

Вынужденные установившиеся колебания гибких пластин при случайном узкополосном воздействии

В. А. Баженов, Е. С. Дехтярюк, Т. Г. Захарченко, О. А. Лукьянченко, В. Ф. Имдух

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

Рассмотрены вопросы, связанные с анализом режимов вынужденных колебаний гибких пластин при узкополосном случайном воздействии. Исследования нелинейных колебаний пластины выполнены на базе редуцированной дискретной модели, которая построена на основе вариационного принципа Гамильтона, методов конечных элементов и обобщенных координат. Динамическое состояние конструкции исследовано путем численного моделирования процесса колебаний при действии конкретной реализации узкополосного воздействия. Каждая реализация узкополосного случайного воздействия получена с помощью формирующего фильтра второго порядка и описывает гармонические колебания с медленно изменяющимися амплитудой и фазой. Исследованы сценарии переходов с одного режима колебаний пластины на другой, оценивается время пребывания ее в различных динамических состояниях.

Известно, что гибкие пластины и оболочки, подверженные интенсивному периодическому воздействию, представляют собой сложную динамическую систему, в которой в зависимости от величины параметров воздействия реализуются принципиально различные режимы колебаний. Процесс колебаний может сопровождаться такими физическими явлениями, как возникновение сложных резонансов, существование нескольких устойчивых режимов колебаний при одних и тех же параметрах внешнего воздействия, срыв колебательного режима, приводящий к изменению пространственно-временной конфигурации динамического состояния, стоячие или бегущие волны и др. [1]. Обусловленные этими явлениями качественные изменения динамического состояния часто приводят к значительному повышению напряжений в конструкциях, что существенно влияет на их эксплуатационную надежность и долговечность.

В работе рассматриваются вопросы, связанные с анализом режимов колебаний гибких пластин при узкополосном случайном воздействии. Естественно, что при воздействии на тонкостенную конструкцию случайной динамической нагрузки особенно проявляются сложности возбуждаемых колебательных процессов. Специфика этого вида нагружения заключается в том, что любую реализацию стационарного узкополосного случайного процесса можно представить в виде гармонического процесса с фиксированной частотой и медленно изменяющимися амплитудой и фазой. Таким образом, зная закономерности изменения динамических состояний конструкции при изменении интенсивности детерминированного гармонического нагружения фиксированной частоты, можно в определенной степени прогнозировать эволюцию режимов случайных колебаний при узкополосном воздействии.

Согласно вышеизложенному, вначале исследуются закритические режимы вынужденных установившихся колебаний гибких пластин при детерминированном гармоническом воздействии. Затем изучаются возможные подходы к анализу случайных колебаний при узкополосном воздействии. И наконец, приводятся результаты численного исследования данной задачи.

Коротко остановимся на построении дискретной динамической модели [2]. Теоретической основой проведенных исследований является геометрически нелинейная теория оболочек. Принято, что прогибы оболочки могут иметь порядок толщины (средний изгиб), деформации остаются малыми, материал конструкции является однородным изотропным, работающим в условиях, когда справедлив закон Гука, не учитываются эффекты, связанные с распространением упругих волн в массиве материала. Континуальная динамическая модель оболочки формируется на основе вариационного принципа Гамильтона. Преобразование континуальной модели движения в дискретную проводится на основе конечноэлементной аппроксимации в сочетании с методом обобщенных координат. Редуцирование полной конечноэлементной динамической модели оболочек осуществляется на базе метода обобщенных координат.

Для получения редуцированной дискретной динамической модели конструкции применен следующий вариант метода обобщенных координат. Изгибные составляющие поля перемещений (прогиб W и углы поворота φ_α , $\alpha = 1, 2$) хорошо аппроксимируются линейной комбинацией нескольких низших собственных форм изгибных колебаний. Для более точной аппроксимации мембранных перемещений (перемещения в срединной поверхности V_α , $\alpha = 1, 2$), при колебаниях с конечными амплитудами, в качестве базисных кроме изгибных форм используются дополнительные функции. Добавки к мембранным составляющим поля перемещений определяются из линейной краевой задачи, правая часть которой представляет собой нагрузку, выраженную квадратичной формой от нормальных перемещений срединной поверхности. В соответствии с методом обобщенных координат поле перемещений представляется в виде

$$\begin{aligned} V_\alpha &= V_\alpha^i y_i(t) + \Delta V_\alpha^{ij} y_i(t) y_j(t); \\ W &= W^i y_i(t); \quad \varphi_\alpha = \varphi_\alpha^i y_i(t), \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $V_\alpha^i, W^i, \varphi_\alpha^i$ – изгибные формы; ΔV_α^{ij} – дополнительные базисные функции; $y_i(t)$ – обобщенные координаты. На основе (1) выполняется редуцирование полной конечноэлементной системы уравнений движения конструкции. Учет диссипативных сил производится по модели частотно-независимого демпфирования [3]. Диссипативные члены вводятся непосредственно в предварительно полученные уравнения для обобщенных координат (метод квазинормальных координат).

В настоящей работе предполагается, что коэффициенты потерь по всем формам одинаковы $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \gamma$, а параметры затухания ε_i , вводимые в уравнения движения оболочечной системы, вычисляются по формуле

$2\varepsilon_i = \gamma_i$. Ниже считается, что нагрузка, действующая на тонкостенную конструкцию, может быть представлена в виде произведения функции (возможно, обобщенной) пространственных переменных на функцию времени. Первая функция характеризует пространственную конфигурацию нагрузки, вторая – изменение интенсивности во времени.

