УДК 539.3

Метод уменьшенной жесткости в теории выпучивания подкрепленных оболочек*

Дж. Г. А. Кролл[а], Г. Д. Гавриленко[б]

[а] Университетский колледж, Лондон, Великобритания

[б] Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Метод уменьшенной жесткости используется для анализа нижних пределов нагрузок выпучивания цилиндрических оболочек, подкрепленных стрингерами или шпангоутами. Результаты экспериментальных исследований сопоставлены с данными, полученными упомянутым методом. Рассмотрены вопросы внедрения результатов исследования методом уменьшенной жесткости в практику проектирования, а также перспективы его развития и обобщения.

Введение. Проанализированы результаты исследования выпучивания цилиндров, подкрепленных стрингерами и шпангоутами. Результаты экспериментальных исследований сопоставлены с данными, полученными по предложенной теории. Затронуты некоторые аспекты, касающиеся внедрения результатов исследования, полученных методом уменьшенной жесткости (МУЖ), в практику проектирования, а также перспектив его развития и обобщения.

1. **Анализ критических нагрузок стрингерных оболочек по методу уменьшенной жесткости [2]**. В 1934 г. Доннелл предположил, что в послекритическом состоянии средние нелинейные окружные напряжения n''_θ, связанные с деформациями в критической моде $w_{i,j}$, вероятно, исчезают [3]. Поэтому он [3], а также авторы работ [4,5] сознательно или слепо использовали этот аргумент, чтобы обосновать, какие моды должны включаться в нелинейный анализ, чтобы модель отражала потерю жесткости оболочкой. Предлагаемый здесь подход – несколько иной путь использования такого явления.

Нелинейные напряжения n''_θ обеспечивают стабилизирующий вклад в сопротивление продольно сжатых оболочек выпучиванию, и наоборот, оболочка, которая утратила нелинейную кольцевую жесткость или напряжения вследствие связей, установленных Доннеллом [3], обладает значительно меньшей несущей способностью.

На рис. 1 показано, что несущая способность оболочки с уменьшенной жесткостью, определяемая напряжениями σ^*_{cm}, будет исчерпана на ранней стадии ее послекритического поведения. Максимальные нагрузки σ_b, найденные для несовершенной конструкции при нелинейном анализе и очень малых критических деформациях, будут асимптотически стремиться приблизиться сверху к несущей способности оболочки с уменьшенной жесткостью, когда начальные несовершенства будут возрастать. Следовательно, теория оболочек, в которой нелинейные напряжения n''_θ или связанная с

* Настоящая работа является продолжением опубликованной ранее обзорной статьи [1].

ними энергия $\tilde{\tilde{V}}_{2M}^{\theta}$ будут исключены (согласно модели Доннелла о связанных модах), обеспечивает нижний предел сопротивления упругому выпучиванию. Опыты на гладких [6] и стрингерных [7] оболочках свидетельствуют, что при средних уровнях начальных несовершенств нижние пределы теории и экспериментов сближаются.

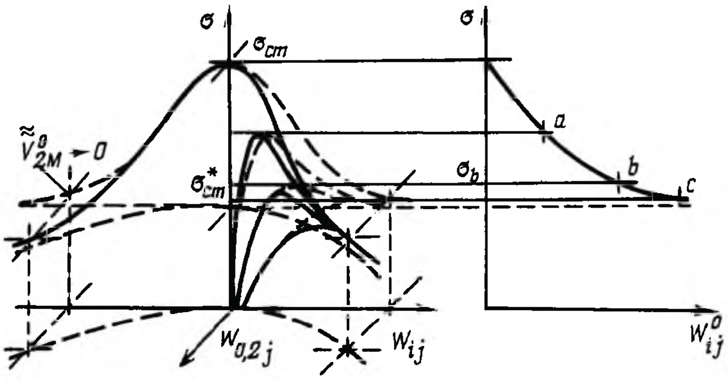


Рис. 1. Зависимость сжимающих напряжений σ от прогиба w_{ij} для несовершенного цилиндра: $w_{0,2j}$ – вторичная осесимметричная мода; w_{ij}^{0} – несовершенство в критической моде.

Условие критического равновесия при классическом анализе выражается в форме

$$V_2 = U_{2B}^{x} + U_{2B}^{x\theta} + U_{2B}^{\theta} + U_{2M}^{x} + U_{2M}^{x\theta} + U_{2M}^{\theta} +$$

$$+ \tilde{V}_{2M}^{x} + \tilde{\tilde{V}}_{2M}^{x} + \tilde{V}_{2M}^{\theta} + \tilde{\tilde{V}}_{2M}^{\theta} \equiv 0, \qquad (1)$$

где соответствующие обозначения взяты из [1, 2].

Чтобы получить критические напряжения σ_c^* при уменьшенной жесткости, необходимо в уравнении (1) положить $\tilde{\tilde{V}}_{2M}^{\theta} = 0$. В дальнейшем все выкладки аналогичны анализу классических критических нагрузок [1]. Изменившиеся коэффициенты матрицы $[Q]$ приведены в работе [2].

Решение уравнения (1) при новых коэффициентах дает спектр критических напряжений σ_c^* при уменьшенной жесткости, что показано на рис. 2, где $\sigma_c^* / \sigma_{cl} = f(i)$; σ_{cl} – классические критические напряжения ортотропной оболочки; i – окружное число волн. Минимальные критические напряжения σ_{cm}^* при уменьшенной жесткости для данной ортотропной оболочки немного выше, чем для обшивки.

