5	25,4	31,2
4	300	597	0,358	0,796	0,98	24,5	25,1	29,0
5	300	591	0,357	0,756	0,98	24,4	25,0	32,0

Експериментальні зразки мали досить велике відношення l/h , рівне 27 та 18 (при прольотах $l = 300$ і 200 мм). У зв'язку з цим уточнена неklasична модель σ_{1x} дає ті ж результати нормальних напружень, що й класична σ_{0x} , а їх розбіжність з експериментом $\sigma_{\text{експ}}$ не перевищує 8% для шарнірно закріплених зразків під дією сили F (табл. 3) і практичний збіг під дією навантаження q (табл. 4). Незначну розбіжність між величинами σ_{0x} і σ_{1x} відзначено для зразків, жорстко закріплених на кінцях. У цьому випадку одноразово збільшилась розбіжність теоретичних напружень з експериментальними даними (до 13...23%), меншою мірою – результатів розрахунку за уточненою моделлю. Факт збільшення розбіжності між теоретичними й експериментальними даними можна пояснити певною невідповідністю виконання в експерименті крайових умов жорсткого закріплення, на що звертає увагу й автор дослідження [1].

Додаткові розрахунки достатньо коротких брусів ($l/h \leq 10$) свідчать про неспроможність класичної теорії коректно оцінити напружений стан при згині і підтверджують необхідність впровадження уточнених моделей. Так, для шарнірно закріплених балок експериментальної структури (рис. 1) із відношенням $l/h = 10$ розбіжність між σ_{0x} і σ_{1x} становить вже 10%, а при $l/h = 5$ – 34%.

Розглянемо деформований стан брусів – прогини. Відомо, що в однорідних брусах поперечні зсуви починають суттєво впливати на прогини при $l/h < 10$. Наприклад, для балок на двох шарнірних опорах, що знаходяться під дією рівномірно розподіленого навантаження q , розв'язок системи (6) при врахуванні наближеної залежності

$$\left[\begin{array}{c} D_{12} \\ D_{11} \end{array} = (1 + \nu) \frac{h^2}{5} \right] \approx \left[\begin{array}{c} D_{22} \\ D_{12} \end{array} = (1 + \nu) \frac{17h^2}{84} \right]$$

дає такий результат:

$$w_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{D_{11}} \left(\frac{5}{384} l^4 + \frac{D_{12}}{D_{11}} \frac{l^2}{8} \right).$$

Якщо $\nu = 0,3$, то маємо $\frac{D_{12}}{D_{11}} = (1 + \nu) \frac{h^2}{5} = 0,26h^2$. Тоді

$$w_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{D_{11}} \left(\frac{5}{384} l^4 + \frac{0,26h^2 l^4}{8l^2} \right) \approx \frac{5}{384} \frac{ql^4}{D_{11}} \left[1 + 2,5 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right] = w_0 K.$$

При $l/h = 10$ коефіцієнт $K = 1 + 2,5(0,1)^2 = 1,025$, а при $l/h = 5$ значення $K = 1,1$.

Значний вплив зсуву на деформований стан спостерігається у брусах неоднорідної структури. Так, незважаючи на достатньо велике значення відношень $l/h = 27$ в експериментальних зразках із прольотом 300 мм, розбіжність між класичною моделлю й експериментом (табл. 3) складає 30% у випадку, коли модуль пружності середнього шару дорівнює 127 МПа (зразок № 1), та в середньому 18% при $E_2 = (254; 256)$ МПа (зразки № 2 і 3). В балках довжиною 200 мм (при зменшенні l/h до 18) розбіжність збільшилась до 49 і 36% відповідно, при цьому ріст розбіжності при зменшенні прольоту більш вагомий для зразка № 2 (табл. 3) з меншими узагальненими характеристиками жорсткості. Звернемо увагу, що випробування зразка № 1 різними навантаженнями (табл. 4) показало похибку класичної теорії однакового порядку (у межах точності експерименту) – 30% під зосередженою силою і 25% від дії розподіленого навантаження (при шарнірному закріпленні кінців зразка).

