УДК 539.3+519.216

Оценка долговечности на основе модели накопления повреждений

В. Б. Ефлов

Петрозаводский государственный университет

Проанализированы интервальные оценки границ времени до разрушения в задаче накопления повреждений с помощью модели, основанной на анализе нелинейных феноменологических дифференциальных уравнений. Решение получено в рамках метода стохастических дифференциальных уравнений, являющихся обобщением модели накопления повреждений Качанова–Работнова.

С использованием аппарата стохастических дифференциальных уравнений получена дисперсия оценки для границ времен накопления повреждений как функции параметров стохастического процесса. Вычислена оценка среднего времени до разрушения статистически однородного стержня при постоянном нагружении с учетом случайной компоненты нагрузки.

Предлагаемый подход к решению задачи оценки границ времени до разрушения базируется на модели Качанова–Работнова [1–4], а также на методах решения стохастических дифференциальных уравнений. Основная цель работы состоит в вычислении среднего времени до разрушения нагруженного образца, а также в получении оценки дисперсии времени его разрушения. Известно, что с помощью классического подхода [1–4] получено значение времени до разрушения, которое и интерпретируется как средняя величина. В то же время установлено [5–11], что нелинейность задачи может приводить к нетривиальным функциональным зависимостям дисперсии решения при использовании строгого аппарата теории стохастических дифференциальных уравнений.

В работах [1–4] были введены две функции – ϕ и ω, которые изменяются в интервалах $0 \le \phi \le 1$ и $1 \ge \omega \ge 0$ и названы функциями сплошности и поврежденности соответственно. Они связываются, как правило, соотношением $\phi = 1 - \omega$ [1], которое удобно для интерпретации.

В начальном состоянии при отсутствии повреждений в классической, детерминированной модели функция ϕ сплошности равна единице и убывает [1–4]. Из чисто технических соображений (удобство вычислений) далее рассматривается функция сплошности.

Эволюция функции сплошности описывается кинетическим уравнением, которое в общем случае имеет вид

$$\frac{d\phi}{dt} = F(\phi, \ldots), \qquad (1)$$

где F – функция от ϕ и некоторых других параметров, которые существенны для рассматриваемого процесса и выбранной структуры модели. В число основных параметров входят: тензор напряжений T_σ; температура, которая в нашем случае обозначена символом θ, а также могут быть включены тензор деформаций и некоторые структурные параметры – рассеянная энергия, ориентированность упрочнения и т.д. Параметры модели подбираются таким образом, чтобы их можно было просто оценить из экспериментальных данных.

Исследуем простейший вариант модели, в котором температура принимается постоянной, структурные изменения не происходят, поэтому время не входит явным образом в правую часть динамического уравнения (1). Полагаем также, что процесс разрушения зависит от уровня напряженного состояния, т.е. от T_σ. Пусть в качестве критерия длительной прочности по отношению к некоторому эквивалентному напряжению σ_{eff} принят критерий максимального растягивающего напряжения:

$$\sigma_{eff} = \sigma_{\max}. \tag{2}$$

При наличии сжимающих напряжений предполагается, что они значительно меньше максимальных растягивающих напряжений $\sigma_{\max}$. Отношение σ_{eff}/ϕ интерпретируется как некоторое эффективное напряжение. Далее принимаем, что уровень напряженного состояния тела заметно меньше предела прочности. При сформулированных условиях и некоторых дополнительных упрощающих допущениях [1] можно полагать, что скорость роста поврежденности определяется эффективным напряжением, что формально приводит к следующей форме кинетического уравнения [1]:

$$\frac{d\phi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{eff}}{\phi}\right)^n, \tag{3}$$

где A, n – некоторые константы.

Рассмотрим задачу о растяжении стержня. Выбор данной модели для анализа обусловлен двумя причинами: существованием классического решения данной задачи, принадлежащего Л. М. Качанову, а также возможностью простой интерпретации конечных выражений.

Начальный этап анализа точно соответствует традиционному подходу [1].