Влияние геометрии оболочки на критические напряжения σ_c иллюстрирует рис. 3. Площадь поперечного сечения неизменна, а изменяется $L = l / r$ ($R = r / t = 400$, $D_s = d_s / t_s = 3$, $T_s = t_s / t = 3$, $n_s = 40$, где d_s, t_s – высота и ширина подкрепления; n_s – число стрингеров). Существуют два предельных случая: первый соответствует очень малым L, и в этой области все кривые сходятся асимптотически к прямой линии, которая определяет критические напряжения плоской пластины, где энергия осевого изгиба $U^{*}_{2\text{В}}$ преобладает. Второй случай соответствует очень большим L, где оболочка выпучивается по критической моде $i_c = 1$, как колонна Эйлера. В промежуточной зоне различие между σ_c и σ_{cl} увеличивается с ростом L, причем σ_{cl} зависит также от L. Величины σ_c^* характеризуются сильной зависимостью от L и достигают малых значений при больших L.

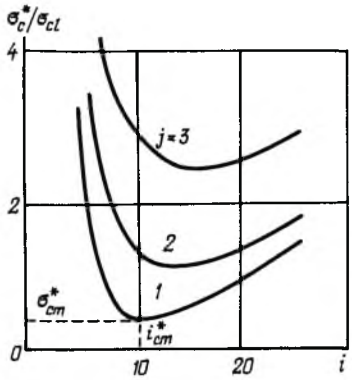


Рис. 2. Зависимость безразмерных критических напряжений σ_c^* / σ_{cl}, определенных по методу уменьшенной жесткости, от окружного числа волн i для ортотропного цилиндра.

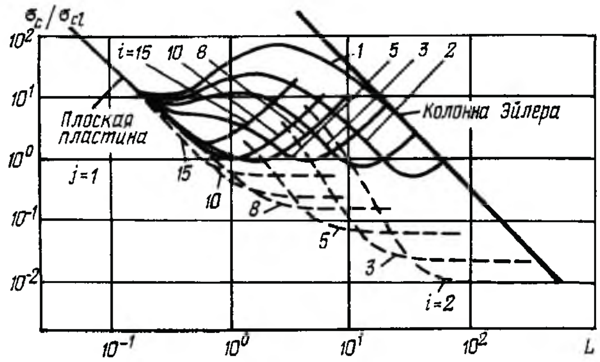


Рис. 3. Зависимость безразмерных критических напряжений σ_c / σ_{cl} от безразмерного параметра длины $L = l / r$ для ортотропного цилиндра при различных значениях i и $j = 1$. (Сплошные линии – классический анализ; штриховые – МУЖ.)

Зависимость минимальных критических напряжений от безразмерной длины L при различных значениях R представлена на рис. 4. С изменением R жесткость при растяжении и изгибе принята постоянной. Критическая нагрузка при уменьшенной жесткости возрастает с уменьшением R, что означает снижение чувствительности к несовершенствам.

Для изотропных оболочек и для опытов на качественных ортотропных моделях с очень малыми несовершенствами настоящий анализ возможно консервативен. Однако анализ экспериментов на стрингерных оболочках [7] показывает, что критические нагрузки уменьшенной жесткости обеспечивают близкие нижние пределы иногда даже для больших несовершенств, наблюдаемых экспериментально.

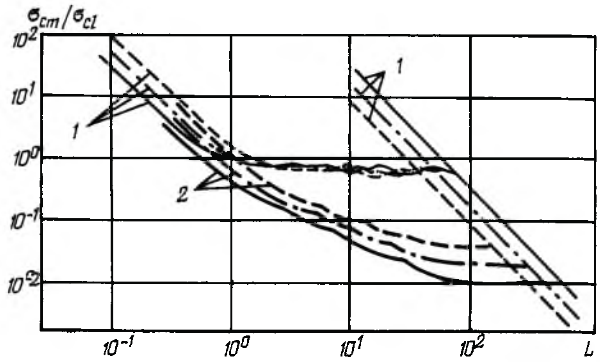


Рис. 4. Зависимость безразмерных критических напряжений σ_{cm}/σ_{cl} от безразмерного параметра длины L для ортотропного цилиндра: *1* – классический анализ; *2* – МУЖ. (Сплошные линии – $R = 400$; штриховые – $R = 100$; штрихпунктирные – $R = 200$.)

Для конструкций, находящихся в агрессивной морской среде, уровень несовершенств в которых значительно больше, чем в лабораторных условиях (максимальное отклонение $0{,}005r$ допускается правилами проектирования [8]), было бы неосторожно отклонить настоящие нижние пределы как излишне консервативные.

Как указано в настоящей работе, метод уменьшенной жесткости [9, 10] был распространен на упругие стрингерные оболочки [2]. При этом оказалось, что далеко не всегда интенсивность начальных несовершенств в оболочке определяет экспериментальные коэффициенты понижения. Последние очень зависят от точности изготовления стрингеров и близки к тем, которые наблюдаются в гладких изотропных цилиндрах [7]. Анализ опытов на стрингерных оболочках [7] свидетельствует, что нижние пределы нагрузок выпучивания несовершенных оболочек, определенные МУЖ, обычно приемлемы даже при высокой точности изготовления их в лаборатории. Для полномасштабных морских конструкций, почти неизбежно содержащих высокие уровни несовершенств, отчасти как результат накопления повреждений при эксплуатации, МУЖ обеспечивает реальную основу для проектирования.

