

Геометрически нелинейное напряженно-деформированное состояние многослойных оболочек вращения с переменными геометрическими параметрами

А. О. Рассказов^а, В. М. Трач^б, В. Н. Гупалюк^б

^а Украинский транспортный университет, Киев, Украина

^б Украинская государственная академия водного хозяйства, Ровно, Украина

Рассмотрен подход к определению компонентов напряженно-деформированного состояния композитных оболочек большого прогиба. Разработана методика решения системы уравнений по определению компонентов напряженно-деформированного состояния с учетом геометрической нелинейности оболочек с переменными геометрическими параметрами. Приведены примеры расчета конической и составной оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны переменной вдоль образующей толщины, находящихся под действием внешнего давления.

В современных конструкциях, широко используемых в различных областях машиностроения, наиболее распространенным элементом являются гибкие оболочки вращения с разнообразным очертанием меридиана. Для снижения их массы могут использоваться, например, композиционные материалы, обладающие низкой сдвиговой жесткостью. Как известно, расчет конструкций из таких материалов необходимо проводить с помощью уточненных подходов, позволяющих более полно описывать их напряженно-деформированное состояние.

В настоящей работе рассматривается геометрически нелинейное напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочек вращения с произвольной формой образующей, которые состоят из конечного числа слоев переменной толщины. Материал слоев ортотропный. Оболочки отнесены к ортогональной системе координат. Линиями главных кривизн поверхности приведения, которая может и не совпадать со срединной поверхностью оболочки, являются координатные линии. Оси же ортотропии совпадают с осями принятой системы координат. На поверхностях контакта слоев выполняются условия, обеспечивающие их совместную работу без отрыва и проскальзывания.

Для исследования НДС таких оболочек применяется уточненная теория [1], основанная на совместном использовании кинематических и статических гипотез о распределении перемещений и изменении поперечных касательных напряжений по толщине многослойного пакета.

Опираясь на уточненную теорию, согласно принципу Рейсснера, после варьирования по независимым напряжениям и перемещениям получим систему пяти дифференциальных уравнений равновесия в усилиях в рамках теории пологих оболочек:

$$\begin{cases} (A_2 N_{11})_{,1} - A_{2,1} N_{22} + (A_1 N_{12})_{,2} + A_{1,2} N_{12} + A_1 A_2 q_1 = 0; \\ -A_{1,2} N_{11} + (A_1 N_{22})_{,2} + (A_2 N_{12})_{,1} + A_{2,1} N_{12} + A_1 A_2 q_2 = 0; \\ (A_2 Q_{13})_{,1} + (A_1 Q_{23})_{,2} - A_1 A_2 k_1 N_{11} - A_1 A_2 k_2 N_{22} + A_1 A_2 q_3 = 0; \\ (A_2 M_{111})_{,1} - A_{2,1} M_{122} + (A_1 M_{112})_{,2} + A_{1,2} M_{112} - A_1 A_2 (Q_{11} - m_1) = 0; \\ -A_{1,2} M_{211} + (A_1 M_{222})_{,2} + (A_2 M_{212})_{,1} + A_{2,1} M_{212} - A_1 A_2 (Q_{22} - m_2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где N_{ij} , M_{ijk} и Q_{i3} , Q_{ij} – соответственно мембранные, изгибающие и поперечные усилия; A_i – параметры Ламе; k_i – кривизны ($i, j, k = 1, 2$). Запятые при индексах за скобками обозначают операцию дифференцирования. Индексы 1 и 2 указывают направление дифференцирования соответственно по меридиональной S и широтной θ координатам.

Разрешающую систему уравнений, описывающую геометрически нелинейные деформации при равновесии многослойных ортотропных оболочек вращения, будем искать в смешанной форме. Предварительно перейдем в этой системе к новым неизвестным функциям, посредством которых наиболее просто можно выполнить условия сопряжения оболочек вращения, имеющих различные формы образующих, собранных в единую гибкую упругую систему. Для этого вместо усилий N_{11} , Q_{13} и перемещений u , w введем их линейные комбинации:

$$\begin{aligned} N_x &= \cos \varphi N_{11} + \sin \varphi Q_{13}; & N_z &= \sin \varphi N_{11} - \cos \varphi Q_{13}; \\ U_x &= \cos \varphi u + \sin \varphi w; & U_z &= \sin \varphi u - \cos \varphi w, \end{aligned} \quad (2)$$

где N_x , N_z и U_x , U_z – соответственно радиальные и осевые усилия и перемещения.

