

# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 620.178;620.179

## К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях

В. В. Матвеев, А. П. Бовсуновский

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

*Рассматриваются свободные колебания упругого консольного стержня с краевой трещиной, которая моделируется участком стержня с уменьшенным моментом инерции сечения. Масса этого участка полагается неизменной, а его размеры определяются исходя из энергетического критерия эквивалентности.*

*Представлен аналитический подход к определению собственных частот и форм колебаний стержня с открытой или закрывающейся трещиной, а также к исследованию нелинейных искажений волны перемещения, ускорения и деформации различных сечений стержня с закрывающейся трещиной. В решении учитывается возможность возникновения нескольких форм колебаний стержня в момент раскрытия трещины и ее влияние на распределение деформации по объему стержня.*

*Показано, что предложенный подход позволяет получать достоверные зависимости различных вибрационных характеристик стержня от параметров трещины, а также решать обратную задачу диагностики повреждения.*

**Ключевые слова:** консольный стержень, изгибные колебания, усталостное повреждение, собственная частота, открытая трещина, закрывающаяся трещина, механика разрушения, гармонический анализ

### Обозначения

- $L$  – длина стержня
- $L_T$  – координата сечения с трещиной
- $h$  – высота поперечного сечения
- $b$  – ширина поперечного сечения
- $a$  – глубина трещины
- $\gamma$  – относительная глубина трещины
- $d$  – параметр, подлежащий определению
- $F$  – площадь поперечного сечения
- $I$  – момент инерции сечения
- $I_0$  – момент инерции сечения с трещиной
- $I_m$  – момент инерции массы
- $m_L$  – масса груза на конце стержня
- $m$  – интенсивность массы стержня

$E$	– модуль упругости
$\rho$	– плотность
$w(x)$	– собственная форма колебаний стержня
$\theta(x)$	– распределение углов поворота сечений стержня по его длине
$M(x)$	– распределение изгибающего момента по длине стержня
$Q(x)$	– распределение поперечной силы по длине стержня
$\omega$	– собственная угловая частота стержня без трещины
$\omega_0, \omega_T$	– собственные угловые частоты стержня соответственно с открытой и закрывающейся трещиной
$f_{a=0}, f_a$	– резонансные частоты образцов соответственно без и с трещиной
$K_I$	– коэффициент интенсивности напряжений

**Введение.** Вибрационные характеристики неповрежденного тела и тела с нарушенной сплошностью, как правило, существенно различаются. Это различие, обусловленное изменением жесткости, может использоваться для диагностики повреждения (например, трещины усталости) и определения его параметров (размеры и местоположение).

Большая часть опубликованных результатов аналитических исследований данной проблемы представляют собой попытку использовать в качестве характеристики повреждения собственную частоту колебаний [1–9]. Известны работы, которые посвящены исследованиям искажений собственных форм либо совместно форм и частот колебаний тела с трещиной [1, 2, 9]. В них рассматриваются открытые трещины, что не отражает в полной мере условия поведения трещин усталости, которые ведут себя как закрывающиеся (жесткость стержня с открытой трещиной полагается одинаковой на обоих полуциклах колебания, а жесткость стержня с закрывающейся трещиной – различной).

Результаты ряда исследований показали перспективность использования для диагностики закрывающихся трещин обусловленного ими искажения формы волны колебаний системы, моделирующей тело с трещиной [10–15]. Искажение формы волны оценивалось по наличию высших гармоник в разложении соответствующих временных функций в ряд Фурье.

Точность аналитического решения задачи о колебаниях тела с трещиной во многом определяется выбором модели трещины. В литературных источниках представлен широкий спектр таких моделей: трещина моделируется пружиной [16, 17], упругим шарниром [7], вырезом [1–3], областью с уменьшенным модулем упругости [17]. В [9] влияние трещины учитывается полуэмпирическими функциями, описывающими распределение напряжений и деформаций по всему объему стержня. При этом во всех случаях, за исключением работы [16], моделировались колебания стержня с открытой трещиной.

Цель настоящей работы – создание аналитического подхода, позволяющего моделировать колебания стержня с закрывающейся краевой трещиной для решения как прямой (определение вибрационных характеристик стержня при заданных размере и местоположении трещины), так и обратной

(оценка параметров трещины по известным значениям соответствующих вибрационных характеристик) задачи диагностики повреждения. В качестве исследуемых характеристик были выбраны собственные частоты и формы колебаний стержня, а также искажение формы волны перемещения, деформации (при учете близкого к реальному распределения деформаций в окрестности трещины) и ускорения произвольного сечения стержня.

**Модель стержня с трещиной.** Суть предлагаемого аналитического подхода раскрывается на примере призматического консольного стержня постоянного поперечного сечения с грузом на конце, поскольку для апробации подхода использовались образцы аналогичного типа. Как известно, свободные поперечные колебания такого стержня без учета демпфирования описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EI} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $E$  и  $\rho$  – соответственно модуль упругости и плотность материала стержня;  $I = bh^3 / 12$  и  $F = bh$  – соответственно момент инерции и площадь поперечного сечения стержня;  $b$  и  $h$  – ширина и высота поперечного сечения.

Общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x)(P_i \sin \omega_i t + R_i \cos \omega_i t), \quad (2)$$

где  $w_i(x)$  и  $\omega_i$  – соответственно собственные формы и угловые частоты колебаний стержня;  $i$  – номер формы колебаний. Собственные формы колебаний стержня определяются выражением

$$w_i(x) = A_i S(k_i x) + B_i T(k_i x) + C_i U(k_i x) + D_i V(k_i x), \quad (3)$$

где  $S(k_i x)$ ,  $T(k_i x)$ ,  $U(k_i x)$ ,  $V(k_i x)$  – функции Крылова;

$$S(k_i x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} k_i x + \cos k_i x); \quad T(k_i x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} k_i x + \sin k_i x);$$

$$U(k_i x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} k_i x - \cos k_i x); \quad V(k_i x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} k_i x - \sin k_i x);$$

$$k_i^4 = \omega_i^2 \frac{\rho F}{EI}.$$

Коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  и  $D_i$  в выражении (3) определяются из граничных условий

$$w_i(0) = 0; \theta_i(0) = \frac{\partial w_i(0)}{\partial x} = 0; M_i(L) = EI \frac{\partial^2 w_i(L)}{\partial x^2} = I_m \omega_i^2 \frac{\partial w_i(L)}{\partial x};$$

$$Q_i(L) = EI \frac{\partial^3 w_i(L)}{\partial x^3} = -m_L \omega_i^2 w_i(L),$$
(4)

где  $\theta_i$  – угол поворота сечения;  $M_i$  – изгибающий момент;  $Q_i$  – поперечная сила;  $L$  – длина стержня;  $m_L$  – масса груза на конце стержня;  $I_m$  – момент инерции массы.

