

Схема змішаного методу скінченних елементів для дослідження задачі про міжшаровий контакт в уточненій постановці. Повідомлення 2. Чисельне дослідження контактних напружень при згині шаруватих пластин

М. В. Марчук, М. М. Хом'як

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України ім. Я. С. Підстригача, Львів, Україна

На основі дискретного розгляду плоских шарів у рамках $\{1, 0\}$ -апроксимації для теорії тонких пластин запропоновано ефективну схему змішаного методу скінченних елементів. Чисельно досліджено ідеальний міжшаровий контакт у дво- і тришарових структурах для різних варіантів умов шарнірного підкріплення сторін при згині зовнішнім тиском. Відмічено ефекти концентрації нормальних контактних напружень на вільних краях та їх залежність від конструктивної анізотропії в поперечному напрямку.

Математична модель в рамках $\{1, 0\}$ -апроксимації. Шаруваті пластини широко використовуються як конструктивні елементи та як одна з найпростіших і зручних моделей при розрахунках [1–4]. Запропонована схема дискретного розгляду шарів у формі змішаного методу скінченних елементів (МСЕ) у переміщеннях шарів і контактних напруженнях [5], концептуально орієнтована саме на визначення останніх, показала свою ефективність на одномірних (плоских) задачах і легко адаптується для дослідження тіл скінченних розмірів. У даній роботі зосередимо увагу на одній модельній задачі про згин квадратної шарнірно підкріпленої пластини постійним нормальним навантаженням.

Для побудови розрахункової схеми (РС) скористаємося загальними співвідношеннями $\{1, 0\}$ -апроксимації в декартовій системі координат $(\alpha, \beta) = (x, y)$ [6] для конкретизації функціонала $J^L(\bar{u}, \bar{\sigma})$, приведеного раніше [5]. Вектор узагальнених переміщень на серединній поверхні шару містить п'ять компонент $\bar{u} = (u_x, u_y, \gamma_x, \gamma_y, w_0)^T$, а вектор напружень на контактних і лицьових поверхнях – три компоненти $\bar{\sigma} = (\tau_{xz}^\pm, \tau_{yz}^\pm, \sigma_{zz}^\pm)^T$. Згрупуємо компоненти переміщень так, щоб виділити вклади в матрицю жорсткості від безмоментного напруженого стану та згину:

$$\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)^T, \quad \bar{u}_1 = (u_x, u_y)^T, \quad \bar{u}_2 = (\gamma_x, \gamma_y, w_0)^T; \quad (1)$$

$$(A\bar{u}, \bar{u}) = (A_1\bar{u}_1, \bar{u}_1) + (A_2\bar{u}_2, \bar{u}_2); \quad (2)$$

$$(A_1\bar{u}_1, \bar{u}_1) = \int_{\Omega} \left\{ B_x (u_{x,x} + \nu_{xy} u_{y,y})^2 + B_y (u_{y,y} + \nu_{yx} u_{x,x})^2 + B_{xy} (u_{x,y} + u_{y,x})^2 \right\} d\Omega; \quad (3)$$

$$(A_2 \bar{u}_2, \bar{u}_2) = \int_{\Omega} \{ \Lambda_x (w_{0,x} + \gamma_x)^2 + \Lambda_y (w_{0,y} + \gamma_y)^2 + D_x (\gamma_{x,x} + \nu_{xy} \gamma_{y,y})^2 + D_y (\gamma_{y,y} + \nu_{yx} \gamma_{x,x})^2 + D_{xy} (\gamma_{x,y} + \gamma_{y,x})^2 \} d\Omega, \quad (4)$$

де нижнім індексом після коми позначена часткова похідна. Формули придатні для ортогрозного матеріалу (напрямки ортотропії співпадають з осями координат) і враховують ефекти поперечного зсуву. Важливо відмітити, що розв'язування задач для шаруватих структур проводиться в рамках зв'язаної теорії, а поділ на згинний (3) і безмоментний стан (4) має місце лише для окремо вичленованого шару і є зручним для структурного аналізу РС.