В рассматриваемой постановке изучение нелинейных колебаний пластин и оболочек, с математической точки зрения, сводится к задаче о построении и исследовании устойчивости установившихся решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{y}_i + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_{ijkl} y_j y_k y_l = \lambda p_i f(t), \quad i=1, \dots, n, \quad (2)$$

где ω_i – собственные частоты; β_{ijkl} – коэффициенты матриц кубической нелинейности; p_i – i -я составляющая вектора обобщенной нагрузки, зависящего от пространственной конфигурации внешнего воздействия; $f(t)$ – функция, описывающая закон изменения воздействия во времени; λ – безразмерный параметр, характеризующий интенсивность нагрузки.

Как указывалось выше, исследование случайных колебаний конструкции при действии узкополосной нагрузки целесообразно предварить изучением детерминированных установившихся колебаний, обусловленных гармоническим воздействием, частота которого совпадает с несущей частотой узкополосной нагрузки, т.е. в системе (2) принять $f(t) = \cos(\omega_p t)$, где ω_p – несущая частота.

Исследование установившихся режимов колебаний конструкции при изменении параметров внешнего гармонического воздействия осуществляется по следующей схеме [4]. Проводится построение регулярных решений системы (2) при изменении параметров внешнего воздействия в заданной области их значений. Анализируется устойчивость этих решений и определяются особые точки, которые отвечают критическим режимам колебаний. Исследуется бифуркация критических режимов колебаний в особых точках. Изучается эволюция закритических режимов движения при изменении параметров воздействия и исследуется их устойчивость. В качестве аппарата численного исследования регулярных режимов колебаний при гармоническом воздействии используется метод продолжения решения по параметру. Исследование устойчивости периодических колебаний осуществляется на основе теории первого приближения Ляпунова – уравнений в вариациях. При анализе динамических состояний пластины путем прямого численного построения траекторий движения для идентификации колебательных режимов используются метод сечения Пуанкаре и Фурье-анализ.

В ходе указанных выше исследований определяется структура области неустойчивости вынужденных колебаний рассматриваемой системы в окрестности частоты ω_p и строится кривая реакции на частоте ω_p . Именно эти результаты помогают провести анализ случайных колебаний при переходе к узкополосному возбуждению $f(t)$ с несущей частотой ω_p .

Ниже приведены результаты численного исследования нелинейных установившихся колебаний шарнирно опертой квадратной в плане пластины (рис. 1,а) с неподвижными краями при действии равномерно распределенного нормального давления, изменение интенсивности которого описывается узкополосным случайным процессом $f(t)$. Параметры пластины следующие: длина стороны $l=0,4$ м, толщина $h=0,001$ м, модуль упругости $E=68,67$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu=0,3$, плотность материала $\rho=2,75 \cdot 10^3$ кг/м³. Коэффициент потерь γ принят равным 0,05. Нормальное давление определяется выражением $q=\lambda q_0 f(t)$, где $q_0=9,8$ Па. Для построения расчетной динамической модели определены девять низших собственных форм изгибных колебаний. На рис. 1,б изображены соответствующие этим формам линии нулевого прогиба (узловые линии), там же указаны частоты собственных колебаний. Первая, пятая, шестая и девятая формы имеют симметричную пространственную конфигурацию, а вторая, третья, четвертая, седьмая и восьмая – кососимметричную. Рассматриваются случайные колебания, возбуждаемые внешним воздействием, для которого функция $f(t)$ имеет несущую частоту $\omega_p=3,25\omega_1$, где ω_1 – низшая частота собственных колебаний. Вначале исследуются детерминированные установившиеся колебания, обусловленные гармонической нагрузкой: $f(t)=\cos(\omega_p t)$. Кратко изложим основные данные, которые используются при анализе случайных колебаний. Более подробно они описаны в [5].

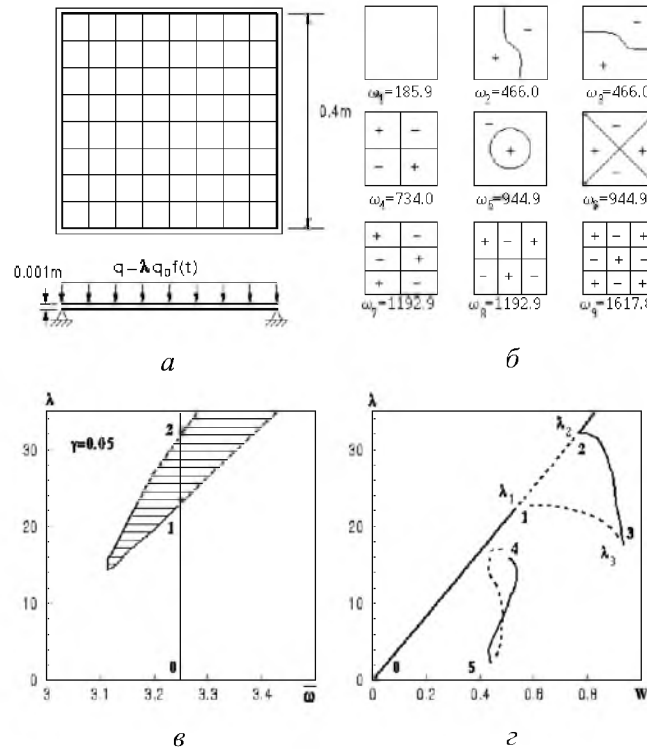


Рис. 1. Расчетная схема МКЭ шарнирно опертой пластины (а), собственные формы ее колебаний (б), а также область неустойчивости вынужденных колебаний (в) и кривые реакции режимов вынужденных установившихся колебаний (z).