Треба відмітити, що жорсткість при згині D_{11} залишається величиною одного порядку ($\sim 35 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$) для всіх п'яти зразків, що підтверджує неспроможність класичної теорії врахувати фізико-механічні властивості окремих шарів матеріалу. В той же час у неklasичній теорії зсувна характеристика D_{22} та характеристика взаємодії згину й зсуву D_{12} чутливо реагують на зміну властивостей матеріалу шарів, що наочно відображається й на теоретичних результатах (табл. 3, 4).

Вплив крайових умов суттєво виявляється при порівняльному аналізі результатів для зразків із жорстким і шарнірним закріпленням кінців. Оскільки в експерименті не вдалося повністю змоделювати крайові умови жорсткого закріплення, маємо розбіжність між w_0 і $w_{\text{експ}}$ (табл. 4) в середньому до 65%. У той же час у шарнірно закріплених зразках, для яких крайові умови моделюються більш точно, ця розбіжність доходить тільки до 20%. Застосування уточненої методики зменшує розбіжність для жорстко закріплених зразків у середньому до 20%, а для шарнірно закріплених – до 3%, тобто до практичної збіжності теоретичних і експериментальних результатів (w_1 і $w_{\text{експ}}$).

Таким чином, ефективність уточненої неklasичної моделі не викликає сумнівів (особливо при визначенні деформованого стану композитних брусів, а також тензора напружень) у випадках неспроможності класичної теорії (короткі бруси, крайові ефекти).

Було використано також експериментальні дані [2] випробовування прямолінійного стержня довжиною $l=0,488$ м прямокутного перерізу симетричної тришарової будови (рис. 2): $E_1=1,98\cdot 10^5$ МПа, $G_1=7,62\cdot 10^4$ МПа, $\nu_1=0,3$; $E_2=3,87\cdot 10^3$ МПа, $G_2=1,43\cdot 10^3$ МПа, $\nu_2=0,35$. Характеристики жорсткості мають такі округлені значення: $D_{11}=1,602\cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$, $D_{12}=312,1 \text{ Н}\cdot\text{м}^4$, $D_{22}=6,274 \text{ Н}\cdot\text{м}^6$.

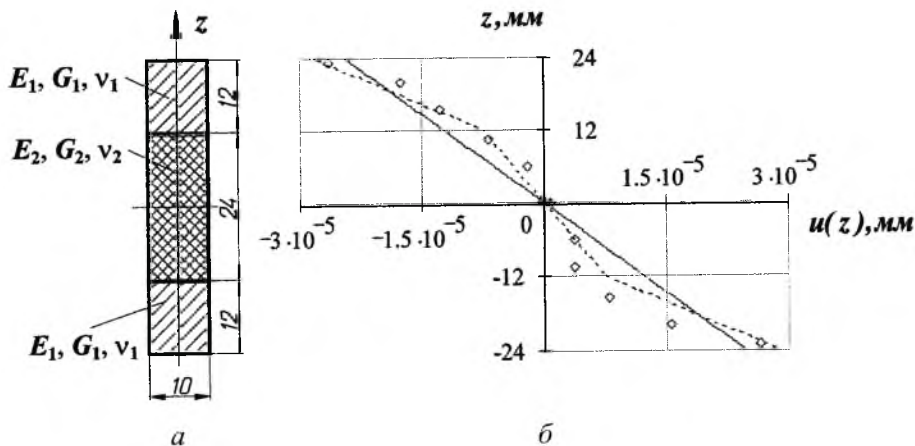


Рис. 2. Переріз зразка – а та розподіл тангенціальних переміщень по висоті перерізу (суцільна лінія – класична модель, штрихова – неklasична модель, точки – результати експерименту) – б.