Пусть в детерминированном случае нагрузка постоянна ($P = \text{const}$). Если разрушение стержня происходит при малой деформации, то изменением его поперечного сечения F_0 можно пренебречь:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F_0} = \sigma_0 = \text{const}. \tag{4}$$

При изучении стохастической интерпретации модели с помощью результатов работ [5–11] используем те же исходные положения, что и в детерминированной модели, и сохраним все принятые обозначения, кроме нагрузки $P \neq \text{const}$. Представим последнюю в виде

$$P = P_0 + \pi,\ P_0 = \text{const}, \tag{5}$$

где π – случайная компонента с заданными статистическими свойствами:

$$\langle \pi(t) \rangle = 0,\ \langle \pi(t)\pi(t') \rangle = C_\pi \delta(t - t'),\ C_\pi = \text{const}, \tag{6}$$

или дельта-коррелированный шум [5, 9, 11]. Полагаем, что относительная величина флуктуирующей нагрузки мала:

$$\left| \frac{\pi}{P_0} \right| << 1. \tag{7}$$

Для дальнейшего анализа изменим интерпретацию функции сплошности. В классических работах подразумевается, что достижение функцией сплошности единицы соответствует времени до разрушения образца. В данном случае допустим, что функция сплошности, достигшая определенного значения, определяет границы интервала функции распределения дефектов. Для удобства рассмотрения и анализа примем, что при любом заданном значении функции сплошности, достижение которого необходимо оценить, эта функция равна единице.

С учетом принятых допущений и для $\sigma = \sigma_{\max} + \sigma_\pi$ кинетическое уравнение (3) можно записать как

$$\frac{d\phi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{\max} + \sigma_\pi}{\phi} \right)^n, \tag{8}$$

где σ_π – напряжение, соответствующее флуктуирующей нагрузке с заданными стохастическими характеристиками:

$$\langle \sigma_\pi(t) \rangle = 0,\ \langle \sigma(t)\sigma(t') \rangle = C_\sigma \delta(t - t'). \tag{9}$$

Перепишем уравнение (8) в форме дифференциалов

$$\left(\frac{\sigma_{\max} + \sigma_\pi}{\phi} \right)^{-n} d\phi = -Adt. \tag{10}$$

Из-за малости флуктуирующего члена преобразуем левую часть этого уравнения к виду

$$\left(\frac{\sigma_{\max} + \sigma_\pi}{\phi} \right)^{-n} \left(1 + \frac{\sigma_\pi}{\sigma_{\max}} \right)^{-n} d\phi = -Adt. \tag{11}$$

Пусть функция сплошности от времени монотонна и не имеет нулей в области своего определения, кроме, может быть, единственной точки на границе интервала области значений. Данные предположения достаточно естественны и следуют из определения общих термодинамических принципов и некоторых естественных условий. В таком случае можно считать, что флуктуации напряжения имеют те же статистические свойства, что и сплошность как функция времени. Константы статистических характеристик при этом будут другие:

$$\langle \sigma_\pi(\phi) \rangle = 0, \ \langle \sigma(\phi)\sigma(\phi') \rangle = C'_\sigma \delta(\phi - \phi'). \tag{12}$$

Уравнение (11) с учетом малости флуктуаций напряжения σ_π может быть переписано в стохастической форме [5]:

$$-A dt = \left(\frac{\sigma_{\max} + \sigma_\pi}{\phi} \right)^{-n} d\phi - \frac{n\phi^n}{\sigma_{\max}^{n+1}} \sigma_\pi d\phi. \tag{13}$$

Подчеркнем, что данное представление уравнения не является вполне строгим, и единственным критерием верификации может служить его согласование с экспериментом.

Запишем уравнение (13) в стандартном для стохастического дифференциального уравнения виде с учетом стохастических характеристик процесса:

$$-A dt = \left(\frac{\sigma_{\max} + \sigma_\pi}{\phi} \right)^{-n} d\phi - \frac{n\phi^n}{\sigma_{\max}^{n+1}} C'_\sigma dW(\phi), \tag{14}$$

где $dW(\phi)$ – дифференциал по винеровскому процессу. Вычислим среднее значение и ковариационную функцию для времени достижения функцией сплошности заданных границ.

Для среднего времени получим

$$\langle t \rangle = \frac{1}{(n+1)A\sigma_{\max}^n} + \frac{n\phi^n C'_\sigma}{\sigma_{\max}^{n+1} A} \int_0^1 dW(\phi) = \frac{1}{(n+1)A\sigma_{\max}^n}, \tag{15}$$

что совпадает с классическим результатом [1], если интерпретировать значение времени достижения границ как время до разрушения образца. Рассчитаем теперь корреляционную функцию для времени достижения заданных границ:

$$\langle [t(\phi) - \langle t(\phi) \rangle][t(\phi') - \langle t(\phi') \rangle] \rangle \equiv \langle t(\phi) t(\phi') \rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^\phi \frac{n\zeta^n C'_\sigma}{A\sigma_{\max}^{n+1}} dW(\zeta) \int_0^{\phi'} \frac{n\zeta^n C'_\sigma}{A\sigma_{\max}^{n+1}} dW(\zeta) \right\rangle = \int_0^{\min(\phi,\phi')} \left(\frac{n\zeta^n C'_\sigma}{A\sigma_{\max}^{n+1}} \right)^2 d\zeta. \tag{16}$$