Частотное уравнение в этом случае имеет вид

$$[S(k_i L) - qT(k_i L)][S(k_i L) + gV(k_i L)] -$$

$$- [T(k_i L) - qU(k_i L)][V(k_i L) + gU(k_i L)] = 0,$$
(5)

где

$$q = \frac{I_m k_i^3}{\rho F}; \quad g = \frac{m_L k_i}{\rho F}.$$

Определим коэффициент  $C_i$  исходя из граничного условия (4) для изгибающего момента,  $C_i = M(0) / EIk_i^2$ . Тогда

$$w_i(x) = \frac{M(0)}{EIk_i^2} \left[ U(k_i x) - \frac{V(k_i L) + gU(k_i L)}{S(k_i L) + gV(k_i L)} V(k_i x) \right].$$
(6)

Коэффициенты  $P_i$  и  $R_i$  в выражении (2) определяются [18] из начальных условий в момент времени  $t_H$  для перемещения  $y(x, t_H) = y_H(x)$ , скорости  $[\partial y(x, t) / \partial t]_{t=t_H} = v_H(x)$  и углов поворотов  $\theta(x, t_H) = \theta_H(x)$  сечений стержня по формулам

$$P_i = \frac{\omega_i G_1 \sin \omega_i t_H + G_2 \cos \omega_i t_H}{\omega_i \left[ \int_0^L m w_i^2(x) dx + m_L w_i^2(L) + I_m \theta_i^2(L) \right]};$$
(7)

$$R_i = \frac{\omega_i G_1 \cos \omega_i t_H - G_2 \sin \omega_i t_H}{\omega_i \left[ \int_0^L m w_i^2(x) dx + m_L w_i^2(L) + I_m \theta_i^2(L) \right]},$$
(8)

где  $m = \rho F$  – интенсивность массы стержня;

$$G_1 = \int_0^L m y_H(x) w_i(x) dx + m_L y_H(L) w_i(L) + I_m \theta_H(L) \theta_i(L);$$

$$G_2 = \int_0^L m v_n(x) w_i(x) dx + m_L v_n(L) w_i(L) + I_m \left[ \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial t} \right]_{t=t_n} \theta_i(L).$$

Рассмотрим теперь стержень с открытой краевой трещиной (такая трещина полагается открытой на обоих полуциклах колебаний), расположенной на расстоянии  $L_T$  от основания (рис. 1). Заменяем его эквивалентным стержнем, в котором трещина (равно как и ослабление напряженности по ее берегам) моделируется участком с уменьшенным моментом инерции поперечного сечения (участок 2 на рис. 1). Размер этого участка  $2d$  варьируется исходя из энергетического критерия эквивалентности, суть которого описана ниже.

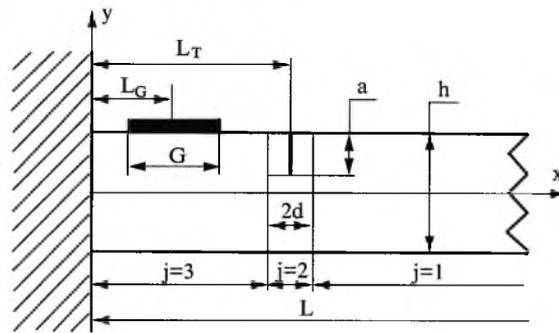


Рис. 1. Схема консольного стержня.

Свободные поперечные колебания каждого из участков такого стержня без учета демпфирования описываются дифференциальным уравнением вида (1) [19], в котором  $I = I_j$  – момент инерции поперечного сечения  $j$ -го участка стержня,  $j = 1, 2, 3$ ;  $I_1 = I_3 = I$ ;  $I_2 = I_0 = b(h - a)^3 / 12$ ;  $a$  – глубина трещины (индекс “0” обозначает открытую трещину). В этом случае общее решение уравнения (1) для  $j$ -го участка стержня принимаем в виде

$$y_{oj}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_{ij}(x) (P_{oi} \sin \omega_{oi} t + R_{oi} \cos \omega_{oi} t). \quad (9)$$

Строго говоря, из приведенной выше формулы для момента инерции второго участка эквивалентного стержня следует, что площадь его сечения равна  $F_2 = b(h - a)$ , а это, в свою очередь, формально обуславливает уменьшение массы стержня по мере роста трещины. В то же время известно, что возникновение и рост трещины в теле не приводит к уменьшению его массы. Избежать этого недостатка модели можно либо, приняв плотность второго участка  $\rho_2 = \frac{\rho h}{h - a}$ , либо площадь сечения второго участка  $F_2 = bh$ .

Определяемые динамические характеристики стержня при изгибных колебаниях являются инвариантными относительно указанных подходов. Поэтому, учитывая, что протяженность участка с реальной трещиной пре-

небрежимо мала по сравнению с длиной стержня и что второй подход значительно проще, принимаем  $F_2 = F$ . Таким образом, масса эквивалентного стержня сохраняется неизменной при любой длине трещины.

Уравнения, определяющие собственные формы колебаний эквивалентного стержня, записываются для каждого его участка  $j$ :

$$w_{ij}(x) = A_{ij}S(k_{ij}x) + B_{ij}T(k_{ij}x) + C_{ij}U(k_{ij}x) + D_{ij}V(k_{ij}x), \quad (10)$$

где

$$k_{ij}^4 = \omega_{oi}^2 \frac{\rho F}{EI_j}.$$

Краевые условия и условия сопряжения участков эквивалентного стержня с учетом массы на конце имеют вид

$$M_{i1}(L) = I_m \omega_{oi}^2 k_{i1} [A_{i1}V(k_{i1}L) + B_{i1}S(k_{i1}L) + C_{i1}T(k_{i1}L) + D_{i1}U(k_{i1}L)];$$

$$Q_{i1}(L) = -m\omega_{oi}^2 [A_{i1}S(k_{i1}L) + B_{i1}T(k_{i1}L) + C_{i1}U(k_{i1}L) + D_{i1}V(k_{i1}L)];$$

$$w_{i1}(x_2) = w_{i2}(x_2); \quad \theta_{i1}(x_2) = \theta_{i2}(x_2); \quad M_{i1}(x_2) = M_{i2}(x_2);$$

$$Q_{i1}(x_2) = Q_{i2}(x_2); \quad w_{i2}(x_1) = w_{i3}(x_1); \quad \theta_{i2}(x_1) = \theta_{i3}(x_1);$$

$$M_{i2}(x_1) = M_{i3}(x_1); \quad Q_{i2}(x_1) = Q_{i3}(x_1); \quad w_{i3}(0) = 0; \quad \theta_{i3}(0) = 0,$$