2. **Анализ критических нагрузок шпангоутных оболочек [11]**. Анализ распределения энергии деформации, связанной с различными компонентами оболочечной жесткости, показывает, что для длинноволновых мод, которые обычно вызывают выпучивание цилиндра, энергия окружного изгиба является одним из важных стабилизирующих вкладов, а осевая мембранная энергия – другой главный компонент линейной жесткости оболочки. Если учитывать, что повышение эффективной ортотропной осевой мембранной жесткости приводит к росту осевого поперечного сечения и веса оболочки, который несоразмерен с приращением напряжений выпучивания, становится понятным, почему использование стрингерного подкрепления имеет столь незначительное влияние на сопротивление оболочки выпучиванию. В итоге это часто уменьшает эффективность, присущую данному объему материала. И наоборот, увеличение окружной изгибной жесткости может быть эффективным без увеличения полного объема мате-

риала и достигается перераспределением его между обшивкой и кольцевыми жесткостями. Если разумно выбрать увеличение окружной изгибной жесткости, то можно значительно увеличить сопротивление выпучиванию по длинноволновым модам. Это позволяет достичь значительных улучшений в эффективности конструкции при помощи тщательно выбранных кольцевых подкреплений.

Чтобы выбрать рациональные размеры кольцевых подкреплений, МУЖ [11] распространяется на шпангоутные оболочки. Для слабоподкрепленных шпангоутных оболочек характеристики классических и критических нагрузок уменьшенной жесткости аналогичны таковым для изотропных цилиндров.

Выпучивание обычно инициируется модами с длинными осевыми волнами. Если уровни кольцевых жесткостей увеличены или если изгибная жесткость этих подкреплений увеличена, возможен переход к сравнительно чувствительной к несовершенствам форме упругого выпучивания, в которой преобладают моды с короткими осевыми волнами. В результате появляется возможность использования кольцевых подкреплений для оптимального проектирования.

Эмпирическое подтверждение МУЖ для оценки нижних границ упругих нагрузок выпучивания описано в работах [7, 12, 13].

2.1. *Классический анализ критических нагрузок*. Классический анализ и МУЖ для шпангоутных оболочек подобны ранее использованным для стрингерных оболочек [2].

Устойчивость равновесия основного состояния проверяется по второй вариации полной потенциальной энергии. В положении нейтрального равновесия

$$V_2(u, v, w, \sigma) \equiv 0. \tag{2}$$

Основное фундаментальное состояние определяется компонентами линейного мембранного напряженно-деформированного состояния (НДС) ($N_x^F = -\sigma t$, $N_\theta^F = N_{x\theta}^F = 0$, все моменты равны нулю). В этом случае

$$(E_x^F, E_\theta^F) = \left[-\frac{\sigma\alpha_\theta(1-\mu^2)}{E(\alpha_\theta - \mu^2)}, \frac{\mu\sigma(1-\mu^2)}{E(\alpha_\theta - \mu^2)} \right], \tag{3}$$

где

$$\alpha_\theta = \frac{K_\theta}{K} = 1 + (1-\mu^2)\frac{D_r T_r^2}{S_r R}; \; T_r = t_r / t; \; D_r = d_r / t_r;$$

$$S_r = s_r / r = L / (n_r + 1);$$

L – безразмерная длина оболочки; n_r – число шпангоутов; t_r, d_r – ширина и высота шпангоута соответственно; s_r – расстояние между шпангоутами. (Остальные обозначения соответствуют приведенным в работе [11].)

Типичный спектр классических критических напряжений $(\sigma_c / E)\cdot 10^3 = f(i)$ представлен на рис. 5 для шпангоутной оболочки с кольцами средней жесткости ($R = 400$, $L = 1$, $D_r = 1$, $T_r = 3$, $n_r = 24$, $\alpha_\theta = 1{,}512$). Ортотропная шпангоутная оболочка имеет минимальное критическое напряжение σ_{cm}, возникающее при моде (i_{cm}, j_{cm}), причем $j_{cm} \geq 1$ в отличие от стрингерной оболочки [2]. Данные для составляющих энергии U_{2B} и U_{2M}, $\tilde{\tilde{V}}{}^{\theta}_{2M}$, входящих в (2), приведены на рис. 6,*а* ($j = 1$) и 6,*б* ($R = 400$, $L = 1$, $D_r = 0{,}3$, $T_r = 3$, $n_r = 24$).

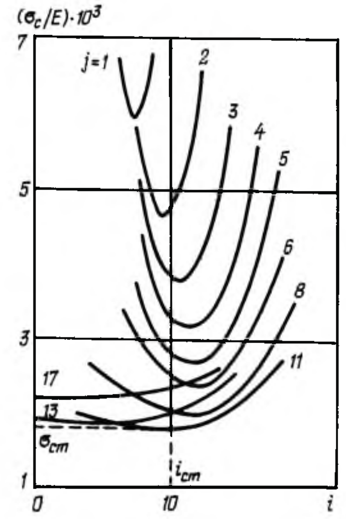


Рис. 5. Зависимость безразмерных критических напряжений $(\sigma_c / E)\cdot 10^3$ от числа окружных волн i для шпангоутной оболочки.

