УДК 539.374

Проблемы математической теории пластичности

В. Г. Зубчанинов

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

Приведены результаты исследований автора по развитию и разработке теории определяющих соотношений процессов пластического деформирования в современной математической теории пластичности. Обсуждаются два основных ее классических направления: теория течения и теория процессов. В основе первого направления лежит концепция существования предельной поверхности и возможность разложения деформаций на упругую и пластическую части. Второе, бурно развивающееся направление, напротив, не использует концепцию существования предельных поверхностей и не допускает разложение деформаций на упругие и пластические части, за исключением случаев простого нагружения и простой разгрузки. Считается, что при сложном нагружении и сложной разгрузке деформация является упругопластической (неполной пластической либо неполной упругой). Сближение указанных двух направлений в теории пластичности, как считает автор, при сложном нагружении неизбежно, поскольку они предназначены для исследования закономерностей одних и тех же физико-механических процессов пластического деформирования различных сред. Одна из таких возможностей сближения приведена в данной работе.

1. **Процессы нагружения и деформирования**. Физический процесс в частице тела с координатами x_k $(k=1,\,2,\,3)$ будем считать заданным, если заданы как непрерывно дифференцируемые функции времени t шесть компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(x_k,t)$ либо напряжений $\sigma_{ij}(x_k,t)$, а также температура $T(x_k,t)$ и другие нетермомеханические параметры $\beta(x_k,t)$.

Представим компоненты тензоров $(\varepsilon_{ij}),(\sigma_{ij})$ в виде [1–5]

$$\varepsilon_{ij}=\delta_{ij}\varepsilon_0+Э_{ij};\quad \sigma_{ij}=\delta_{ij}\sigma_0+S_{ij}\quad (i,\,j=1,\,2,\,3), \tag{1}$$

где $\varepsilon_0=\varepsilon_{ii}/3;\ \sigma_0=\sigma_i/3;\ Э_{ij},\,S_{ij}$ – компоненты тензоров-девиаторов.

С учетом $Э_{ij}=0,\,S_{ij}=0$ вместо $\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}$ при задании процесса могут быть использованы другие шесть независимых величин из $\varepsilon_0,Э_{ii}$ либо σ_0,S_{ii}. В шестимерных совмещенных эвклидовых пространствах деформаций E_6 и напряжений Σ_6 с общим неподвижным ортонормированным репером $\{\hat{e}_k\}$ указанные выше процессы деформирования и нагружения представляются траекториями шестимерных векторов деформаций $\bar{\varepsilon}$ и напряжений $\bar{S}$:

$$\bar{\varepsilon}(\tau)=Э_k(\tau)\hat{e}_k,\ \bar{S}(\tau)=S_k(\tau)\hat{e}_k\quad (k=0,1,2,\ldots,5), \tag{2}$$

Здесь $t_0\le\tau\le t;|\bar{\varepsilon}|,|\bar{S}|$ – модули векторов $\bar{\varepsilon},\bar{S}$, равные модулям тензоров,

$$\begin{aligned}|\bar{\varepsilon}|&=\varepsilon=\sqrt{Э_kЭ_k}=\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}=\sqrt{3\varepsilon_0^2+Э^2};\\ |\bar{S}|&=S=\sqrt{S_kS_k}=\sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}=\sqrt{3\sigma_0^2+\sigma^2};\end{aligned} \tag{3}$$

$Э, \sigma$ – модули тензоров-девиаторов деформаций и напряжений соответственно

$$Э = \sqrt{Э_{ij}Э_{ij}}; \quad \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \tag{4}$$

где $Э_0, Э_3$ – проекции вектора деформаций:

$$\begin{cases} Э_0 = \sqrt{3}\,\varepsilon_0, \; Э_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}Э_{11}, \; Э_2 = \sqrt{2}\left(Э_{22} + \dfrac{1}{2}Э_{11}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(Э_{22} - Э_{33}), \\ Э_3 = \sqrt{2}Э_{12}, \; Э_4 = \sqrt{2}Э_{23}, \; Э_5 = \sqrt{2}Э_{31}. \end{cases} \tag{5}$$

Аналогичные выражения можно написать для проекций вектора напряжений в Σ_5, что в обоих случаях вытекают из общих преобразований, приведенных в работе в [1]:

$$Э_0 = \frac{\varepsilon_{ii}}{\sqrt{3}}, \; Э_k = \sqrt{\frac{2}{3}}\beta_k^{ij}Э_{ij}, \; Э_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}}\beta_{ij}^{k}Э_n \;\; (n = 0, 1, 2, ..., 5), \tag{6}$$

где коэффициенты $\beta_k^{ij} = \beta_{ij}^k$ образуют таблицу

ij	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
11	$1/\sqrt{2}$	1	0	0	0	0
22	$1/\sqrt{2}$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	0	0	0
33	$1/\sqrt{2}$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	0	0
12, 21	0	0	0	$\sqrt{3}/2$	0	0
23, 32	0	0	0	0	$\sqrt{3}/2$	0
31, 13	0	0	0	0	0	$\sqrt{3}/2$

Шесть функций $Э_k(\tau)$ характеризуют задание траектории деформации $\bar{\varepsilon}(\tau)$ в E_6, шесть функций $S_k(\tau)$ – траектории напряжений $\bar{S}(\tau)$ в Σ_6.