В результате редуцирования исходной задачи с помощью базиса ортонормированных собственных форм получена система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат (2).

В процессе колебаний при определенных сочетаниях параметров нагружения $\lambda, \bar{\omega}_p$ ($\bar{\omega}_p = \omega_p / \omega_1$) реализуемые динамические состояния могут терять устойчивость вследствие проявления различных резонансов. Этим резонансам на плоскости параметров $\lambda - \bar{\omega}$ соответствуют некоторые области неустойчивости.

Исследовались нелинейные вынужденные колебания пластины в диапазоне частот внешнего воздействия $\bar{\omega}_p \in [3,0 \dots 3,5]$. Структура области неустойчивости основного режима колебаний в рассматриваемом диапазоне частот представлена на рис. 1,в. При малых уровнях нагружения в этом диапазоне частот пластина вообще не проявляет никаких резонансных свойств. Реализуется режим T -периодических колебаний ($T = 2\pi / \bar{\omega}_p$) с симметричной пространственной конфигурацией. На более высоких уровнях нагружения $\lambda \in [6,0 \dots 35,0]$ имеет место зона неустойчивости, которая отвечает комбинационному резонансу суммарного типа, обусловленному взаимодействием двух первых собственных форм симметричных изгибных колебаний пластины $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{5,6}) / 2$.

На рис. 1,г показаны кривые реакций вынужденных нелинейных колебаний пластины при гармоническом воздействии $\lambda p_i \cos(\bar{\omega}_p t)$ в координатах $W - \lambda$, где W – величина, равная максимальному значению безразмерного прогиба в центре пластины, достигаемого в процессе колебаний ($W = W_{\max} / h$). Линия $0-1-2$ на плоскости $\lambda - \bar{\omega}$ (рис. 1,в) при фиксированной частоте отображается на вертикальную прямую $0-1-2$. Участок кривой реакции $0-1$ соответствует режимам T -периодических колебаний с симметричной пространственной конфигурацией. Ниже этот режим колебаний назван основным режимом колебаний, или первым состоянием. В точке 1 прямая линия $0-1-2$ (рис. 1,в), соответствующая основному режиму колебаний при частоте внешнего воздействия $\bar{\omega}_p = 3,25$, пересекает нижнюю границу зоны неустойчивости комбинационного резонанса. Точка 1 кривой реакции является особой ($\lambda_1 = 24,0$). В ней происходит бифуркация T -периодического режима колебаний в режим квазипериодических колебаний с симметричной пространственной конфигурацией. В бифуркационной точке отношение двух основных частот колебаний $\bar{\omega}_p$ и $\bar{\omega}_0$ равно $r = 0,3665$ ($r = \bar{\omega}_0 / \bar{\omega}$) [6]. Верхняя граница области неустойчивости пересекается вертикальной линией в точке 2 (рис. 1,в). Эта точка также является бифуркационной, $r = 0,39957$. В точках 1 и 2 от кривой реакции ответвляется участок $1-3-2$. Он соответствует режиму квазипериодических колебаний. Построение кривой $1-3-2$ проводилось в частотной области. При проверке устойчивости использовался метод сечения Пуанкаре, Фурье-анализ, определялся спектр ляпуновских характеристических показателей. Участок кривой реакции $3-2$ соответствует устойчивым режимам квазипериодических колебаний, при этом параметр интенсивности внешнего воздействия изменяется в диапазоне от $\lambda_3 = 18,0$ до $\lambda_2 = 30,0$. Ниже этот режим колебаний назван вторым динамическим состоянием. В точке 3 происходит потеря устойчивости режима квазипериодических колебаний, и система из второго состояния переходит в первое.

Кроме рассмотренных возможных режимов колебаний обнаружено существование режима установившихся колебаний, отвечающих $3T$ -периодическим колебаниям с симметричной пространственной конфигурацией.

Эти динамические состояния будем называть третьим состоянием (на рис. 1, z ему соответствует замкнутая ветвь 4–5). Для основного режима колебаний при $\lambda = 16,059$ отношение мнимой части $\text{Im} \sigma_1 = \bar{\omega}_0$ главного характеристического показателя системы уравнений в вариациях к частоте внешнего воздействия равно $r = 1/3$ [6]. Если бы $\text{Re} \sigma_1 = 0$, то соответствующее динамическое состояние было бы критическим, и при потере устойчивости осуществлялся переход на режим $3T$ -периодических колебаний [6]. В данном случае основной режим колебаний является устойчивым ($\text{Re} \sigma_1 < 0$), и кривая 4–5, соответствующая режиму $3T$ -периодических колебаний, “притягивается” к той точке кривой 0–1–2, в которой $r = 1/3$, при этом не пересекая последнюю. В окрестности значений параметра интенсивности $\lambda = 16$ режимы T -периодических колебаний устойчивы в малом и неустойчивы в большом, при конечных возмущениях может реализоваться переход на режим $3T$ -периодических колебаний.