Структура матриць взаємозв'язку переміщень серединних поверхонь і напружень на лицьових (контактних) поверхнях $(\tilde{D}_{\pm} \bar{\sigma}, \bar{u})$, а також контактних напружень на одній $(C_{\bar{\sigma}}^{(j,j+1)}, \bar{\sigma}^{(j,j+1)})$ і на сусідніх контактних поверхнях $(C_{+}^{(j,j+1)} \bar{\sigma}^{(j,j+1)}, \bar{\sigma}^{(j+1,j+2)})$ визначена наступним чином:

$$(\tilde{D}_{\pm} \bar{\sigma}, \bar{u}) = \int_{\Omega} \left\{ h(\lambda_x u_{x,x} + \lambda_y u_{y,y}) \sigma_{zz}^{\pm} \mp (u_x \tau_{xz}^{\pm} + u_y \tau_{yz}^{\pm}) \mp \right. \\ \left. \mp w_0 \sigma_{zz}^{\pm} + \frac{h}{6} (w_{0,x} \tau_{xz}^{\pm} + w_{0,y} \tau_{yz}^{\pm}) \pm h^2 / 3 (\lambda_x \gamma_{x,x} + \lambda_y \gamma_{y,y}) \sigma_{zz}^{\pm} - \right. \\ \left. - \frac{5h}{6} (\gamma_x \tau_{xz}^{\pm} + \gamma_y \tau_{yz}^{\pm}) \right\} d\Omega; \quad (5)$$

$$(C_{\bar{\sigma}}^{(j,j+1)}, \bar{\sigma}^{(j,j+1)}) = - \int_{\Omega} \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{h^{(j)}}{E_z^{(j)}} + \frac{h^{(j+1)}}{E_z^{(j+1)}} \right) (\sigma_{zz}^{(j,j+1)})^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{h^{(j)}}{G_{xz}^{(j)}} + \frac{h^{(j+1)}}{G_{xz}^{(j+1)}} \right) (\tau_{xz}^{(j,j+1)})^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{h^{(j)}}{G_{yz}^{(j)}} + \frac{h^{(j+1)}}{G_{yz}^{(j+1)}} \right) (\tau_{yz}^{(j,j+1)})^2 \right\} d\Omega; \quad (6)$$

$$(C_{+}^{(j,j+1)} \bar{\sigma}^{(j,j+1)}, \bar{\sigma}^{(j+1,j+2)}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{h^{(j+1)}}{3E_z^{(j+1)}} \sigma_{zz}^{(j,j+1)} \sigma_{zz}^{(j+1,j+2)} + \right. \\ \left. + \frac{h^{(j+1)}}{12G_{xz}^{(j+1)}} \tau_{xz}^{(j,j+1)} \tau_{xz}^{(j+1,j+2)} + \frac{h^{(j+1)}}{12G_{yz}^{(j+1)}} \tau_{yz}^{(j,j+1)} \tau_{yz}^{(j+1,j+2)} \right\} d\Omega. \quad (7)$$

Внаслідок стандартної процедури МСЕ розбиття серединних і контактних поверхонь на елементи і дискретизації складових функціонала (3)–(7) з

варіаційного рівняння $\delta J^L(\bar{u}, \bar{\sigma}) = 0$ отримуємо лінійну алгебраїчну систему виду

$$Kq_{u,\sigma} = f_{u,\sigma}, \quad (8)$$

де K – розріджена і симетрична, але недодатньо визначена матриця; $q_{u,\sigma}$ – вузлові переміщення й контактні напруження; $f_{u,\sigma}$ – дискретний аналог лінійної частини функціонала J^L . Систему (8) середньої розмірності (приблизно від 1000 до 4000 рівнянь) розв'язуємо методом факторизації, $K = LU = LDL^T$, модифікованим для недодатньо визначених матриць, зі збереженням структури й коефіцієнтів матриці в профільному форматі [7]. Можливим і перспективним є також застосування блочних та ітераційних методів, короткий огляд яких і посилання на літературу можна знайти, наприклад, в роботі [8].

Приведена модель реалізована з використанням об'єктноорієнтованого підходу на мові C++. Вхідні дані про геометрію окремих шарів і структури в цілому, граничні умови, навантаження загального виду і анізотропію матеріалу для кожного шару зчитуються зі спеціальних файлових потоків, що забезпечує незалежність програми від баз даних та її достатню універсальність. Для зменшення вимог до ресурсів комп'ютера передбачена мінімізація ширини стрічки матриці і динамічний обмін між оперативною і дисковою пам'яттю.