Преобразуем систему в усилиях с учетом параметров Ламе и кривизн $A_1 = 1$, $A_2 = R_s$, $k_1 = 0$, $k_2 = \sin \varphi R_s^{-1}$ к виду

$$\begin{cases} (R_s \cos \varphi N_x + R_s \sin \varphi N_z)_{,1} - \cos \varphi N_{22} + N_{12,2} + R_s q_1 = 0; \\ N_{22,2} + (R_s N_{12})_{,1} + \cos \varphi N_{12} + R_s q_2 = 0; \\ (R_s \sin \varphi N_x - R_s \cos \varphi N_z)_{,1} + Q_{23,2} - \sin \varphi N_{22} + R_s q_3 = 0; \\ (R_s M_{111})_{,1} - \cos \varphi M_{122} + M_{112,2} - R_s Q_{11} + R_s m_1 = 0; \\ M_{222,2} + (R_s M_{212})_{,1} + \cos \varphi M_{212} - R_s Q_{22} + R_s m_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для приведения двумерной задачи к одномерной воспользуемся методом прямых [2]. Прежде всего отметим, что криволинейные ортогональные координаты S и θ на недеформированной поверхности неравноправны. Поверхность в направлении θ замкнута, поэтому искомое решение по ней периодическое с периодом 2π . В меридиональном направлении поверхность ограничена координатными линиями $S = S_0$ и $S = S_n$, на которых зададим граничные условия. С учетом изложенного осуществим по координате θ аппроксимацию частных производных, а по координате S – интегрирование.

Проведем на координатной поверхности l координатных линий $\theta = \theta_i$, где $\theta_i = (i-1)\frac{2\pi}{l}$ ($i=1, 2, \dots, l$). Поскольку координатная поверхность оболочки отображается на плоскости $s\theta$ в прямоугольную область $R = \{s_0 \leq s \leq s_n; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, координатные линии $\theta = \theta_i$ на этой плоскости отобразятся в прямые, параллельные оси s . Допустим, что решение задачи (1) есть достаточно гладким в окружном направлении и что его можно представить с помощью следующих приближенных решений вдоль этих l линий:

$$\frac{\partial N(s, \theta_i)}{\partial s} = f \left[s, \theta, N(s, \theta), \frac{\partial N(s, \theta_i)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 N(s, \theta_i)}{\partial \theta^2} \right]; \quad (4)$$

$$g_1(N(s_0, \theta_i)) = 0; \quad g_2(N(s_n, \theta_i)) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l), \quad (5)$$

где $N(s, \theta_i)$ – решение на i -й линии.

Частные производные по θ в правой части системы (4) заменим приближенно разностными отношениями, которые являются линейными комбинациями решений на линиях $\theta = \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(s, \theta_i)}{\partial \theta} &\cong \sum_{i=1}^l a_{ij} N(s, \theta_j); \\ \frac{\partial^2 N(s, \theta_i)}{\partial \theta^2} &\cong \sum_{i=1}^l b_{ij} N(s, \theta_j). \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты a, b задаются с помощью формул численного дифференцирования [2].

Подставим выражения (6) в систему (4), полагая, что $N_i(s) \cong N(s, \theta_i)$. Тогда исходная двумерная нелинейная задача (1) сводится к одномерной краевой задаче более высокого порядка, которую можем записать в виде

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = f \left(s, \theta_i, N_i, \sum_{i=1}^l a_{ij} N_j, \sum_{i=1}^l b_{ij} N_j \right); \quad (7)$$

$$g_1(N_i(s_0)) = 0; \quad g_2(N_i(s_n)) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l). \quad (8)$$

Векторы $N_1(s), N_2(s), \dots, N_l(s)$ есть решениями исходной краевой задачи на выбранных координатных линиях $\theta = \theta_i$ поверхности приведения оболочки. Таким образом, исходная двумерная нелинейная задача (1) с помощью метода прямых сведена к одномерной нелинейной краевой задаче (7), (8).