Проведенный анализ показывает, что при гармоническом воздействии с частотой $\omega_p = 3,25\omega_1$ в диапазоне значений параметра интенсивности $\lambda \in [0...35]$ при потере устойчивости T -периодического режима колебаний можно выйти только на режимы установившихся колебаний с симметричной пространственной конфигурацией. Переход на режимы установившихся колебаний с более сложной пространственной конфигурацией возможен при $\lambda > 50$ [5]. Поэтому при исследовании колебаний в диапазоне $\lambda \in [0...35]$ в представлении (1) можно не учитывать кососимметричные формы колебаний, т.е. при построении расчетной динамической модели достаточно использовать только первые две симметричные формы: в системе (2) принимается $n = 2$. Это обстоятельство существенно уменьшает объем вычислений при исследовании случайных колебаний.

Теперь пусть изменение во времени внешнего воздействия описывается стационарным случайным процессом $f(t)$, односторонняя спектральная плотность которого записывается в виде

$$G(\omega) = \frac{4\sigma^2\xi}{\pi} \frac{\omega_p^3}{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + (2\xi\omega_p\omega)^2}. \quad (3)$$

При $\xi \ll 1$ $f(t)$ является узкополосным случайным процессом с несущей частотой ω_p , практически вся энергия процесса сосредоточена в узком диапазоне частот порядка $\xi\omega_p$ в окрестности частоты $\omega = \omega_p\sqrt{1-2\xi}$, где спектральная плотность (3) достигает максимума. Случайный процесс $f(t)$ представляется в виде

$$x(t) = a(t)\cos(\omega_p t + \varphi(t)), \quad (4)$$

где амплитуда $a(t)$ и фаза $\varphi(t)$ – стационарные случайные процессы, каждая реализация которых – медленно изменяющаяся функция времени.

Таким образом, каждая реализация случайного процесса $f(t)$ описывает гармонические колебания с частотой ω_p и медленно изменяющимися амплитудой и фазой.

При изучении случайных колебаний система (2) представляет собой систему стохастических дифференциальных уравнений, где $y_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) – стационарно связанные случайные процессы, определяющие вероятностные характеристики эволюции соответствующих обобщенных координат. Предположение о стационарности во времени случайных процессов $y_i(t)$ означает, что в рассматриваемой постановке считается, что все переходные процессы закончились и система вышла на режим установившихся колебаний. Определение вероятностных характеристик решений системы (2) представляет собой классическую задачу нелинейной статистической динамики. Обзор методов решения этих задач изложен в [7]. Основные проблемы, которые здесь возникают, связаны с размерностью системы.

Теоретически наиболее полное описание вероятностных характеристик решений системы (2) может быть получено на основе методов теории марковских процессов с помощью уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), которое представляет собой уравнение в частных производных относительно плотности вероятностей перехода. Однако прямое решение этого уравнения для конкретных задач сопряжено с существенными трудностями. Дело в том, что число пространственных переменных в уравнении Фоккера–Планка–Колмогорова равно размерности фазового пространства системы (2) плюс порядок формирующего фильтра узкополосного процесса $f(t)$.

Случайный процесс $f(t)$ со спектральной плотностью (3) может быть получен с помощью формирующего фильтра второго порядка, т.е. $f(t)$ удовлетворяет уравнению [8]

$$\ddot{f}(t) + 2\xi\omega_p\dot{f}(t) + \omega_p^2 f(t) = 2\sigma\omega_p\sqrt{\xi\omega_p}z(t), \quad (5)$$

где $z(t)$ – нормальный процесс белого шума.

В данном случае в системе (2) $n=2$, и с учетом фильтра второго порядка (5) размерность соответствующего фазового пространства равняется шести. Таким образом, исследование вероятностных характеристик решений системы (2) с помощью уравнения ФПК не представляется возможным.

Эволюция динамических состояний исследуется численным методом. Системы (1), (5) интегрируются методом Рунге–Кутты с шагом интегрирования $\Delta t = 0,0604$ (здесь и ниже время безразмерное). Полагали, что вначале пластина находится в состоянии покоя. Переходной процесс, который по времени занимает $70000T_p$, пропускали. В конце переходного процесса время t принимается равным нулю, при этом амплитуда внешнего воздействия $a(0) = 16,24 < \lambda_1$ (рис. 1,з). В это время система находится в первом состоянии.

Анализ результатов численного моделирования показывает, что можно выделить три характерных типа случайного колебательного режима: первый режим – это узкополосные колебания, несущая частота которых равна

несущей частоте внешнего воздействия ω_p ; второй – случайные колебания, в спектре которых четко выделяются три частоты $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$; третий – с двумя характерными частотами $\omega_p/3$ и ω_p . Если сравнивать эти динамические состояния с рассмотренными выше установившимися колебаниями под действием гармонической нагрузки, то первый режим соответствует T -периодическим колебаниям (первое состояние), второй – квазипериодическим колебаниям $\omega^{(1)} = \omega_p - \omega_0$, $\omega^{(2)} = \omega_p$, $\omega^{(3)} = \omega_p + \omega_0$, где ω_0 – автоколебательная частота (второе состояние), третий – $3T$ -периодическим колебаниям (третье состояние). На рис. 2 схематически показано изменение усредненных характеристик амплитуды внешнего воздействия $\lambda(t)$ и перемещений центральной точки пластины $W(t)$ за время 200000, что составляет $103450 T_p$.