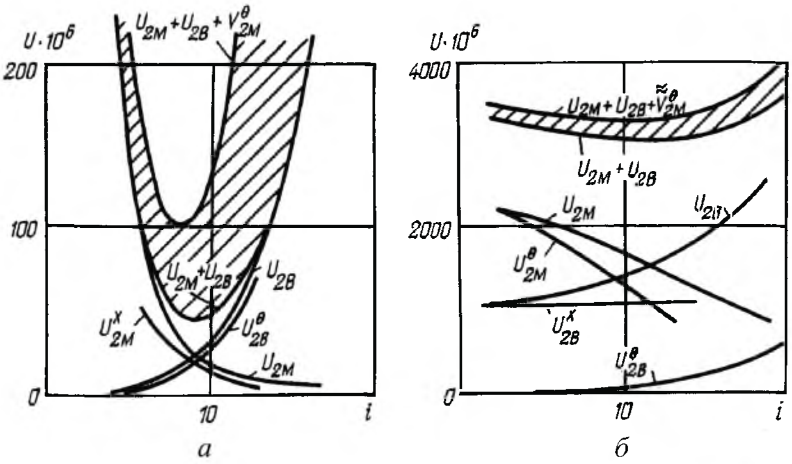


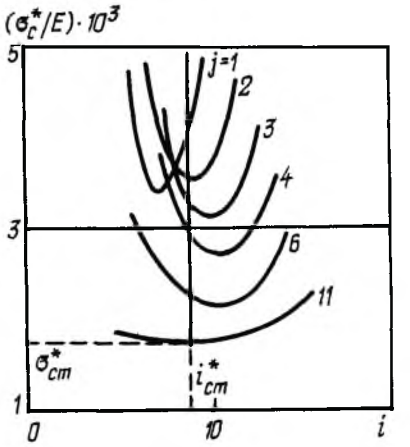
Рис. 6. Зависимость энергетических вкладов $U\cdot 10^6$ от числа окружных волн i для длинноволновой моды при $j = 1$ (*а*) и для коротковолновой моды при $j = 10$ (*б*).

Энергия представлена как функция i – окружного числа волн для $j = 1$ (рис. 6,*а*) и 10 (рис. 6,*б*). Аналогично гладким и стрингерным оболочкам изгибающая энергия увеличивается, а мембранная уменьшается с ростом i.

Однако если при $j = 1$ вклад нелинейной окружной мембранной энергии $\tilde{\tilde{V}}_{2M}^{\theta}$ является решающим для устойчивости оболочки, то при $j = 10$ его влияние почти исчезает.

2.2. *Анализ критических нагрузок по МУЖ.* Результаты анализа критических нагрузок шпангоутной оболочки σ_c^* по МУЖ представлены на рис. 7 в виде зависимости $(\sigma_c^* / E) \cdot 10^3$ от числа i. При этом в уравнении (1) принято $\tilde{\tilde{V}}_{2M}^{\theta} = 0$. Характеристики оболочки аналогичны таковым оболочки с кольцами средней жесткости. Минимальному σ_{cm}^* соответствует $j_{cm}^* = 11$, причем мода сохраняется (i_{cm}, j_{cm}) [9, 11], как и на рис. 5, но критическая нагрузка уменьшается на 4,4 % по сравнению с классическим σ_c. Переход от длинноволновой моды для слабоподкрепленных шпангоутных оболочек (чувствительных к несовершенствам) к коротковолновой моде $(j_{cm} \geq 1)$ для сильноподкрепленных оболочек (сравнительно нечувствительных к несовершенствам) обнаружен и авторами работы [14]. Анализ опубликованных экспериментальных результатов [13] для шпангоутных оболочек показал, что,согласно МУЖ, нижние границы близки к нагрузкам выпучивания.

В подкрепленных оболочках многие независимые геометрические параметры влияют на поведение оболочек при выпучивании. Эффект влияния величины $R = r / t$ на классические критические напряжения и σ_{cm}^*, определенные МУЖ, иллюстрирует рис. 8 ($l = 400t$, $T_r = 3$, $n_r = 24$). Во всех оболочках размеры сохраняются постоянными, за исключением r $(100t \leq r \leq 1000t)$. При этом L изменяется в интервале 4,0...0,4.



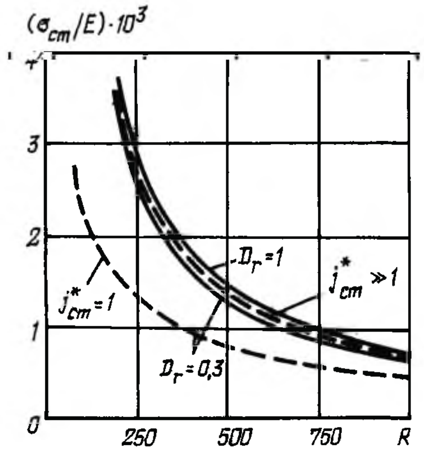


Рис. 7. Зависимость безразмерных критических напряжений $(\sigma_c^* / E) \cdot 10^3$, определяемых по методу уменьшенной жесткости, от числа окружных волн i.

Рис. 8. Зависимость минимальных критических напряжений $(\sigma_{cm} / E) \cdot 10^3$, от безразмерного радиуса $R = r / t$. (Сплошные линии – классический анализ; штриховые – МУЖ).

Две моды выпучивания, связанные с анализом МУЖ (одна с полуволной для слабоподкрепленных оболочек, другая многоволновая для среднеподкрепленных оболочек), рассмотрены для всех величин R. Прослеживается явная зависимость σ_{cm} от R, причем для слабоподкрепленных оболочек минимальные σ_{cm} реализуются при $j^*_{cm} = 1$.