Приклади чисельного дослідження. З метою апробації методу розглянемо задачу про згин рівномірно розподіленим навантаженням $\sigma_{zz}^+ = \text{const}$ шаруватої квадратної пластини, що займає область $\Omega = [0, l] \times [0, l]$. Задаються умови шарнірного підкріплення всіх сторін $w = 0$ та умови симетрії $u_x = 0$, $u_y = 0$ на лініях $x, y = 0, 5l$ відповідно (код умов S4). Для спрощення спочатку матеріал будемо вважати ізотропним із модулем Юнга $E = 10^6$ МПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$, усі шари – ідентичні (з одного матеріалу, мають одну геометрію і структуру SE-розбиття). Параметр навантаження $\sigma_{zz}^+ / E = -0,001$, сумарна товщина пакету шарів $2h / l = 0,2$. В силу лінійності задачі можливе масштабування результатів відносно параметра навантаження, тому тут і далі приведено нормалізовані величини. Ряд чисельних експериментів включав тестовий розрахунок ізотропної одношарової пластини (наприклад, для прогинів використано аналітичний результат [9]), а також розрахунок дво- і тришарових структур у порядку наростання складності. Граничні умови S4 накладалися як на всі шари, так і на окремі з них (називатимемо їх ослабленими граничними умовами). На “непідкріплених” (явно) шарах виконуються умови вільного краю, а взаємодія передається лише через лицьові поверхні. В таблиці наведено деякі результати для порівняння, де в першому сповщі перша цифра відповідає кількості шарів структури, після букви “L” – ідентифікатор підваріанту.

Розрахунок одношарової пластини проводився на сітці з 5×5 елементів, а також на вдвічі згущеній сітці з 10×10 біквадратичних елементів. Різниця між прогинами не перевищує 0,03%, що підтверджує достатність більш “грубого” розбиття в даній задачі (рис. 1). Аналогічно поводитися й у

випадку двошарової пластини з тією ж сумарною товщиною. Різниця між прогинами і контактними напруженнями також не перевищує 1%. Концентрацію нормальних міжшарових напружень, на відміну від плоскої деформації [5], відмічено тільки при ослаблених умовах S4 для першого шару (рис. 2).

Прогини шарів w_j та контактні напруження $\sigma_{zz}^{(j,j+1)}, \tau_{xz}^{(j,j+1)}$
шарнірно підкріпленої квадратної пластини сумарної товщини $2h/l = 0,2$

Варіант розрахунку	Товщина шару, $h^{(j)}/h$	Вузли, рівняння	Граничні умови	$-w_j/h$ в точці M(4;5)	$\frac{\sigma_{zz}^{(j,j+1)}}{\sigma_+^{(2)}} \cdot 10^2$	$\frac{\tau_{xz}^{(j,j+1)}}{\sigma_+^{(2)}} \cdot 10^2$
2L 10×10CE	0,5; 0,5	1023, 4433	S4 [1, 2]	0,069272 [1]* 0,066287 [1] 0,069511 [2]* 0,066566 [2]	-54 / -8	±482
2L1 5×5CE	0,5; 0,5	288, 1248	S4 [1, 2]	0,065637 0,065915	-54 / -8	±482
2L2 5×5CE	0,5; 0,5	288, 1248	S4 [1]	0,071169 0,071466	-718 / 528	±338
3L1 5×5CE	0,5; 0,005; 0,5	480, 2016	S4 [1, 3]	0,064840 0,065761 0,065122	(2, 3): -56 / -2	(2, 3): ±472
3L2 5×5CE	0,5; 0,005; 0,5	480, 2016	S4 [1]	0,070295 0,071261 0,070594	(2, 3): -710 / 511	(2, 3): ±331
3L3 5×5CE	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	480, 2016	S4 [1, 2, 3]	0,065081 0,066135 0,065452	-31 / 28 -81 / 8	±495 ±498
3L4 5×5CE	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	480, 2016	S4 [1]	0,073525 0,074669 0,073926	-1124 / 761 -431 / 114	±319 ±233
3LNS0 5×5CE	0,1; 0,6; 0,3	480, 2016	S4 [1]	0,253255 0,254349 0,254676	-1441 / 621 -580 / 428	±180 ±200
3LNS1 5×5CE	0,3; 0,6; 0,1	480, 2016	S4 [1]	0,248663 0,248906 0,248329	-944 / 234 -148 / -36	±203 ±141