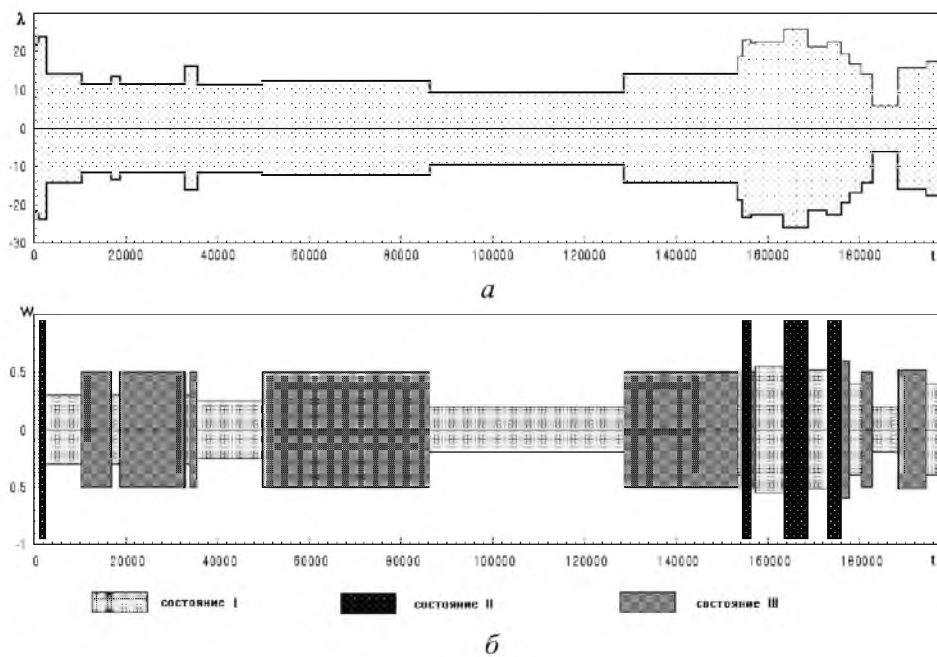


Рис. 2. Схематизированные структуры амплитуды нагружения (а) и реакции шарнирно опертой пластины (б).

Детальная структура случайной нагрузки, характеризующая различные сценарии перехода с одного режима колебания на другой, и соответствующие ей перемещения центральной точки пластины для отдельных промежутков времени показаны на рис. 3, 4.

Рис. 3,а иллюстрирует изменение амплитуды внешнего воздействия λ и перемещений центральной точки пластины W в интервале времени $t \in [0...4800]$. За указанный промежуток времени произошло два скачка: с режима узкополосного колебания, несущая частота которого равна несущей частоте внешнего воздействия $\bar{\omega}_p$ (первое состояние), на случайный колебательный режим, в спектре которого проявляются три несущие частоты: $\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_p$, $\bar{\omega}_p + \bar{\omega}_0$, и обратно. При $t = 1160$ ($\approx 600 T_p$) произошел переход с первого состояния на второе, при этом амплитуда внешнего

воздействия $\lambda = 24,0$ (рис. 3,а). В промежутке времени $t \in [1160...2707]$ ($\approx 800T_p$) наблюдалось второе состояние. При $t = 2707$ ($\approx 1400T_p$) произошел переход со второго состояния на первое, амплитуда случайного воздействия при этом $\lambda = 18,0$ (рис. 3,а).