Совершенно иное поведение σ_{cm} связано с изменением безразмерной длины оболочки L (рис. 9). Здесь принято $R = 400$, $T_r = 3$, $S_r = 0{,}04$. При изменении L величина S_r не изменяется, а изменяется n_r. Для двух типов оболочек ($D_r = 0{,}03$ и $D_r = 1$) минимальные классические напряжения слабо зависят от длины. И наоборот, критические напряжения, определенные МУЖ, сильно зависят от L. В слабоподкрепленной оболочке σ^*_{cm} возникают при $j^*_{cm} = 1$ и уменьшаются с ростом L. В среднеподкрепленных оболочках выпучивание происходит при $j^*_{cm} >> 1$, и σ^*_{cm} незначительно снижается с ростом L, при $L = 3{,}7$ происходит переход к моде $j^*_{cm} = 1$, сопровождающийся более резким снижением σ^*_{cm} с ростом L, как и для слабоподкрепленных оболочек.

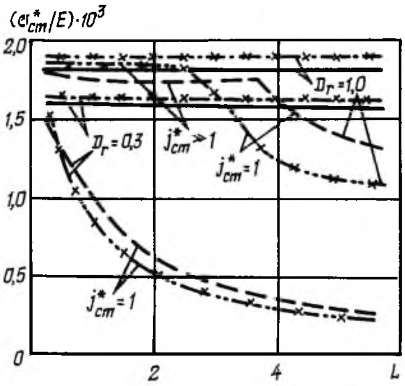


Рис. 9. Зависимость минимальных критических напряжений $(\sigma^*_{cm} / E)\cdot 10^3$ от безразмерной длины цилиндра L для внешних (штрихпунктирные линии и штрих с двумя пунктирами) и внутренних (сплошные и штриховые линии) шпангоутов. (Сплошные и штрихпунктирные линии классический анализ; штриховые и штрих с двумя пунктирами МУЖ.)

На рис. 9 представлена также зависимость σ^*_{cm} от L для внешних и внутренних шпангоутов. Характер σ^*_{cm} при рассмотренных D_r слабо зависит от места расположения ребер (снаружи или внутри обшивки) во всем диапазоне L, что характерно и для σ^*_{cm} в слабоподкрепленных оболочках. В оболочках со средним подкреплением при переходе от коротких волн к длинным минимальные σ^*_{cm} возникают при росте L (для внешних ребер при $L > 2{,}5$). С увеличением длины оболочки σ^*_{cm} при внешних ребрах уменьшается более резко, чем при внутренних. Поэтому оболочки с внешними ребрами характеризуются более высокой чувствительностью к начальным несовершенствам.

Поведение шпангоутных оболочек сильно зависит от геометрии подкреплений. Этот вопрос неоднократно обсуждался в литературе, в частности в работах [14, 15]. Однако систематических исследований по этому вопросу недостаточно.

3. **Аналитическое выражение для коэффициента понижения классической критической нагрузки [16]**. На основании ранее опубликованных результатов [2, 10, 11] удается предложить простой аналитический метод для определения коэффициента понижения классической критической нагрузки. Он идеально подходит для проектирования и может эффективно использоваться на начальной стадии концептуального проектирования. Кроме того, может быть распространен на оболочки других форм и типов нагружения, а также для изучения взаимодействия между упругой и неупругой нелинейностями [17, 18].

Мембранная нелинейность обычно включается в нелинейный анализ. Незначительные нелинейности при изгибе, возникающие в начальном послекритическом состоянии, обычно наблюдаются при деформациях, которые столь велики, что находятся вне практической зоны.

Нелинейность при выпучивании может быть неустойчива там, где мембранная жесткость (или энергия) входит в структурное сопротивление деформациям в связанной критической моде. Проще говоря, изменения в мембранной жесткости после выпучивания могут привести к потере жесткости, если существует положительное мембранное сопротивление или энергия в критической моде.

Поэтому для взаимодействия при выпучивании колонн и плит разработана процедура уменьшенного модуля [19–22]. В некоторых оболочках может быть потеряна вся начальная мембранная энергия деформации, и такое допущение использовано в работе [23].

Несмотря на интенсивную разработку нелинейной теории оболочек в течение 60 лет, их поведение при наличии произвольных начальных несовершенств формы изучено лишь частично [24]. Например, тщательный экспериментальный контроль осесимметричных несовершенств, проведенный в [25], показал близкое соответствие результатов с асимптотическим прогнозированием по специальной теории Койтера [26]. Прогнозирование последовательности конфигураций после выпучивания в работах [27, 28] обнаруживает их сходство с опытными данными. Однако для несовершенств, амплитуда которых порядка толщины оболочки или больше, отмечается значительное расхождение между теоретическим прогнозированием и экспериментальными наблюдениями.

3.1. *Классический анализ и коэффициент понижения критических напряжений для сжатых ортотропных оболочек.* Рассматривается ортотропная упругая цилиндрическая оболочка, отнесенная к системе криволинейных ортогональных координат x, θ, z в недеформированном состоянии. Докритическое состояние предполагается известным и аппроксимируется мембранными результирующими ($N_x^F = -\alpha_x t\sigma$, $N_\theta^F = 0$), причем σ – величина однородных сжимающих напряжений. Соответствующие деформации равны

$$(E_x^F, E_\theta^F) = \left[-\frac{\alpha_\theta(\alpha_x - \mu^2)\sigma}{(\alpha_x\alpha_\theta - \mu^2)E}, \frac{\mu(\alpha_x - \mu^2)\sigma}{(\alpha_x\alpha_\theta - \mu^2)E} \right]. \tag{4}$$

Величины α_x, α_θ и остальные обозначения даны в работах [1, 11, 16],

$$\alpha_x = 1 + (1-\mu^2)\frac{d_s t_s}{S_s t};$$
$$\alpha_\theta = 1 + (1-\mu^2)\frac{d_r t_r}{S_r t}. \tag{5}$$

Полная потенциальная энергия представляется в форме $V = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$, причем V_2 – в виде

$$V_2 \equiv U_{\text{М}} + U_{\text{В}} + \tilde{V}^x_{\text{М}} + \tilde{\tilde{V}}^x_{\text{М}} + \tilde{V}^\theta_{\text{М}} + \tilde{\tilde{V}}^\theta_{\text{М}}, \tag{6}$$

где $U_{\text{М}}$ – линейная мембранная энергия; $U_{\text{В}}$ – энергия изгиба; $\tilde{V}^x_{\text{М}}, \tilde{\tilde{V}}^x_{\text{М}}, \tilde{V}^\theta_{\text{М}}$, $\tilde{\tilde{V}}^\theta_{\text{М}}$ – осевые и окружные компоненты нелинейной мембранной энергии [16].