Примітки: 1. Точка M (4; 5) – середина сторони центрального елемента 5×5 – розбиття. 2. Зірочкою позначено максимальні прогини в точці C (5; 5) – центрі пластини. 3. У квадратних дужках вказано, на які саме шари накладено умови типу S4, в круглих – контактну поверхню. 4. Зліва від нахиленої риси приведено мінімальні контактні напруження, справа – максимальні.

Тестування РС для тришарових пластин проведено на структурі з тонким прошарком товщиною 1% від товщини двох основних шарів. Ймовірно, що розв'язок буде мало відрізнятися від розв'язку для двошарової структури без проміжного шару, що і було підтверджено чисельним експериментом (в таблиці 2L1, 2L2–3L1, 3L2). Далі досліджено контактні напруження в пластині з трьох ідентичних шарів при граничних умовах S4 [1,

2, 3] для всіх шарів або лише для нижнього шару S4 [1], що відповідає варіантам 3L3, 3L4. Відмітимо появу зон додатніх нормальних напружень (відриву) поблизу кутових точок при заданні ослаблених граничних умов (рис. 3). Характер розподілу дотичних контактних напружень для різних типів граничних умов і кількості шарів ($N = 2$ або 3) не змінюється.

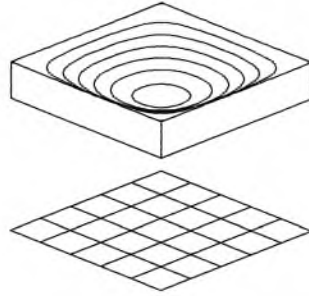


Рис. 1. Скінченноелементне розбиття і прогини w шаруватої пластини.

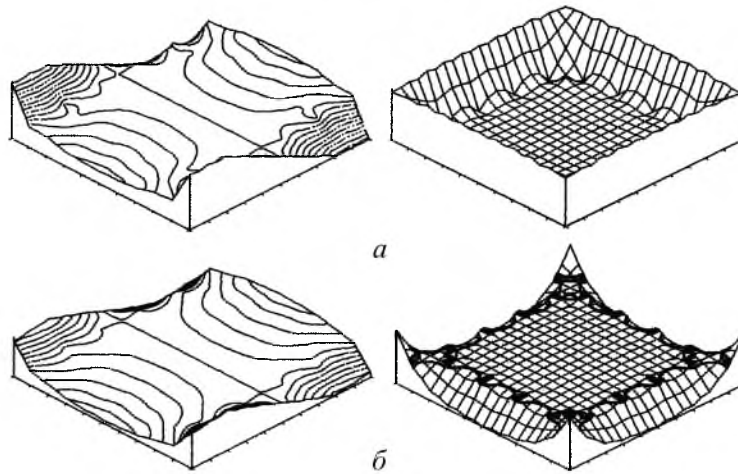


Рис. 2. Характер розподілу дотичних $\tau_{xz}^{(1,2)}$ (зліва) і нормальних $\sigma_{zz}^{(1,2)}$ (справа) контактних напружень у двохшаровій пластині для умов S4 [1, 2] (a) та S [1] (б).

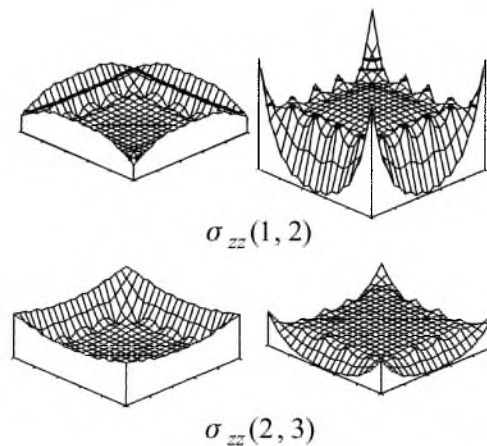


Рис. 3. Нормальні контактні напруження в тришаровій пластині. (Масштаб по вертикалі для умов S4 [1, 2, 3] (ліворуч) збільшено в десять раз відносно S4 [1] (праворуч).)