В зависимости от способа выбора коэффициентов a, b в аппроксимирующих выражениях (6) можем строить одномерные системы уравнений, которые позволяют получать решение с разной степенью точности.

Пусть действующая на оболочку нагрузка вызывает только ее осесимметричное деформирование. В таком случае компоненты напряженно-деформированного состояния не зависят от окружной координаты и конечно-разностные операторы (6) превращаются в нуль. Учитывая вышеизложенное, присоединим к (3) геометрические соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = u_{,1} + 2^{-1} \gamma_1^2; \\ \varepsilon_{22} = \cos \varphi R_s^{-1} u + \sin^{-1} \varphi R_s w + 2^{-1} \gamma_2^2; \\ \varepsilon_{12} = 2^{-1} v_{,1} - 2^{-1} \cos \varphi R_s^{-1} v + \gamma_1 \gamma_2; \\ \kappa_{111} = \chi_{1,1}; \quad \kappa_{222} = -2^{-1} \sin^{-1} \varphi R_s \chi_1^2; \\ \kappa_{122} = R_s^{-1} \cos \varphi \chi_1; \quad \kappa_{112} = 0; \\ \kappa_{211} = 0; \quad \kappa_{212} = 2^{-1} \chi_{2,1} - 2^{-1} R_s^{-1} \cos \varphi \chi_2; \\ \gamma_1 = \frac{1}{A_1} w_{,1}; \quad \gamma_2 = \frac{v}{R_2}. \end{array} \right. \quad (9)$$

После несложных преобразований получим геометрически нелинейную систему из десяти дифференциальных уравнений нормального вида Коши, которая описывает геометрически нелинейное напряженно-деформированное состояние многослойных оболочек вращения:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{x,1} = -\cos \varphi R_s^{-1} N_x + R_s^{-1} N_{22} - \cos \varphi q_1 - \sin \varphi q_3; \\ N_{12,1} = -2 \cos \varphi R_s^{-1} N_{12}; \\ N_{z,1} = -\cos \varphi R_s^{-1} N_z - \sin \varphi q_1 + \cos \varphi q_3; \\ M_{111,1} = -\cos \varphi R_s^{-1} M_{111} + \cos \varphi R_s^{-1} M_{122} + Q_{11} - m_1; \\ M_{212,1} = -2 \cos \varphi R_s^{-1} M_{212} + Q_{22}; \\ U_{x,1} = \cos \varphi \varepsilon_{11} + \sin \varphi \gamma_1 - 2^{-1} \gamma_1^2; \\ U_{\theta,1} = 2 \varepsilon_{12} + \cos \varphi R_s^{-1} U_\theta - \gamma_1 \gamma_2; \\ U_{z,1} = \sin \varphi \varepsilon_{11} - \cos \varphi \gamma_1 - 2^{-1} \gamma_1^2; \\ \chi_{1,1} = \kappa_{111}; \\ \chi_{2,1} = 2 \kappa_{212} + R_s^{-1} \cos \varphi \chi_2. \end{array} \right. \quad (10)$$

Решение системы (1) возможно с учетом граничных условий

$$B_0 \bar{y}(s_0) = b_0; \quad B_n \bar{y}(s_n) = b_n, \quad (11)$$

которые могут быть заданы в усилиях, перемещениях или в смешанной форме и в общем случае – нелинейны.

Реализацию полученной системы проведем при использовании метода линеаризации. Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dN}{ds} = f(s, N), \quad s_0 \leq s \leq s_n, \quad (12)$$

где $N(s) = \{N_1(s), N_2(s), \dots, N_l(s)\}^k$ с краевыми условиями

$$g_1(N(s_0)) = 0, \quad g_2(N(s_n)) = 0. \quad (13)$$

Пусть $N^*(s)$ – точное решение, $N^k(s)$ – приближенное, так что можно представить

$$N^*(s) = N^k(s) + \Delta N^k, \quad (14)$$

где ΔN^k – малая поправка. Поскольку $N^*(s)$ – точное решение, то систему (12) с учетом (14) можно записать в виде

$$\frac{dN^*}{ds} = f(s, N^*) = f(s, N^k + \Delta N^k). \quad (15)$$

На основе формулы Лагранжа вектор-функции $f(s, N(s))$ в окрестности решения $N^k(s)$ представим следующим образом:

$$f(s, N^k + \Delta N^k) \cong f(s, N^k) + \frac{\partial f(s, N^k)}{\partial N} \Delta N^k, \quad (16)$$