Из выражения (6) следует формула для классических критических напряжений:

$$\sigma_c = \frac{(U_{\text{М}} + U_{\text{В}})}{(\tilde{V}^x_{\text{М},\sigma} + \tilde{\tilde{V}}^x_{\text{М},\sigma} + \tilde{\tilde{V}}^\theta_{\text{М},\sigma})}, \tag{7}$$

где соответствующее

$$V_{\text{М},\sigma} = \frac{dV_{\text{М}}}{d\sigma}. \tag{8}$$

Если в послекритическом поведении комбинация эффектов начальных несовершенств и связанных мод приводит к ситуации, где $\tilde{\tilde{V}}^\theta_{\text{М}} \to 0$, то следует проводить анализ критической нагрузки по уменьшенной полной потенциальной энергии:

$$V_2^* = U_{\text{М}} + U_{\text{В}} + \tilde{V}^x_{\text{М}} + \tilde{\tilde{V}}^x_{\text{М}}. \tag{9}$$

Точный анализ, основанный на модели с уменьшенной энергией (жесткостью), показывает, что критические моды почти идентичны прогнозируемым на основании классического анализа полной энергии (6). Поэтому критические напряжения σ_c^*, согласно методу уменьшенной жесткости, определяются по формуле

$$\sigma_c^* = -\frac{(U_{\text{М}} + U_{\text{В}})}{\tilde{V}^x_{\text{М},\sigma} + \tilde{\tilde{V}}^x_{\text{М},\sigma}} = \frac{(\tilde{V}^x_{\text{М},\sigma} + \tilde{\tilde{V}}^x_{\text{М},\sigma} + \tilde{\tilde{V}}^\theta_{\text{М},\sigma})}{(\tilde{V}^x_{\text{М},\sigma} + \tilde{\tilde{V}}^x_{\text{М},\sigma})} \cdot \sigma_c \equiv \xi_{ij}\sigma_c. \tag{10}$$

Выражение для ξ_{ij} можно представить в очень удобной форме, если положить, что нелинейные деформации с достаточной точностью могут быть записаны в виде

$$\theta''_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \qquad \theta''_\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right)^2, \tag{11}$$

причем

$$w = w_{ij}\sin\frac{j\pi x}{l}\cos i\theta,$$

где i – число окружных волн; j – число осевых полуволн.

Используя (11), коэффициент снижения ξ_{ij} можно представить в явной форме:

$$\xi_{ij} = \frac{2(\alpha_x\alpha_\theta - \mu^2)}{(2\alpha_x\alpha_\theta - \mu^2) + \mu\alpha_\theta(i/\lambda)^2}, \tag{12}$$

где $\lambda = (j\pi)/(l/r)$. Осевая длина волны $l_x = 2l/j$, а окружная $l_\theta = 2\pi r/i$, поэтому $i/\lambda \equiv l_x/l_\theta$. Полагая $\mu^2 << 1$, уравнение (12) можно записать в виде

$$\xi_{ij} \cong \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\alpha_x}\right)\left(\frac{i}{\lambda}\right)^2} \equiv \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\alpha_x}\right)\left(\frac{l_x}{l_\theta}\right)^2}. \tag{13}$$

Следовательно, в ортотропно подкрепленных оболочках коэффициент снижения нагрузки выпучивания для фиксированной моды зависит от единственного сложного параметра $\mu_{eff} = \mu/\alpha_x$, который можно рассматривать как эффективное соотношение Пуассона.

В работе [29] дано обоснование МУЖ, в частности описаны его экспериментальные проверки. Опытные исследования [30], проведенные в Лондонском Университетском колледже – ЛУК (UCL), показали, что в экспериментальных результатах существует определенная закономерность поведения, которая описывается МУЖ и обеспечивает им нижний предел.

4. **Обобщение методики**. В настоящее время МУЖ обобщен применительно к новым задачам. В частности, рассмотрена упругопластическая общая потеря устойчивости гладких и шпангоутных цилиндрических оболочек [18, 31, 32]. Используя метод приведенной жесткости, определяют нижнюю границу, при которой впервые достигается поверхность текучести. Рассмотрен также случай достижения полной пластичности при одновременном действии осевой нагрузки и внешнего давления. Показано, как может быть получена единая кривая, характеризующая коэффициент понижения, с целью достоверных оценок несущей способности оболочек из

любых материалов с какими угодно подкрепляющими элементами при любых сочетаниях осевой нагрузки и преобладающего давления [18]. Предложенный метод может оказаться полезным при интерпретации экспериментальных данных и результатов, полученных более сложными теоретическими методами.

В работах [33–36] рассмотрено выпучивание цилиндрических панелей и оболочек при внешнем давлении. В этом случае использована нелинейная процедура Ритца и классический бифуркационный анализ. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью линейного классического анализа и МУЖ.