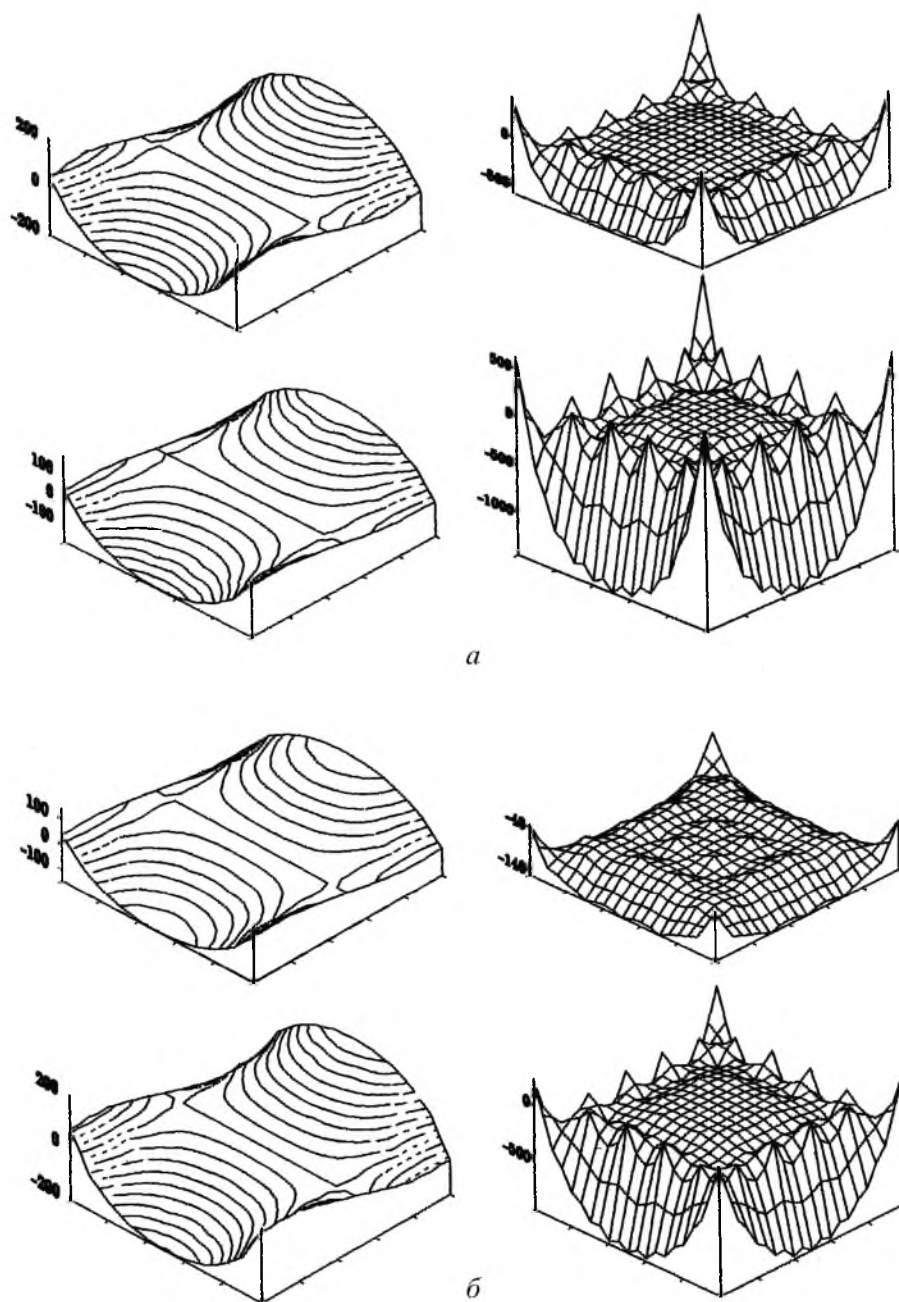


Рис. 4. Дотичні (зліва) і нормальні (справа) контактні напруження в несиметричній структурі з податливим на зсув заповнювачем: *a* – варіант 3LNS0; *б* – варіант 3LNS1. (Для кожного з варіантів: верхній ряд – на контактній поверхні (2,3), нижній ряд – (1,2).)