где

$$x_1 = L_r - d; \quad x_2 = L_r + d.$$

Учитывая свойства функций Крылова ( $S(0) = 1; T(0) = U(0) = V(0) = 0$ ) и два последних краевых условия, находим  $A_{i3} = B_{i3} = 0$ . На основании оставшихся краевых условий и условий сопряжения получаем систему десяти уравнений, определитель которой можно представить следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S(\delta) & -T(\delta) & -U(\delta) & -V(\delta) & S(\chi) & T(\chi) & U(\chi) & V(\chi) & 0 & 0 \\ -V(\delta) & -S(\delta) & -T(\delta) & -U(\delta) & r_1 V(\chi) & r_1 S(\chi) & r_1 T(\chi) & r_1 U(\chi) & 0 & 0 \\ -U(\delta) & -V(\delta) & -S(\delta) & -T(\delta) & r_2 U(\chi) & r_2 V(\chi) & r_2 S(\chi) & r_2 T(\chi) & 0 & 0 \\ -T(\delta) & -U(\delta) & -V(\delta) & -S(\delta) & r_1^{-1} T(\chi) & r_1^{-1} U(\chi) & r_1^{-1} V(\chi) & r_1^{-1} S(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S(\xi) & -T(\xi) & -U(\xi) & -V(\xi) & V(\eta) & U(\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -V(\xi) & -S(\xi) & -T(\xi) & -U(\xi) & r_1^{-1} U(\eta) & r_1^{-1} T(\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -U(\xi) & -V(\xi) & -S(\xi) & -T(\xi) & r_2^{-1} T(\eta) & r_2^{-1} S(\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -T(\xi) & -U(\xi) & -V(\xi) & -S(\xi) & r_1 S(\eta) & r_1 V(\eta) \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

где

$$a_{11} = U(\varphi_i) - q_0 V(\varphi_i); \quad a_{12} = V(\varphi_i) - q_0 S(\varphi_i);$$

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= S(\varphi_i) - q_0 T(\varphi_i); \quad a_{14} = T(\varphi_i) - q_0 U(\varphi_i); \quad a_{21} = T(\varphi_i) + g_0 S(\varphi_i); \\
 a_{22} &= U(\varphi_i) + g_0 T(\varphi_i); \quad a_{23} = V(\varphi_i) + g_0 U(\varphi_i); \quad a_{24} = S(\varphi_i) + g_0 V(\varphi_i); \\
 \varphi_i &= k_{i1} L; \quad \delta_i = k_{i1} x_2 = \frac{x_2}{L} \varphi_i; \quad \chi_i = k_{i2} x_2 = \frac{x_2}{L} r_1 \varphi_i; \quad \xi_i = k_{i2} x_1 = \frac{x_1}{L} r_1 \varphi_i; \\
 \eta_i &= k_{i3} x_1 = \frac{x_1}{L} \varphi_i; \quad r_1 = r^{-0,25}; \quad r_2 = r^{0,5}; \quad r = \frac{I_0}{I}; \quad q_0 = \frac{I_m \varphi_i^3}{\rho F L^3}; \quad g_0 = \frac{m_L \varphi_i}{\rho F L}.
 \end{aligned}$$

При решении системы методом Гаусса коэффициент  $C_{i3}$  задается так же, как и для стержня без трещины, при этом принимаем  $M_{i3}(0) = M(0)$ . Полагаем также, что на границах участков момент инерции поперечного сечения равен  $I$ .

Решение частотного уравнения (11) относительно  $\varphi_i$  позволяет определить собственные частоты колебаний консольного стержня с открытой трещиной:

$$\omega_{oi} = \frac{\varphi_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}. \quad (12)$$

Изменение потенциальной энергии деформации второго участка эквивалентного стержня, если пренебречь изменением изгибающего момента  $M(x)$  по его длине, определяется уравнением

$$\Delta U_2 = \frac{12M^2 d}{Ebh^3} \left[ 1 - \frac{1}{(1-\gamma)^3} \right], \quad (13)$$

где  $\gamma = a/h$ .

В линейно-упругом теле изменение потенциальной энергии деформации, обусловленное наличием трещины нормального отрыва, в предположении плоского напряженного состояния определяется выражением [20]

$$\Delta U = \frac{b}{E} \int_0^a K_I^2 da. \quad (14)$$

В настоящей работе использован коэффициент интенсивности напряжений, полученный Черепановым для изгиба полосы с краевым вырезом [21]:

$$K_I = \frac{4,2M}{bh^{3/2}} \sqrt{(1-\gamma)^{-3} - (1-\gamma)^3}. \quad (15)$$

Поскольку при реализуемых в работе частотах колебаний длина волны деформации на несколько порядков больше размера трещины, то упругое

поле в ее окрестности можно считать квазистатическим [21]. Это позволяет пренебречь влиянием динамических эффектов на коэффициент интенсивности напряжений. Подставляя уравнение (15) в (14), получаем

$$\Delta U = \frac{4,41M^2}{bh^2E}(1-\gamma)^{-2}[(1-\gamma)^6 - 3(1-\gamma)^2 + 2]. \quad (16)$$

Из условия  $\Delta U_2 = \Delta U$  определяем параметр  $d$ :

$$d = \frac{0,3675h(1-\gamma)}{1-(1-\gamma)^3}[(1-\gamma)^6 - 3(1-\gamma)^2 + 2]. \quad (17)$$

Например, для стержня с высотой сечения  $h = 13,8$  мм параметр  $d$  находится в пределах 1,7...3,8 мм.