Показано, что результаты численного эксперимента находятся между данными, полученными по линейной теории и МУЖ.

Работы [37–39] посвящены выпучиванию сферических пространственных куполов при внешнем давлении. В [39] использован классический бифуркационный анализ в идеализированной и модифицированной форме, а также изучено выпучивание куполов по МУЖ. Выполнено сравнение результатов, полученных по классической теории и МУЖ, с данными численного решения нелинейных задач для несовершенных куполов.

Рассмотрены два вида выпучивания: локальное и общее. Приведены обширные численные исследования для различных форм и уровней несовершенств. Обнаружено, что большинство представлений, полученных ранее при изучении сферических оболочек, применимы также к куполам. Сюда относятся большие изменения нагрузок выпучивания для очень малых изменений критических несовершенств формы и сильное их снижение по сравнению с классическими нагрузками. Данные численных экспериментов приближаются к P_{cl} при малых амплитудах несовершенств и к P^*_{cm} при росте их амплитуды (P^*_{cm} – минимальная критическая нагрузка, определяемая МУЖ). Отдельные результаты можно также найти в работах [40–42].

Заключение. Разработан при непосредственном участии первого автора достаточно простой метод – метод уменьшенной жесткости для оценки нижних границ нагрузок выпучивания. Метод апробирован на широком классе задач: цилиндрических, сферических оболочках, панелях, оболочках других форм. Для оценки применимости метода использованы также численные решения нелинейных задач. Нижний предел нагрузок, найденный МУЖ, хорошо согласуется с нижним пределом экспериментальных данных. Метод удобен для использования в практике проектирования оболочек. Для некоторых типов задач он позволяет получить точные аналитические решения, в частности для подкрепленных оболочек, близких по форме к цилиндрическим [43].

Р е з ю м е

Метод зменшеної жорсткості використано для дослідження випинання циліндричних оболонок, підкріплених стрингерами і шпангоутами. Експериментальні дані порівнюються з отриманими згаданим методом. Розгля-

нуто деякі аспекти відносно впровадження результатів досліджень методом зменшеної жорсткості в практику проектування, а також перспективи його розвитку й узагальнення.

1. *Кролл Дж. Г. А., Гавриленко Г. Д.* Метод уменьшенной жесткости в теории выпучивания гладких оболочек и классический анализ устойчивости (обзор) // Пробл. прочности. – 1999. – № 2. – С. 45 – 66.
2. *Ellinas C. P., Batista R. C., Croll J. G. A.* Overall buckling of stringer stiffened cylinders // Proc. of the Inst. of Civil Engineers. – 1981. – **71**. – Pt 2. – P. 479 – 512.
3. *Donnell L. H.* A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending // Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. – 1934. – **56**. – Ser. E. – P. 795 – 804.
4. *Donnell L. H., Wan C. C.* Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression // J. Appl. Mech. – 1950. – **17**. – P. 73 – 83.
5. *Hoff N. J. et al.* Post-buckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells // J. Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. – 1966. – **4**. – P. 126 – 133.
6. *Batista R. C.* Lower bound estimates for cylindrical shell buckling. PhD dissertation. – University of London, June, 1979.
7. *Ellinas C. P., Croll J. G. A.* Experimental and Theoretical Correlations for Axially Compressed Stringer Stiffened Shells. London Centre for Marine Technology, London (1981) // J. Strain Analysis. – (1983). – **18**(**1**). – P. 41 – 67.
8. *Det Norske Veritas*. Steel structures // Rules for the design, construction and inspection of off-shore structures, Appendix C. Det Norske Veritas. – Oslo, 1977.
9. *Batista R. C., Croll J. G. A.* A design approach for axially compressed unstiffened cylinders // Institite of Physics, Conf. Cardiff, 1978 / T. H. Richards and P. Stanley (eds.), Applied Science, London, 1979.
10. *Croll J. G. A., Batista R. C.* Explicit lower-bounds for the buckling of axially loaded cylinders // Int. J. Mech. Sci. – 1981. – **23**. – P. 331 – 343.
11. *Ellinas C. P., Croll J. G. A.* Overall buckling of ring stiffened cylinders // Proc. of the Inst. of Civil Engineers. – 1981. – **71**, Pt 2. – P. 637 – 661.
12. *Ellinas C. P., Croll J. G. A.* Experimental and Theoretical Correlation for Axially Compressed Stringer Stiffened Shells. – London Centre for Marine Technology, London, 1981 // J. Strain Analysis. – 1983. – **18**(**1**). – P. 41 – 67.
13. *Ellinas C. P., Croll J. G. A.* Experimental and Theoretical Correlations for Elastic Buckling of Axially Compressed Stringer and Ring Stiffened Cylinders // J. Strain Analysis. – 1983. – **18**. – Pt I. – P. 41 – 67, Pt II. – P. 81 – 93.

14. *Singer J., Arbocz J., Babcock C. D.* Buckling of imperfect stiffened cylinrical shells under axial compression // AIAA J. – 1971. – **9**. – P. 68 – 75.

15. *Weller T., Singer J.* Further experimental studies on buckling of integrally ring stiffened cylindrical shells under axial compression // Exp. Mech. – 1974. – **31**. – P. 267 – 273.

16. *Croll J. G. A., Ellinas C. P.* Reduced stiffness axial load buckling of cylinders // Int. J. Solids Struct. – 1983. – **19**(**5**). – P. 461 – 477.

17. *Croll J. G. A.* Lower bound elasto-plastic buckling of cylinders // Proc. of the Inst. of Civil Engineers. – 1981. – **71**. – Pt 2. – P. 235 – 261.