З метою ілюстрації можливостей чисельного дослідження розглянуто два випадки згину тришарових структур несиметричної будови 3LNS0 і 3LNS1 (таблиця і рис. 4) з товщиною шарів $2h^{(j)}$ відповідно $\{0,2; 1,2; 0,6\}$ і $\{0,6; 1,2; 0,2\}$ (нумерація, як і раніше, знизу вгору). Модуль Юнга E і

коефіцієнт Пуассона ν верхнього і нижнього несучих шарів такі ж, як і у попередніх випадках, а для другого шару-наповнювача прийнято модель трансверсально-ізотропного матеріалу: $E_1 / E = 1/10$; $E_2 = E_1$; $E_3 / E_1 = 5$; $G' / E_1 = 1/5$. Загальна симетрія задачі відносно осей $x, y = 0, 5l$ зберігається. У випадку 3LNS1, коли напруження сприймає тонкий несучий шар, рівень контактних напружень значно нижчий, а зони додатніх нормальних напружень виникають лише між нижнім (підкріпленим) шаром і середнім шаром-наповнювачем. Дотичні контактні напруження при перестановці верхнього і нижнього шару теж міняються місцями.

Таким чином, проведені розрахунки свідчать про принципову необхідність уточнених підходів до адекватного моделювання шаруватих структур. Побудований логічний ряд тестових задач підтверджує достовірність і точність отримуваних результатів. Можна зробити висновок про адекватність уточненої математичної моделі особливостям напружено-деформованого стану при згині дво- і тришарових пластин. Встановлено, що:

1) нормальні контактні напруження окрім зони крайового ефекту розподілені майже лінійно по товщині пакету ідентичних шарів, але переважають на краях дотичні напруження у випадку граничних умов S4 для всіх шарів, за винятком ослаблених граничних умов S4 [1];

2) умови шарнірного підкріплення лише нижнього шару практично не змінюють прогинів, але суттєво перерозподіляють контактні напруження в зоні крайового ефекту (підвищують нормальні і понижують дотичні контактні напруження);

3) розрахункова схема дозволяє розглядати геометричні й фізичні параметри шарів у широкому діапазоні, у тому числі враховувати наявність тонких проміжних шарів і несиметричність будови структури.

Значна кількість можливих контрольованих параметрів при дослідженні шаруватих структур, у тому числі кількість шарів і їх математична модель, потребують особливої уваги при формулюванні узагальнюючих результатів і рекомендацій. Однак можливість чисельного розрахунку конкретних об'єктів і більш оптимальний підбір параметрів при проектуванні елементів конструкцій шляхом повторного перерахунку за допомогою ефективної програмної реалізації представленого підходу, без сумніву, має не тільки теоретичне, але й практичне значення.

Резюме

На основе дискретного рассмотрения плоских слоев в рамках $\{1, 0\}$ -аппроксимации для теории тонких пластин предложено эффективную схему смешанного метода конечных элементов. Численно исследовано идеальный межслойный контакт в двух- и трехслойных структурах для разных вариантов условий шарнирного подкрепления сторон при изгибе внешним давлением. Отмечено эффекты концентрации нормальных контактных напряжений на кромках и их зависимость от конструкционной анизотропии в поперечном направлении.

1. *Василенко А. Т., Урусова Г. П.* Решение задачи об изгибе свободно опертой анизотропной эллиптической пластины // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 5. – С. 98 – 103.
2. *Марчук А. В.* Применение вариационного подхода для исследования напряженно-деформируемого состояния слоистых пластин на жестком основании // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 86 – 94.
3. *Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Київ: Вища шк., 1986. – 191 с.
4. *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
5. *Марчук М. В., Хом'як М. М.* Схема змішаного методу скінченних елементів для дослідження задачі про міжшаровий контакт в уточненій постановці. Повід. 1. Основні співвідношення й загальна методика побудови розрахункових схем у рамках $\{m, n\}$ -апроксимації // Пробл. прочности. – 2000. – № 2. – С. 118 – 127.
6. *Пелех Б. Л., Лазько В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
7. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 334 с.
8. *Еременко С. Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Изд-во “Основа” при Харьк. ун-те, 1991. – 272 с.
9. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 470 с.

Поступила 22. 12. 98