Рассмотрим теперь колебания стержня с так называемой закрывающейся краевой трещиной: такая трещина открыта на одном полуцикле колебаний и закрыта на другом. Полагаем также, что свойства стержня с закрытой трещиной не отличаются от свойств стержня без трещины. Зададимся следующими начальными условиями для перемещения и скорости сечений стержня в момент времени  $t_H = -\pi / 2\omega_s$ :

$$y_H(x) = w_s(x); \quad v_H(x) = 0 \quad (18)$$

(индекс "s" обозначает начальную задаваемую собственную форму колебаний). Тогда, учитывая условие ортогональности форм колебаний стержня

$$\int_0^L m w_s(x) w_i(x) dx + m_L w_s(L) w_i(L) + I_m \theta_s(L) \theta_i(L) = 0, \quad i \neq s, \quad (19)$$

из уравнений (7) и (8) находим  $P_s = 1, P_{i \neq s} = R_i = 0$ . При этом выражение (2) упрощается к виду

$$y(x, t) = w_s(x) \sin \omega_s t. \quad (20)$$

На другом полуцикле колебаний, когда трещина раскрывается, уравнение колебаний принимает вид, аналогичный (9) при  $y_{oj} = y_{Tj}, P_{oj} = P_{Tj}, R_{oj} = R_{Tj}$  (индекс "T" обозначает закрывающуюся трещину). Пусть трещина начинает раскрываться в момент времени  $t_{H2} = 0$ , т.е. при переходе стержня через нейтральное положение. Тогда из уравнения (20) получим начальные условия для стержня с закрывающейся трещиной в момент ее раскрытия:

$$y_{H2}(x) = 0; \quad v_{H2}(x) = \omega_s w_s(x). \quad (21)$$

Используя выражения (7) и (8) с учетом (21), получаем  $R_{Ti} = 0$  и

$$P_{Ti} = \frac{\omega_s}{\omega_{oi}} \frac{\int_0^{L_T-d} m w_s(x) w_{i3}(x) dx + \int_{L_T-d}^{L_T+d} m w_s(x) w_{i2}(x) dx + \int_{L_T+d}^L m w_s(x) w_{i1}(x) dx + G_3}{\int_0^{L_T-d} m w_{i3}^2(x) dx + \int_{L_T-d}^{L_T+d} m w_{i2}^2(x) dx + \int_{L_T+d}^L m w_{i1}^2(x) dx + G_4}, \quad (22)$$

где  $G_3 = m_L w_s(L) w_{i1}(L) + I_m \theta_s(L) \theta_{i1}(L)$ ;  $G_4 = m_L w_{i1}^2(L) + I_m \theta_{i1}^2(L)$ . Тогда решение уравнения колебаний стержня на полуцикле раскрытия трещины будет иметь вид

$$y_{Tj}(x, t) = P_{Ts} w_{sj}(x) \sin \omega_{os} t + \sum_{i \neq s}^{\infty} P_{Ti} w_{ij}(x) \sin \omega_{oi} t. \quad (23)$$

Анализ уравнений (22) и (23) показывает, что при раскрытии трещины могут возникнуть и другие (сопутствующие) формы колебаний, отличные от начальной задаваемой формы.

Уравнения (20) и (23) определяют решение для первого цикла колебаний стержня. Аналогичным образом можно построить решение для второго и последующих циклов. При этом начальные условия для стержня в момент закрытия трещины определяются из уравнения (23), а в момент открытия – из уравнения (2). В общем случае каждый цикл колебаний описывается своей парой уравнений (2) и (23).

Вместе с тем оценка величины коэффициентов  $P_{Ti}$  для образцов, использованных в настоящей работе (см. последний раздел статьи), показала, что амплитуды сопутствующих второй и третьей форм колебаний не превышали 3% амплитуды первой формы ( $s=1$ ). Это означает, что для первой формы колебаний рассматриваемых образцов можно ограничиться определением решения лишь для первого цикла колебаний.

Собственная частота  $s$ -й формы колебаний стержня с закрывающейся трещиной определяется по формуле [22]

$$\omega_{Ts} = \frac{2\omega_s \omega_{os}}{\omega_s + \omega_{os}}. \quad (24)$$

Выражения (20) и (23) описывают форму волны перемещения сечений стержня с закрывающейся трещиной. Из них следуют выражения для определения формы волны ускорения различных сечений стержня на разных полуциклах колебаний:

$$\frac{\partial y^2(x, t)}{\partial t^2} = -\omega_s^2 w_s(x) \sin \omega_s t; \quad (25)$$

$$\frac{\partial y_{ij}^2(x,t)}{\partial t^2} = -\omega_{os}^2 P_{ts} w_{sj}(x) \sin \omega_{os} t - \sum_{i \neq s}^{\infty} \omega_{oi}^2 P_{ti} w_{ij}(x) \sin \omega_{oi} t. \quad (26)$$

На полупериодах колебаний, когда трещина соответственно закрыта и открыта, нормированную функцию распределения деформаций по длине стержня можно представить в виде

$$\bar{\varepsilon}(x,t) = \bar{M}_s(x) \sin \omega_s t; \quad (27)$$

$$\bar{\varepsilon}_T(x,t) = f_\varepsilon(x,\gamma) \left( P_{ts} \bar{M}_{sj}(x) \sin \omega_{os} t + \sum_{i \neq s}^{\infty} P_{ti} \bar{M}_{ij}(x) \sin \omega_{oi} t \right), \quad (28)$$

где функция  $f_\varepsilon(x,\gamma)$  учитывает влияние трещины на распределение деформаций (виды функции представлены ниже). Функции  $\bar{M}_s(x)$  и  $\bar{M}_{ij}(x)$  являются нормированными функциями распределения изгибающего момента по длине стержня без трещины и с открытой трещиной соответственно ( $\bar{M}_s(0) = \bar{M}_{ij}(0) = 1$ ).

Шен и Пьерр [9] представили функцию  $f_\varepsilon(x,\gamma)$  на поверхности реального стержня со стороны трещины следующим образом:

$$f_\varepsilon(x,\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{2\alpha|x-L_T|}{h}\right), \quad (29)$$

в которой приняли  $\alpha = 1,276$ . Конечноэлементный анализ распределения деформаций в окрестности трещины\* показал существенную зависимость коэффициента  $\alpha$  от глубины трещины и позволил отразить эту зависимость функцией вида  $\alpha(\gamma) = 0,683 + 0,152/\gamma$  (при  $\gamma = 0$  принимается, что  $f_\varepsilon(x,\gamma) = 1$ ). В результате указанного анализа получена также функция распределения деформаций и на противоположной от трещины поверхности стержня:

$$f_\varepsilon(x,\gamma) = 1 + [\beta(\gamma) - 1] \exp\left[-\left(\frac{L_T - x}{v(\gamma)h}\right)^2 \ln \beta(\gamma)\right], \quad (30)$$

где  $\beta(\gamma) = 0,123 + 0,813 \exp(\gamma) + 0,064 \exp(7\gamma)$ ;  $v(\gamma) = 0,063 + 0,45\gamma$ .