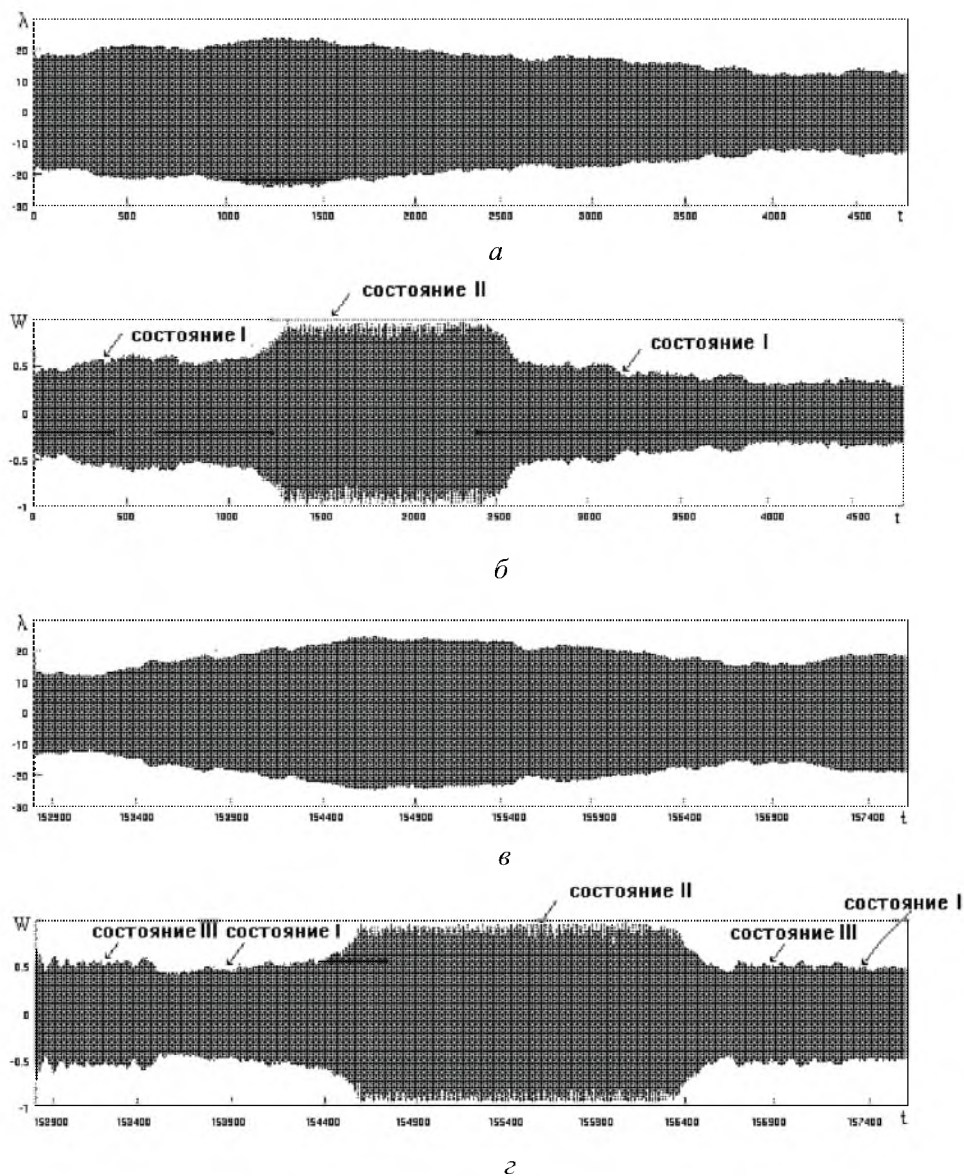


Рис. 3. Реализации случайного нагружения и реакции шарнирно опертой пластины для различных интервалов времени: а, б – $t \in [0...4800]$; в, г – $t \in [152800...157600]$.

На рис. 5,а–к показаны локальные структуры амплитуды нагружения и случайных колебаний пластины при $t \in [0...500]$ и $t \in [1860...2360]$ ($\approx 250T_p$) соответственно для первого и второго состояний. Амплитуда внешнего воздействия первого состояния узкополосного колебания пластины $\lambda(t)$ и соответствующий ей спектр показаны на рис. 5,а,б. Спектр такого режима

установившихся колебаний представляет собой одну линию на частоте $\bar{\omega}_p = 3,25$ и имеет значение $G(\bar{\omega}_p) = 0,4$. Перемещение центральной точки пластины W и соответствующий ей спектр приведены на рис. 5,в,г. Значение W колеблется в диапазоне $[0,4...0,65]$. Из спектра перемещений видно, что реализуется режим узкополосных колебаний с несущей частотой, равной несущей частоте внешнего воздействия. Спектр имеет значение $G(\bar{\omega}_p) = 2,2 \cdot 10^{-5}$. Рис. 5,д иллюстрирует отображение Пуанкаре для этого режима колебаний. При детерминированном подходе отображение Пуанкаре представляет собой одну точку, в нашем случае его размытость объясняется изменением амплитуды и фазы в представлении $W(t) = W_0(t) \cos(\bar{\omega}_p t + \varphi_0(t))$.

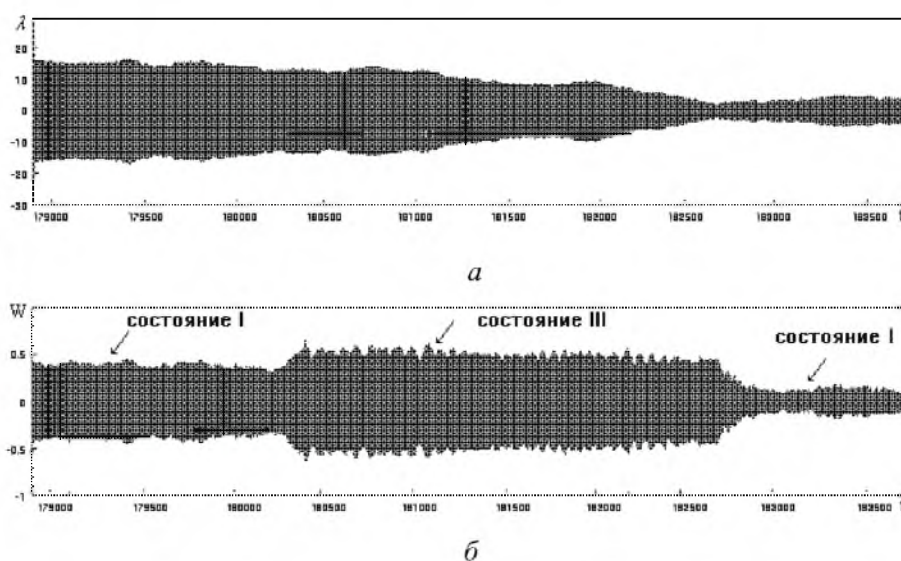


Рис. 4. Реализации случайного нагружения и реакции шарнирно опертой пластины при $t \in [178900...183700]$.