В експерименті при дії рівномірно розподіленого навантаження $q = 4905$ Н/м замірялись прогини, нормальні напруження й, що найважливіше, досліджувались тангенціальні переміщення $u(z)$. Оскільки в [2] не подаються числові теоретичні та експериментальні значення дослідних параметрів, а тільки графічні, то порівняння проводилось також у графічній формі. Ці порівняння дають можливість зробити висновки на користь впровадження уточнених моделей для розрахунку композитних брусів.

В результаті експерименту з похибкою не більше ніж 20% автор [2] встановив нелінійний закон розподілення по висоті перерізу тангенціальних переміщень $u(z)$ в перерізі $x = l/4$, що підтверджується й даними розрахунку за розробленою неklasичною методикою при достатній відповідності до експериментальних значень. При цьому, якщо в [2] максимальні розрахункові значення $u_{\max}(h/2)$ збігалися з даними за класичною моделлю й водночас були на 11% меншими, ніж експериментальні, то за нашими розрахунками $u_{\max}(h/2)$ практично відповідає результатам експерименту.

Висновки. Викладено основні співвідношення неklasичної моделі НДС композитних брусів неоднорідної будови. Порівняльний аналіз їх із результатами, хоча і нечисленних експериментів, підтверджує ефективність застосування одержаних співвідношень для розрахунку брусів неоднорідної будови і неспроможність у більшості випадків класичної теорії, створеної на основі гіпотези плоских перерізів. Деформативні характеристики неklasичної моделі дають змогу враховувати різноманітні фізико-механічні властивості довільної структури поперечного перерізу.

Достовірність результатів забезпечена також тестуванням методики: збігом максимальних значень напружень і прогинів, визначених на основі розробленої уточненої моделі і числовим розв'язком безпосередньо рівнянь теорії пружності незалежним методом граничних елементів, який тут не наводиться.

Резюме

Приведены результаты теоретико-экспериментальных исследований задач изгиба неоднородных композитных брусьев трехслойной структуры. Сравнению результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными подлежали основные соотношения напряженно-деформированного состояния по классической и уточненной неклассической теориям изгиба композитных брусьев. Неклассическая теория построена на основе гипотезы, которая учитывает искривление (депланацию) сечений вследствие деформаций поперечного сдвига. Для исследования использованы результаты экспериментального изучения изгиба трехслойных образцов.

1. Королев В. И. Упругопластические деформации оболочек. – М.: Машиностроение, 1971. – 302 с.
2. Остерник Э. С. Экспериментальное исследование деформации нормали и способа осуществления краевых условий у слоистых пластин // Теория пластин и оболочек. – М.: Наука, 1973. – С. 735 – 739.

3. Григолоук Э. И., Селезов И. Т. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. – Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел / ВИНТИ; Т. 5. – М.: Наука, 1972. – 271 с.
4. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1972. – 446 с.
5. Баженов В. А., Сахаров А. С., Гондляр А. В., Мельников С. Л. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек. – Киев: НДІ Будівельна механіка, 1994. – 264 с.
6. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
7. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
9. Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Ванин Г. А. и др. Механика композиционных материалов и элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1983. – 464 с.
10. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – Киев: Будівельник, 1986. – 176 с.
11. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет многослойных ортотропных оболочек и пластин. – Киев: Вища шк. 1987. – 200 с.
12. Піскунов В. Г., Сіпетов В. С., Шевченко В. Д., Федоренко Ю. М. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: Підручник / Під ред. В. Г. Піскунова. У 2 ч., 5 кн. – Ч. 1, кн. 2. Опір бруса. – Київ: Вища шк., 1995. – 384 с.
13. Горик О. В. Аналіз крайових умов при розв'язуванні задач згину композитних брусів із урахуванням деформацій поперечного зсуву // Пробл. машиностроения. – 1998. – № 3. – С. 74 – 80.
14. Піскунов В. Г., Горик О. В. Диференціальні рівняння неklasичної теорії згину композитних брусів // Галузеве машинобудування, будівництво. – 1998. – Вип. 2. – С. 68 – 74.

Поступила 17. 05. 99