Как видно из рис. 2, интенсивность функций  $f_\varepsilon(x,\gamma)$  вблизи трещины является весьма существенной. Это означает, что при измерении деформации в непосредственной близости от сечения с трещиной необходимо учитывать влияние на волну деформации как местоположения тензорезисторов  $L_G$ , так и их базы  $G$ .

\* Распределения напряжений в окрестности трещины получены с помощью метода конечных элементов А. Ю. Чирковым.

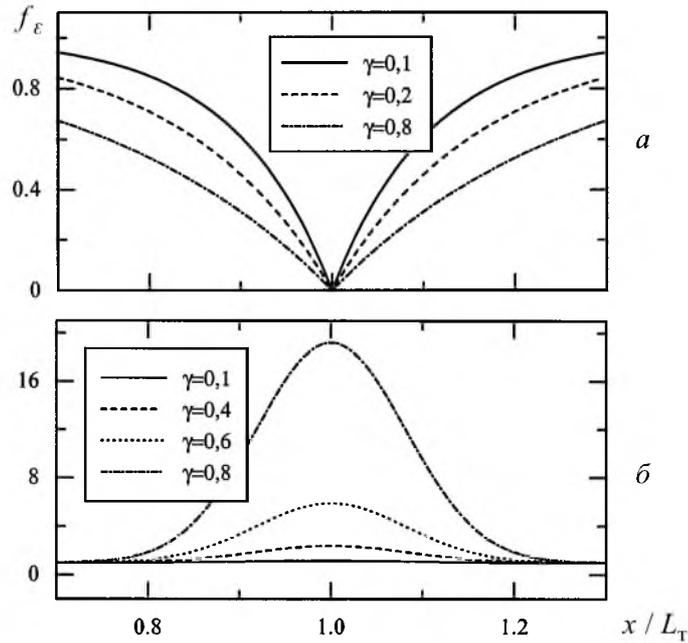


Рис. 2. Распределение деформации по поверхности образца ( $h = 13,8$  мм) в окрестности трещины: *a* – поверхность со стороны трещины; *б* – противоположная от трещины поверхность.

Таким образом, предложенная модель стержня с трещиной позволяет получить зависимости собственных частот и форм колебаний консольного стержня от глубины и местоположения как открытой, так и закрывающейся краской трещины. Кроме того, полученные уравнения дают возможность исследовать проявление высших гармоник в разложении волн перемещения, ускорения и деформации различных сечений стержня, колеблющегося по  $s$ -й форме, с закрывающейся трещиной в ряд Фурье:

$$F_T(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_{TS}t + b_n \sin n\omega_{TS}t), \quad (31)$$

где

$$a_n = \frac{\omega_{TS}}{\pi} \left[ \int_{\frac{\pi}{\omega_s}}^0 f(x, t) \cos n\omega_{TS}t dt + \int_0^{\frac{\pi}{\omega_{OS}}} f_T(x, t) \cos n\omega_{TS}t dt \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (32)$$

$$b_n = \frac{\omega_{TS}}{\pi} \left[ \int_{\frac{\pi}{\omega_s}}^0 f(x, t) \sin n\omega_{TS}t dt + \int_0^{\frac{\pi}{\omega_{OS}}} f_T(x, t) \sin n\omega_{TS}t dt \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Для волны перемещения функции  $f(x, t)$  и  $f_T(x, t)$  определяются соответственно уравнениями (20) и (23), для волны ускорения – уравнениями (25) и (26), для волны деформации в сечении  $x$  стержня – уравнениями (27) и (28), а для волны деформации, регистрируемой тензорезистором, – через усредненные по его базе значения деформации, описываемой уравнениями (27) и (28).

**Оценка корректности модели стержня с трещиной.** Оценка корректности определения относительного изменения собственной частоты колебаний консольного стержня с краевой трещиной выполнена на основании сопоставления результатов расчета по предложенному аналитическому подходу с результатами испытания образцов с грузом на конце, геометрические и механические характеристики которых приведены в табл. 1 [23, 24], и результатами расчетов собственной частоты первой формы колебаний стержня без груза на конце ( $s = 1$ ) по методу Рэлея–Ритца [9].

Т а б л и ц а 1

Размеры рабочей части образцов и механические свойства металлов

Материал образца	Вид трещины	$L$ , мм	$L_T / L$	$h$ , мм	$b$ , мм	$m$ , кг	$E$ , ГПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
15X2НМФА	Закрывающаяся	184	0,011	13,8	4	0,234	200	7800
		220	0,036	13,8	4	0,154	200	7800
		220	0,077	13,8	4	0,259	200	7800
		220	0,136	13,8	4	–	200	7800
		220	0,155	13,8	4	0,154	200	7800
		220	0,277	13,8	4	0,259	200	7800
08X18Н10	Закрывающаяся	150	0,2	20	4	3,520	200	7900
ВТ-8	Открытая	220	0,091	20	4	0,150	110	4480
		220	0,182	20	4	–	110	4480
		220	0,518	20	4	0,255	110	4480

На рис. 3 и в табл. 2 представлено несколько примеров такого сопоставления для некоторых из исследованных образцов с закрывающейся и открытой трещиной. Как видно, имеет место хорошее соответствие результатов расчета и эксперимента.

В то же время анализ результатов экспериментального и расчетного определения относительного изменения собственной частоты колебаний для образцов из стали 15X2НМФА длиной  $L = 220$  мм показал, что при  $\gamma \leq 0,5$  их отличие оказалось в пределах  $-6,4 \leq \Delta_f \leq 2,1\%$ . При  $\gamma > 0,5$  это отличие уже достигало  $-37,8\%$ . По всей вероятности, причина такого расхождения связана с тем, что при испытаниях, когда трещина становится достаточно большой, не удается избежать возникновения значительных пластических деформаций в ослабленном сечении, вследствие чего трещина становится открытой частично или полностью. Косвенно это подтверждается результатами расчетов для образцов без груза на конце в предположении, что трещина открыта: в этом случае максимальное отличие результатов расчетов и экспериментов в диапазоне значений  $0,5 < \gamma \leq 0,87$  не превышало

8,3%. Для образцов из титанового сплава ВТ-8 с открытой трещиной отличие результатов экспериментального и расчетного определения относительного изменения собственной частоты колебаний оказалось в пределах  $-0,6 \leq \Delta_f \leq 16,8\%$  при  $0,05 \leq \gamma \leq 0,8$ .