Для второго состояния амплитуда случайного воздействия $\lambda(t)$ и соответствующий ей спектр показаны на рис. 5,е,ж. Спектр представляет собой одну линию на частоте $\bar{\omega}_p = 3,25$ и имеет значение $G(\bar{\omega}_p) = 0,05$. Перемещение центральной точки пластины для этого состояния приведено на рис. 5,з. Из рис. 5,и видно, что реализуется режим случайных колебаний, в спектре которого проявляются три несущие частоты: $\bar{\omega}_p$; $\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_0$; $\bar{\omega}_p + \bar{\omega}_0$, где $\bar{\omega}_0$ – автоколебательная частота; при этом $G(\bar{\omega}_p) = 1,4 \cdot 10^{-5}$, $G(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_0) = 2,8 \cdot 10^{-5}$, $G(\bar{\omega}_p + \bar{\omega}_0) = 0,2 \cdot 10^{-5}$ соответственно. Отображение Пуанкаре (рис. 5,к) для этого состояния имеет явно выраженный рисунок замкнутого кольца, а его размытость объясняется влиянием случайного характера.

Следует отметить, что сценарий перехода с одного состояния на другое на этом отрезке реализации полностью совпадает со сценарием, который определяется квазистатическим подходом в соответствии с кривой реакций (рис. 1,г).

Характер колебательного процесса в интервале $t \in [152800...157600]$ несколько другой (рис. 3, в, г). На рис. 1, г, иллюстрирующем кривые реакций при детерминированном гармоническом нагружении, отмечается замкнутый контур, соответствующий $3T$ -периодическим колебаниям. В случае детерминированных колебаний не реализуется выход на этот режим колебаний при потере устойчивости первого и второго состояния, так как он возможен только при нелокальных возмущениях. При узкополосном воздействии ситуация иная. Здесь реализуется выход на режим узкополосных колебаний с несущей частотой $\bar{\omega}_p / 3$ (третье состояние) при потере устойчивости как первого, так и второго состояния.

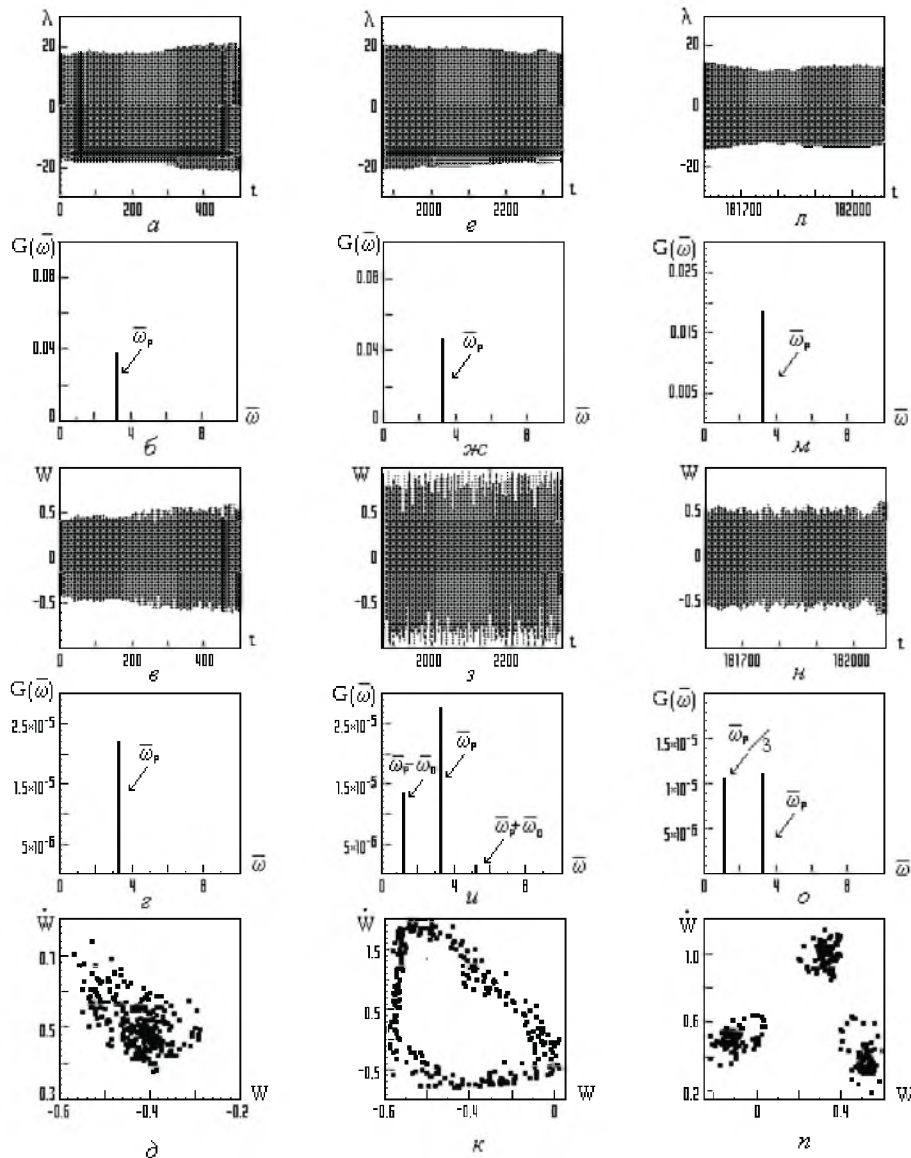


Рис. 5. Спектральные характеристики и сечения Пуанкаре реакций системы на случайное узкополосное воздействие.