где символами $\frac{\partial f(s, N)}{\partial N}$ обозначены матрицы Якоби, определяемые по формулам

$$J(N) = \frac{\partial f(s, N)}{\partial N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1}{\partial N_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial N_{10}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2}{\partial N_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial N_{10}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_l}{\partial N_1} & \frac{\partial f_l}{\partial N_2} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial N_{10}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Подставим выражения (16) в (15), полагая при этом, что $N^* \cong N^{k+1}$. В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN^{k+1}}{ds} = f(s, N^k) + J(N^k)(N^{k+1} - N^k) \quad (18)$$

с линейными граничными условиями

$$B_1(N(s_0)) = b_0, \quad B_2(N(s_n)) = b_n. \quad (19)$$

Пусть известно нулевое приближение $N^0(s)$. Тогда, решая линейную краевую задачу при $k=0$, получим первое приближение, т.е. $N^1(s)$.

Полученное решение можно уточнить, и с помощью итерационной схемы (18) построить последовательность решений исходной задачи (12):

$$N^0(s), N^1(s), N^2(s), \dots, N^k(s), \dots, N^*(s),$$

которая при удачном выборе начального приближения $N^0(s)$ стремится к точному решению $N^*(s)$.

Практически итерационный процесс осуществляется до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$|N^{k+1} - N^k| < \varepsilon, \quad (20)$$

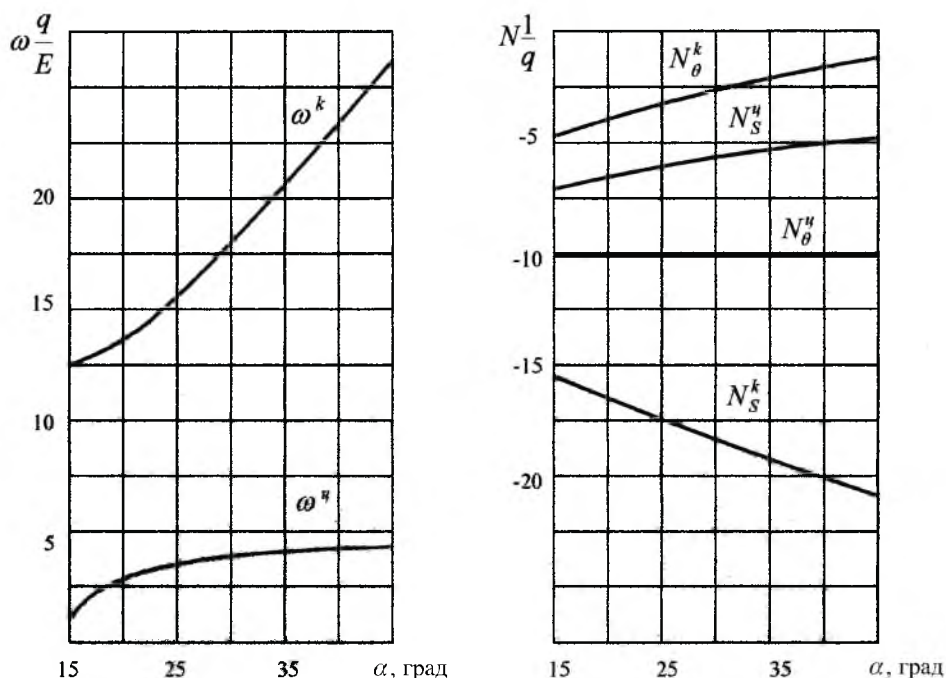
где ε – малая заданная величина для некоторой последовательности значений k .