Т а б л и ц а 2

Значения глубины трещины и относительного изменения собственной частоты, полученные экспериментально и в результате расчета

Материал образца	$L_T / L$	$a$ , мм		$\Delta_a$ , %	$f_a / f_{a=0}$		$\Delta_f$ , %
		эксперимент	расчет		эксперимент	расчет	
15X2НМФА ( $L=184$ мм)	0,011	2,5	2,6	-4,0	0,984	0,985	-0,1
		4,9	5,0	-2,0	0,942	0,944	-0,2
		6,3	6,0	4,8	0,911	0,901	1,1
		7,0	6,7	4,3	0,884	0,872	1,4
		8,3	8,3	0	0,797	0,797	0
		9,9	9,9	0	0,655	0,654	0,2
08X18Н10	0,2	1,9	3,7	-94,7	0,979	0,995	-1,6
		4,0	5,1	-27,5	0,960	0,976	-1,7
		6,1	6,1	0	0,943	0,943	0
		7,8	7,4	5,1	0,913	0,903	1,1
		10,1	9,7	4,0	0,845	0,830	1,8
		12,0	11,7	2,5	0,765	0,749	2,1
ВТ-8	0,091	1,0	1,1	-10,0	0,996	0,997	-0,1
		2,0	2,3	-15,0	0,987	0,990	-0,3
		4,0	4,2	-5,0	0,953	0,959	-0,6
		8,0	8,1	-1,3	0,830	0,833	-0,4
		12,0	11,9	0,8	0,629	0,624	0,8
		16,0	15,9	0,6	0,343	0,338	1,5
Сталь [24]	0,2	1,33	1,5	-12,8	0,991	0,993	-0,2
		2,53	2,5	0	0,974	0,974	0
		4,0	3,9	2,5	0,933	0,928	0,5
		6,0	5,8	3,3	0,812	0,797	1,8
		8,0	7,9	1,3	0,522	0,510	2,3

Отличие результатов расчета собственной частоты первой формы колебаний консольного стержня с открытой трещиной, выполненного Шеном и Пьерром [9] методом Рэлея–Ритца, от результатов эксперимента, проведенного Вендландом [24], оказалось в пределах  $-1,2 \leq \Delta_f \leq 11,9\%$  при  $0,133 \leq \gamma \leq 0,8$ . В то же время, как видно из табл. 2, расчет на основании предложенного подхода точнее описывает данные Вендланда ( $-0,2 \leq \Delta_f \leq 2,3\%$ ).

Предложенный аналитический подход позволяет также решать обратную задачу диагностики повреждения. Основываясь на полученных экспериментальных результатах относительного изменения резонансной частоты колебаний образцов по первой форме, были рассчитаны соответствующие им значения глубины трещины. Как видно из табл. 2, относительное отличие  $\Delta_a$  значений глубины трещины, измеренных при испытаниях образцов и рассчитанных по относительному изменению их резонансной частоты, обратно пропорционально величине трещины. Заметим, что в расчете не

учитывалась эллиптичность фронта трещины, что в наибольшей степени должно было сказаться на отличии результатов расчетов и экспериментов при малых трещинах (т.е. реальная трещина была несколько больше фиксированной при испытаниях). Это обстоятельство в определенной мере объясняет тот факт, что при малых трещинах расчет дает завышенные значения глубины трещины.

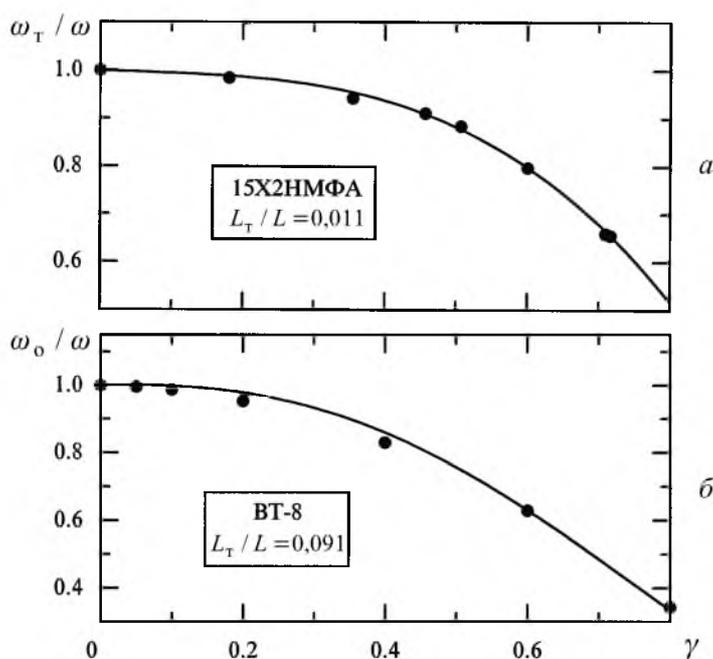


Рис. 3. Влияние глубины закрывающейся (а) и открытой (б) трещины на изменение собственной частоты колебаний образцов (линии – расчет, точки – эксперимент).

Таким образом, при определении абсолютных значений глубины трещины отличие результатов расчета от данных эксперимента, как правило, тем больше, чем меньше длина трещины. В то же время отличие результатов эксперимента и расчета для относительного изменения собственной частоты колебаний является наименьшим именно в диапазоне относительно небольших трещин (при  $\gamma \leq 0,5$ ). Это хорошо видно при сопоставлении соответствующих значений  $\Delta_a$  и  $\Delta_f$  в табл. 2. Следовательно, высокая точность аналитического определения отношения частот не всегда свидетельствует о такой же точности определения величины трещины. Этот результат подтверждает выводы работы [23].

Экспериментальная методика гармонического анализа волны деформации, описанная в работе [25], использована для выявления высших гармоник в разложении в ряд Фурье временных зависимостей деформации и ускорения при испытании образцов, приведенных в табл. 1, по первой форме колебаний. Для измерения деформации использовались тензорезисторы с базой  $G = 5$  мм, расположение которых  $L_G$  относительно заделки и трещины на испытанных образцах было разным, а для измерения ускорения – акселерометр, который крепился на конце образцов.

При аналитическом определении высших гармоник волны деформации учитывали возможность возникновения второй и третьей форм колебаний стержня с закрывающейся трещиной. Заметим, что влияние этих форм колебаний на высшие гармоники для исследованных образцов оказалось незначительным.