Последний интеграл в (16) может быть проинтегрирован явно. Рассчитаем его для случая, когда значение ϕ равно ϕ', т.е. для дисперсии. В этом случае интеграл равен

$$\int_0^{\phi} \left(\frac{n\zeta^n C'_\sigma}{A\sigma_{\max}^{n+1}} \right)^2 d\zeta = \frac{n^2 C'^2_\sigma}{A^2 \sigma_{\max}^{2(n+1)}} \frac{\phi^{2n+1}}{2n+1}. \tag{17}$$

Таким образом, мы полностью определили стохастический процесс.

Если определить уровень относительных флуктуаций напряжения δ_σ в виде

$$\delta_\sigma = \frac{\sqrt{C'_\sigma}}{\sigma_{\max}}, \tag{18}$$

то можно записать следующее представление для флуктуаций времени достижения заданных границ на всем интервале времени при изменении функции сплошности от единицы до нуля:

$$\left\langle t^2(\phi) \right\rangle = \frac{n^4 \delta_\sigma^4}{A^2 \sigma_{\max}^{(2n-2)}} \frac{\phi^{2n+1}}{2n+1}, \tag{19}$$

откуда для 90%-ного доверительного интервала времени достижения границ при нагрузке с шумящей компонентой типа стандартного винеровского процесса получим

$$t = \frac{1-\phi^{n+1}}{(n+1)A\sigma_{\max}^n} \pm \frac{n\delta_\sigma^2 \phi^{n+1/2}}{A\sigma_{\max}^{n-1}(2n+1)^{1/2}}, \tag{20}$$

или в стандартных обозначениях регулярного, нестохастического результата [1]

$$t_{dam} = \frac{1-\phi^{n+1}}{(n+1)A\sigma_0^n} \pm \frac{n\delta_\sigma^2 \phi^{n+1/2}}{A\sigma_0^{n-1}(2n+1)^{1/2}}, \tag{21}$$

где σ_0 – критериальное напряжение в классическом случае.

Из полученного выражения видно, что экстремум флуктуаций времени достижения границ может наблюдаться на границе интервала изменения функции сплошности, когда $\phi = 0$ (на границе разрушения), и в точке

$$\phi(t_{extr}) = \frac{n^2(n+1/2)^2 \delta_\sigma^4}{2n+1} \tag{22}$$

внутри интервала функции сплошности. В данном случае t_{extr} близко к начальному времени "жизни" нагруженного образца (флуктуации малы).

Полученный результат соответствует неформальному принципу, хорошо известному инженерам: образец либо ломается почти сразу, либо “живет” долго. С формальной точки зрения такой принцип реализован благодаря наличию дополнительного максимума дисперсии времени до разрушения, рассматриваемой как функция сплошности. Как уже отмечалось, данный результат является следствием нелинейности принятой модели.

Резюме

Проаналізовано інтервальні оцінки границь часу до руйнування в задачі накопичення пошкоджень за допомогою моделі, що базується на аналізі нелінійних феноменологічних диференціальних рівнянь. Розв’язок одержано в рамках методу стохастичних диференціальних рівнянь, які є узагальненням моделі накопичення пошкоджень Качанова–Работнова.

За допомогою апарата стохастичних диференціальних рівнянь одержана дисперсія оцінки для границь часу накопичення пошкоджень як функції параметрів стохастичного процесу. Вирахувана оцінка середнього часу до руйнування статистично однорідного стержня при постійному навантаженні з урахуванням випадкової компоненти навантаження.

1. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Механизм длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.
3. *Работнов Ю. Н.* О разрушении твердых тел // Проблемы механики твердого деформированного тела. – Л.: Изд-во Судостроение, 1970.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966.
5. *Адомиан Дж.* Стохастические системы. – М.: Мир, 1987. – 376 с.
6. *Гарнидер К. В.* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968.
9. *Ефлов В. Б.* Статистический и стохастический анализ. – Петрозаводск. – Из-во ПГУ, 1995. – 108 с.
10. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 406 с.
11. *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его приложения. – М.: Мир, 1986. – 351 с.

Поступила 15. 07. 98