Таким образом, метод линеаризации позволяет нелинейную краевую задачу (10), (11) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений свести к последовательности линейных краевых задач (18), (19). Для их реализации привлекается численный метод Рунге–Кутты с дискретной ортогонализацией по Годунову. В целом алгоритм решения задачи о геометрически нелинейном напряженно-деформированном состоянии многослойных оболочек вращения реализован в виде пакетов прикладных программ для персональных ЭВМ. Для этого авторами были использованы известные программные модули [3], а также написаны специальные, учитывающие специфику решаемых задач. В этих модулях на каждой итерации проводится: вычисление правой части системы дифференциальных уравнений по заданной информации о геометрических и механических характеристиках оболочечной конструкции; численное решение линейной краевой задачи; вычисление в заданных точках всех факторов, характеризующих напряженно-деформированное состояние оболочечной системы. Предложенный алгоритм расчета оболочечных систем с учетом геометрической нелинейности позволяет рассчитывать оболочки как с постоянными, так и с переменными геометрическими параметрами. Для учета последних необходимо геометрические размеры и физико-механические параметры оболочки определять в каждой точке интегрирования и ортогонализации.

Проиллюстрируем возможности предложенного алгоритма. Рассмотрим влияние на прогиб посередине образующей трехслойной конической оболочки, находящейся под действием равномерного внешнего давления, отношения E_i / E_ζ (E_i и E_ζ – модули Юнга несущих слоев и заполнителя). Закрепление краев оболочки соответствует шарнирно-неподвижному. Радиус оболочки $R=0,2$ м, длина $L=0,4$ м, толщина оболочки изменялась по закону $h=1-0,0125s$; отношение толщины несущего слоя к заполнителю составляло 1:2,6; модуль Юнга несущего слоя 10^6 МПа; коэффициент Пуассона 0,3; угол полураствора конуса $\alpha=25^\circ$. Результаты сравнения расчета прогиба оболочки, полученные при геометрически линейном и нелинейном подходах к определению НДС, приведены в таблице. Как видно, при отношении $E_i / E_\zeta < 90$ величины прогиба практически совпадают и только с увеличением E_i / E_ζ различие между ними начинает возрастать.

Расчет прогиба посередине конической оболочки в зависимости от E_i / E_ζ

E_i / E_ζ	Линейный подход	Нелинейный подход	Δ , %
1	1,3165	1,3203	0,3
50	5,3956	5,5776	3,4
90	5,5369	6,1792	11,6
100	5,5509	7,7447	39,5



Прогибы и усилия посередине цилиндрического и конического отсеков составной оболочки.

Кроме того, проведено определение прогиба w и мембранных усилий N_s, N_θ для составной трехслойной расширяющейся оболочки, подверженной действию равномерного внешнего давления. Граничные условия на ее торцах также приняты шарнирно-неподвижными. Радиус большего основания конической части равен 0,2 м, меньшего – 0,1 м. Для расчета выбрана оболочка, у которой оставались неизменными наибольший и наименьший радиусы поверхностей приведения, а также расстояния между краями, равные 0,4 м. В качестве переменной величины выбран угол α . При этом однозначно изменялись длины образующих конического и цилиндрического участков. Толщина оболочки в месте сопряжения конического и цилиндрического отсеков равна 10^{-2} м, на торцах – $5 \cdot 10^{-3}$ м. Отношение толщины несущего слоя к заполнителю 1:2,6; модуль Юнга несущего слоя $1 \cdot 10^5$ МПа, заполнителя – $2 \cdot 10^3$ МПа; коэффициент Пуассона слоев равен 0,3. Анализ результатов (рисунок) свидетельствует о том, что наиболее напряженной частью составной оболочки при данном нагружении является конический отсек.

Резюме

Розглянуто підхід до визначення компонентів напружено-деформованого стану композитних оболонок великого прогину. Розроблено методику розв'язку системи рівнянь для визначення компонентів напружено-деформованого стану з урахуванням геометричної нелінійності оболонок зі змінними геометричними параметрами. Наведено приклади розрахунку конічної та складеної оболонок обертання нульової гаусової кривизни змінної вздовж твірної товщини, які знаходяться під дією зовнішнього тиску.

1. *Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.
2. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. 1. – 464 с. – Т. 2. – 620 с.
3. *Григоренко Я. М., Крюков Н. Н.* Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.

Поступила 06. 04. 98