Как видно из рис. 4 и 5, имеет место хорошее соответствие результатов эксперимента и расчета для амплитуд второй гармоники волны деформации (на рис. 4–7 амплитуды высших гармоник показаны относительно первой гармоники  $b_1$ , так как в нашем случае основная гармоника – синусоида). Заметим, что на образце из стали 08X18H10 тензорезистор был расположен на поверхности со стороны трещины, а на образцах из стали 15X2НМФА – с противоположной от трещины стороны. В некоторых случаях количественное расхождение экспериментальных и расчетных данных было существенным, как, например, для нулевой гармоники при испытании образца из стали 08X18H10 (рис. 4). Однако необходимо отметить, что все полученные расчетные зависимости описывают результаты эксперимента качественно, а также, что погрешность измерения амплитуды нулевой гармоники определяется дрейфом нуля усилительной аппаратуры и может быть значительной. На рис. 5 штриховыми линиями показано, как реагирует амплитуда второй гармоники на изменение местоположения тензорезистора  $L_G$  вблизи трещины на  $\pm 1$  мм (таким образом имитировалась погрешность определения величины  $L_G$ ). Как видно, влияние погрешности измерения в эксперименте параметра  $L_G$  на высшие гармоники относительно невелико. Аналитическое исследование показало, что оно резко падает по мере удаления от сечения с трещиной, и им можно пренебречь.

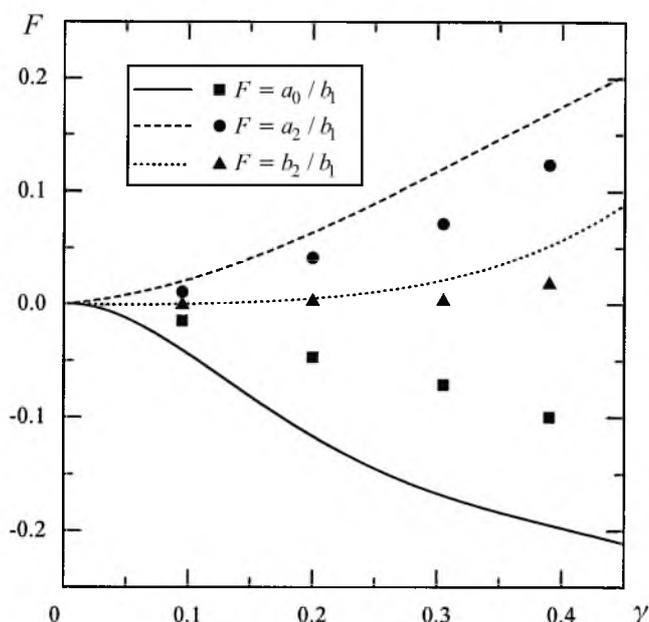


Рис. 4. Влияние глубины трещины на амплитуды высших гармоник волны деформации для образца из стали 08X18H10,  $L_G / L = 0,283$ . (Линии – расчет, точки – эксперимент.)

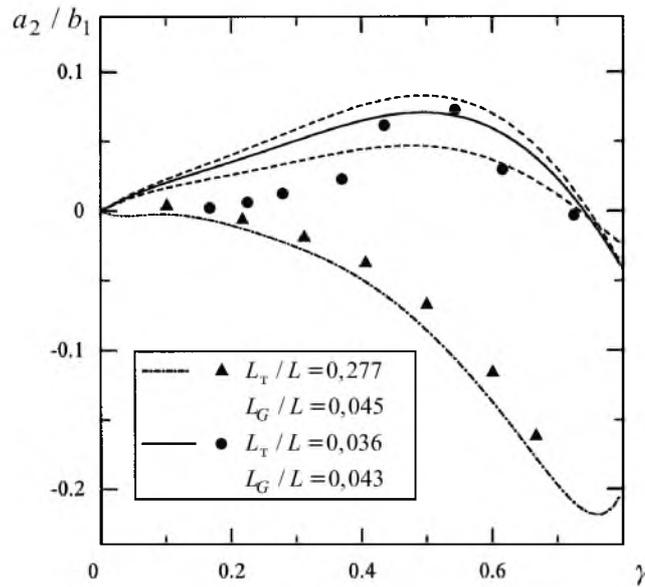


Рис. 5. Влияние глубины трещины на амплитуду второй гармоники волны деформации для образцов из стали 15Х2НМФА. (Линии – расчет, точки – эксперимент, штриховые линии соответствуют диапазону значений  $L_G/L=0,041\dots0,050$ .)

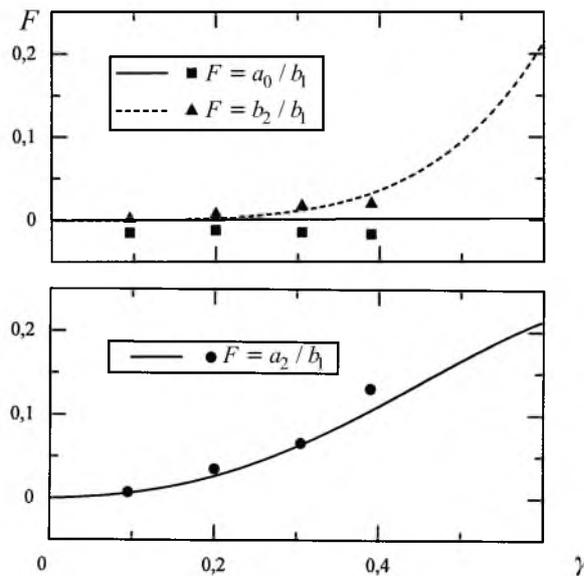


Рис. 6. Влияние глубины трещины на амплитуды высших гармоник волны ускорения для образца из стали 08Х18Н10. (Линии – расчет, точки – эксперимент.)

При аналитическом определении высших гармоник волны ускорения также учитывали возможность возникновения второй и третьей форм колебаний стержня. Как видно из рис. 6 и 7, для вторых гармоник получено удовлетворительное соответствие результатов расчетов и экспериментов, а также подтверждена малость в этих случаях нулевых гармоник. Аналогичные результаты получены и для других образцов с закрывающейся трещиной.

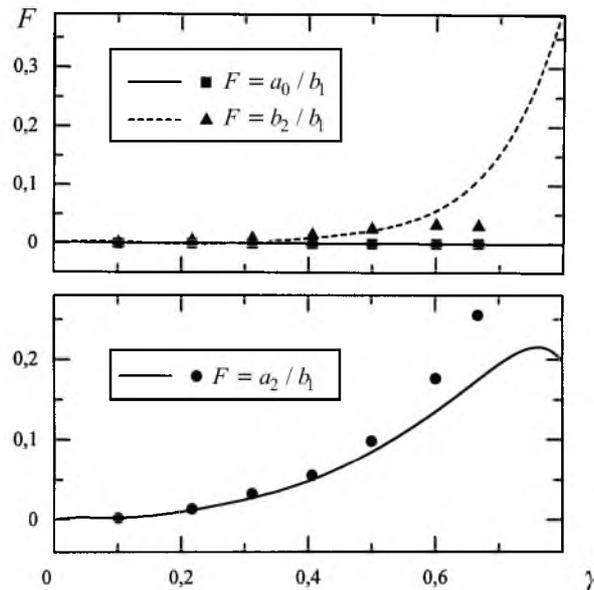


Рис. 7. Влияние глубины трещины на амплитуды высших гармоник волны деформации для образца из стали 15Х2НМФА,  $L_T / L = 0,277$ . (Линии – расчет, точки – эксперимент.)