В интервале $t \in [152800...153504] (\approx 350T_p)$ наблюдается случайный колебательный режим, в спектре которого проявляются две несущие частоты: $\bar{\omega}_p / 3$ и $\bar{\omega}_p$. При $t=153504$ и амплитуде внешнего воздействия $\lambda=17,5$ происходит скачок на режим узкополосных колебаний, несущая частота которых равна несущей частоте внешнего воздействия $\bar{\omega}_p = 3,25$. В интервале $t \in [153504...154374] (\approx 450T_p)$ установился вышерассмотренный режим, соответствующий первому состоянию. При $t=154374$ и $\lambda=24,0$ имеет место переход с первого состояния на случайный колебательный режим, в спектре которого проявляются три несущие частоты: $\bar{\omega}_p$; $\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_0$; $\bar{\omega}_p + \bar{\omega}_0$. В интервале $t \in [154374...156307] (\approx 1000T_p)$ установился режим, соответствующий второму состоянию. При $t=156307$ и амплитуде внешнего воздействия $\lambda=17,5$ произошел скачок с первого состояния на режим случайных колебаний, соответствующий третьему состоянию. Этот режим наблюдается в течение $t \in [156307...157370] (\approx 550T_p)$, после чего происходит переход на режим узкополосных случайных колебаний с одной несущей частотой $\bar{\omega}_p$.

Поведение узкополосного случайного нагружения (рис. 3,в) в указанном интервале времени имеет довольно плавные переходы в моменты времени, когда происходят скачки с одних режимов колебаний на другие, по сравнению с изменениями перемещений центральной точки гибкой пластины в том же интервале времени (рис. 3,з). Следует также отметить частый характер изменения состояний системы за сравнительно короткий интервал времени и наличие разных видов переходов: с третьего состояния на первое, с первого – на второе, со второго – на третье и с третьего – на первое. Детальная структура случайной нагрузки и соответствующее ей перемещение центральной точки пластины при $t \in [178900...183700]$ (рис. 4) характеризует сценарий перехода с первого состояния на третье и с третьего на первое.

Рис. 5,л–о иллюстрирует локальную структуру поведения системы при $t \in [181600...182100] (\approx 250T_p)$ для случайных колебаний, в спектре которых проявляются две несущие частоты: $\bar{\omega}_p / 3$, $\bar{\omega}_p$ (рис. 5,и). На рис. 5,л показано отображение Пуанкаре для третьего состояния. Так, при детерминированном подходе для $3T$ -периодических колебаний отображение Пуанкаре имеет три несвязных точки. В нашем случае наблюдаются три группы точек, что объясняется влиянием случайного процесса.

Резюме

Розглядаються питання щодо аналізу режимів вимушених коливань гнучких пластин при вузькополосному випадковому впливі. Дослідження нелінійних коливань пластины виконано на базі редукованої дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона, методу скінченних елементів та узагальнених координат. Динамічний стан конструкції при вузькосмужному навантаженні досліджується шляхом чисельного моделювання процесу коливань під дією конкретної реалізації вузькосмужного впливу. Кожна реалізація вузькосмужного випадкового впливу отримана за допомогою формуючого фільтру другого порядку і описує гармонічні коли-

вання, в яких амплітуда й фаза повільно змінюються. Досліджуються сценарії переходів з одного режиму коливань пластини на інший, оцінюється час перебування її в різних динамічних станах.

1. *Баженов В. А., Дехтярюк Е. С., Захарченко Т. Г.* Регулярные и хаотические режимы вынужденных установившихся колебаний гибких пластин и оболочек при гармоническом воздействии: Тр. 18-й Международ. конф. по теории оболочек и пластин (Саратов, 29 сент. – 4 окт.). – Саратов, 1997. – Т. 2. – С. 3 – 8.
2. *Дехтярюк Е. С., Лумельский Е. Д.* Численное построение нелинейных динамических моделей пологих оболочек и пластин // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1984. – Вып. 45. – С. 5 – 9.
3. *Цейтлин А. И., Кусаинов А. А.* Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. – Алма-Ата: Наука, 1987. – 240 с.
4. *Баженов В. А., Дехтярюк Е. С., Захарченко Т. Г.* Нерегулярні режими сталих коливань циліндричної панелі // Доп. НАНУ. – 1995. – № 8. – С. 40 – 44.
5. *Баженов В. А., Дехтярюк Е. С., Захарченко Т. Г., Петрина Ю. С.* Регулярные режимы вынужденных установившихся колебаний гибких пластин при гармоническом воздействии // Там же. – 1999. – № 1. – С. 57 – 65.
6. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 301 с.
7. *Дехтярюк Е. С., Мельник-Мельников П. Г.* Методы нелинейной статистической динамики. Современное состояние и тенденции развития // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 8. – С. 64 – 72.
8. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1976. – 319 с.

Поступила 28. 05. 99