18. *Croll J. G. A.* Elastic-plastic buckling of pressure and axial loaded cylinders // Proc. of the Inst. of Civil Engineers (Sept). – 1982. – **73**. – Pt 2. – P. 633 – 652.

19. *Croll J. G. A.* Model of interactive buckling of stiffened plates // J. Engng Mech. Div. Am. Soc. Cip. Engrs. – 1975. – **101**, EM 5. – P. 575 – 591.

20. *Ellinas C. P., Croll J. G. A.* Post-critical analysis of torsionally buckled stiffener plates // Int. J. Solids Struct. – 1981. – **17**. – P. 11 – 27.

21. *Svenson S. E., Croll J. G. A.* Interaction between local and overall buckling // Int. J. Mech. Sci. – 1975. – **17**. – P. 307 – 321.

22. *Thompson J. M. T. et al.* An experimental study of imperfection sensitivity in the buckling of stiffened plates // Buckling of Structures: Proc. IUTAM Symp. – Harvard, Cambridge, USA, June 1974. – P. 149; Springer-Verlag, Berlin. – 1976.

23. *Batista R. C., Croll J. G. A.* A design approach for unstiffened cylindrical shells under external pressure // Paper Pres. at Int. Conf. on Thin Walled Structures. University of Strathclyde (2–6 April 1979). – Crosby – Lockwood, Glasgow, 1979. – P. 299 – 319.

24. *Arbocz J.* Past, present and future of shell stability analysis. Delft University of Technology, Department of Aerospace Engng // Rep. L. R-320, 1981.

25. *Tennyson R. C., Muggeridge D. B.* Buckling of axisymmetric imperfect circular cylindrical shells under axial compression // AIAA J. – 1969. – **7**. – P. 2127 – 2131.

26. *Koiter W. T.* The Effect of Axisymmetric Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells under Axial Compression // Proc. Koninkl. Nederl. Akod. Wet. – 1963. – **B66**, N 5. – P. 265 – 279.

27. *Esslinger M., Geier B.* Postbuckling behavior of structures. – Springer-Verlag, Wein. – 1975.

28. *Yamaki N.* Post-buckling and imperfection sensitivity of circilar cylindrical shells under compression // In Theoretical and Applied Mechanics / W. T. Koiter (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1976.

29. *Кролл Дж. Г. А., Гавриленко Г. Д.* Обоснование метода уменьшенной жесткости // Пробл. прочности. – 1998. – № 5. – С. 39 – 58.

30. *Batista R. C., Croll J. G. A.* A design approach for axially compressed unstiffened cylinders // Paper Pres. Instit. of Physics Conf. “Stability Problems in Engineering Structures and Components”, University College, Cardiff (12 – 14 Sept. 1978) / T. H. Richards and P. Stanley (eds.), Applied Science Publishers Ltd., London (1979).
31. *Ellinas C. P., Croll J. G. A.* Elastic-plastic general buekling of ring stiffened cylinders. IUTAM Symposium, University College London, Sept. 1982; in Collapse: The Buckling of Structures in Theory and Practice. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
32. *Ellinas C. P., Croll J. G. A.* Elastic-plastic buckling design of cylindrical shells subjected to combined axial compressive and pressure loading // Int. J. Solids and Struct. – 1986. – **22**(**9**). – P. 1007 – 1017.
33. *Yamada S., Croll J. G. A.* Buckling behavior of pressure loaded cylindrical panels // J. Engrg. Mech. – 1989. – **115**, N 2. – P. 327 – 344.
34. *Yamada S., Croll J. G. A.* Non-linear buckling response of pressure loaded cylindrical panels and its interpretation for design. Tech. Rep., Tohoku Univ. – 1987.
35. *Yamada S., Croll J. G. A.* Buckling behavior of pressure loaded cylindrical panels // J. Engrg. Mech., ASCE. – 1989. – **115**(**2**). – P. 327 – 344.
36. *Yamada S., Croll J. G. A.* Buckling and post-buckling characteristics of pressure-loaded cylinders // ASME J. Appl. Mech. – 1993. – **60**. – P. 290 – 299.
37. *Kashani M.* Local and overall buckling of spacedomes, PhD thesis, Univ. College London, England. – 1993.
38. *Kashani M., Croll J. G. A.* Non-linear buckling response of spherical spacedomes // Proc. LASS Symp. – Madrid, Spain. – 1989.
39. *Kashani M., Croll J. G. A.* Lower bounds for overall buckling of spherical space domes // J. Engrg. Mech. – 1994. – **120**, N 5. – P. 949 – 970.
40. *Croll J. G. A.* Lower Bound Methods in Shell Buckling, in Developments in Thin Walled Structures – 3, Elsevier Applied Science Publishers. – 1987.
41. *Croll J. G. A. Kaimakamis N. F., Ellinas C. P.* Design of Efficient Orthogonally Stiffened Cylinders // 5th OMAE Symposium, Tokyo, April. – 1986.
42. *Ellinas C. P., Croll J. G. A.* Discussion of Analysis of the behavior of axially compressed stringer stiffened cylindrical shells / Eds. A. C. Walker and S. Sridharan // Proc. of the Inst. of Civil Engineers (June). – 1981. – **71**. – Pt 2. – P. 563 – 568.
43. *Гавриленко Г. Д.* Аналитическое решение проблемы устойчивости подкрепленных оболочек, близких по форме к цилиндрическим // Доп. НАН України. – 1995. – **31**, № 11. – С. 39 – 41.

Поступила 11. 03. 99