Для образцов с открытой трещиной (сплав ВТ-8) результаты расчета и эксперимента довольно близки, так как расчет не выявляет нулевой и высших гармоник волны деформации и ускорения. Эксперимент также показал, что амплитуды этих гармоник близки к нулю.

Количественное расхождение между результатами расчетов высших гармоник волны деформации и ускорения и соответствующими экспериментами может быть обусловлено тем, что, с одной стороны, в аналитическом подходе не учитывалось возможное влияние на высшие гармоники демпфирования, соударения берегов трещины, эллиптичности ее фронта и т.п., а с другой – погрешностями экспериментального определения рассматриваемых динамических характеристик.

**Заключение.** Представлена модель консольного стержня с краевой трещиной, в которой трещина имитируется участком с уменьшенным моментом инерции сечения.

Получены выражения, определяющие собственные частоты и формы колебаний стержня с открытой или закрывающейся краевой трещиной. При решении задачи о колебаниях стержня с закрывающейся краевой трещиной получены уравнения, которые позволяют исследовать обусловленное наличием трещины искажение волны перемещения, ускорения и деформации различных сечений стержня. При этом учитывается возможность возникновения в момент раскрытия трещины форм колебаний стержня, отличных от начальной задаваемой формы колебаний, а также особенности распределения деформаций в окрестности трещины.

Апробация предложенного аналитического подхода на значительном объеме экспериментальных данных и результатах расчетов на основе метода конечных элементов показала, что подход позволяет получать достоверные зависимости различных вибрационных характеристик стержня от параметров трещины.

## Резюме

Розглядаються вільні коливання пружного консольного стержня з крайовою тріщиною, яка моделюється частиною стержня зі зменшеним моментом інерції перерізу. Маса цієї частини вважається незмінною, а її розміри визначаються, виходячи з енергетичного критерія еквівалентності.

Представлено аналітичний підхід до визначення власних частот і форм коливань стержня з відкритою або тією, що закривається, тріщиною, а також до дослідження хвилі переміщення, прискорення і деформації різних перерізів стержня з тріщиною, що закривається. У рішенні враховується можливість виникнення кількох форм коливань стержня в момент розкриття тріщини та її вплив на розподіл деформації по об'єму стержня.

Показано, що запропонований підхід дозволяє отримати вірогідні залежності різних вібраційних характеристик стержня від параметрів тріщини, а також вирішувати обернену задачу діагностики пошкодження.

1. Kirshmer P. G. The effect of discontinuities on the natural frequency of beams // Proc. ASTM. – 1944. – **44**. – P. 897 – 904.
2. Thomson W. T. Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness // J. Appl. Mech. – 1949. – **16**. – P. 203 – 207.
3. Petroski H. J. Simple static and dynamic models for the cracked elastic beam // Int. J. Fract. – 1981. – **17**, N 4. – P. R71 – R76.
4. Gudmundson P. Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes // J. Mech. Phys. Solids. – 1982. – **30**, N 5. – P. 339 – 353.
5. Чушко В. М. Зависимость частоты собственных колебаний стержня от размеров имеющейся в нем трещины // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 249 – 253.
6. Joshi A., Madhusudhan B. S. A unified approach to free vibration of locally damaged beams having various homogeneous boundary conditions // J. Sound and Vibration. – 1991. – **147**, N 3. – P. 475 – 488.
7. Ostachowich W. M., Krawczuk M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam // J. Sound and Vibration. – 1991. – **150**, N 2. – P. 191 – 201.
8. Kikidis M. L., Papadopoulos C. A. Slenderness ratio effect on cracked beams // J. Sound and Vibration. – 1992. – **155**, N 1. – P. 1 – 11.
9. Shen M.-H. H., Pierre C. Free vibrations of beams with a single-edge crack // J. Sound and Vibration. – 1994. – **170**, N 2. – P. 237 – 259.
10. Карасев В. А., Ройтман А. Б. Доводка эксплуатируемых машин. Вибродиагностические методы. – М.: Машиностроение, 1986. – 192 с.
11. Голуб В. П., Буцорога В. П., Погребняк А. Д. Исследование кинетики усталостных трещин методом дифференциальной податливости // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 12. – С. 66 – 74.

12. Плахтиенко Н. П., Ясинский С. А. О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // Пробл. прочности. – 1995. – № 3. – С. 56 – 63.
13. Матвеев В. В. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания. Аналитическое решение // Там же. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
14. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 2. Изгибные колебания. Аналитическое решение // Там же. – 1998. – № 6. – С. 9 – 22.
15. Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б. Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщ. 1. Малые колебания // Там же. – 1999. – № 2. – С. 23 – 34.
16. Ibrahim A., Ismail F., Martin H. K. Modelling of the dynamics of a continuous beam including nonlinear fatigue crack // Int. J. Anal. Experim. Modal Analysis. – 1987. – 2, N 2. – P. 76 – 82.
17. Adams R. D., Cawley P., Pye C. J., Stone B. J. A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures // J. Mech. Eng. Sci. – 1978. – 20, N 2. – P. 93 – 100.
18. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. – М.: Машгиз, 1957. – 336 с.
19. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – Киев: Наук. думка, 1970. – 380 с.
20. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. Разрушение / Под ред. Г. Либовица. В 7 т. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – С. 204 – 335.
21. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
22. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана. – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. – 351 с.
23. Бовсуновский А. П. К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщ. 2. Результаты эксперимента и расчета // Пробл. прочности. – 1999. – № 3. – С. 45 – 53.
24. Wendtland D. Änderung der biegeeigenfrequenzen einer idealisierten Schaufel durch Risse. Ph. D. Thesis, University of Karlsruhe, 1972.
25. Бовсуновский А. П. Форма петли механического гистерезиса для металлических материалов при гармонических напряжениях ниже предела выносливости. Сообщ. 2. Экспериментальная методика и результаты // Пробл. прочности. – 1997. – № 3. – С. 119 – 130.

Поступила 01. 07. 99