Внутренняя геометрия траектории деформаций в E_6 определяется движением по ней репера Френе $\{\hat{p}_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$, положение которого на траектории определяет длина дуги траектории $s(\tau)$, где $t_0 \le \tau \le t$. Единичные орты $\hat{p}_k$ связаны уравнениями Френе [1–4]

$$\frac{d\hat{p}_k}{ds} = -\kappa_{k-1}\hat{p}_{k-1} + \kappa_k\hat{p}_{k+1} \;\; (k = 0, 1, ..., 5), \tag{7}$$

где $\kappa_k(s)$ – пять параметров кривизны и кручения траектории $(\kappa_{-1} = \kappa_5 = 0)$; ds – приращение дуги s траектории деформации,

$$ds = \sqrt{dЭ_k dЭ_k} = \sqrt{d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij}}. \tag{8}$$

Соотношения, аналогичные (7), (8), могут быть записаны для траектории напряжений, по которой движется репер Френе $\{\hat{q}_k\}$ в Σ_6 с параметрами внутренней геометрии: длиной дуги траектории Σ и параметрами кривизны и кручения k_n $(n=1, 2, \ldots, 5)$. Траектория деформации $\bar{\varepsilon}(\tau)$ может быть задана шестью параметрами внутренней геометрии: длиной дуги s и пятью параметрами кривизны и кручения κ_n $(n=1, 2, \ldots, 5)$, а траектория напряжений $\bar{S}(\tau)$ – длиной дуги Σ и пятью параметрами кривизны и кручения k_n. В этом случае необходимо также задать положение траекторий при $t=t_0$ в E_6 и Σ_6 соответственно. Это важно подчеркнуть, поскольку ортогональные преобразования вращения и отражения траекторий в E_6 и Σ_6 сохраняют не только их внутреннюю геометрию (параметры s, κ_n либо Σ, k_n), но и инварианты $\varepsilon_0, Э$ либо σ_0, σ, но не сохраняют в общем случае третьи инварианты $I_3=\left|Э_{ij}\right|$ или $I_3^\sigma=\left|S_{ij}\right|$, либо, что одно и то же, углы φ и ψ вида деформированного и напряженного состояний соответственно. Для определения углов φ, ψ имеем формулы

$$\cos 3\varphi = 3\sqrt{6}\left|Э_{ij}\right|/Э; \ \cos 3\psi = 3\sqrt{6}\left|S_{ij}\right|/\sigma. \tag{9}$$

Все три инварианта $\varepsilon_0, Э, I_3$ либо $\sigma_0, \sigma, I_3^\sigma$ сохраняют свои значения только для частного случая таких преобразований, соответствующих вращению координатных осей в точке тела физического пространства. Это означает, что физический процесс сохраняется лишь для весьма узкого, специального вида преобразований в E_6 [1, 2]. Данное обстоятельство должно учитываться при построении теории определяющих соотношений.

Траектория деформаций $\bar{\varepsilon}(\tau)$ в E_6 при заданном репере $\hat{e}_k$ с построенными в каждой ее точке s вектором напряжений $\bar{S}$ и приписанными к этим точкам параметрами $T(\tau), \beta(\tau)$ названы [1, 2] “образом процесса нагружения в пространстве деформаций”. Аналогичное определение имеет место для пространства напряжений Σ_6. Вектор напряжений в каждой точке траектории деформаций можно формально представить в репере Френе $\{\hat{p}_k\}$ следующим образом:

$$\bar{S} = P_k \hat{p}_k \quad (k=0, 1, \ldots, 5). \tag{10}$$

В соответствии с постулатом макроскопической определимости (ПМО), макроскопическое физическое состояние в точке среды в момент времени t однозначно определяется процессом нагружения [1, 2, 4]. Поэтому соотношение (10) может стать физическим законом, если входящие в него коэффициенты P_k будут определены как функционалы процесса $\varepsilon_{ij}(\tau), T(\tau), \beta(\tau)$, инвариантные относительно преобразований вращения координатных осей x_i в точке тела, т.е. в физическом пространстве. В этом случае ПМО естественным образом приводит к определяющим соотношениям вида (10), в которых функционалы процесса зависят от длины дуги траектории S либо инварианта $Э(s)$, а также $\kappa_n(s), T(s), \beta(s)$ и инвариантов $\varepsilon_0(s), I_3^\sigma(s)$:

$$P_k = P_k\{s, \kappa_n, T, \beta, \varepsilon_0, I_3\} \quad (k = 0, 1, \ldots, 5), \tag{11}$$

где параметр прослеживания процесса

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{Э}_{ij}\dot{Э}_{ij}}\, dt. \tag{12}$$

Представление деформации в частице тела как совокупности изменения объема и формы является вполне естественным и удобным с точки зрения постановки экспериментальных исследований. Поэтому вполне естественным является задание физического процесса не в E_6 и Σ_6, а в пятимерном подпространстве тензоров-девиаторов E_5, Σ_5. В этом случае шести компонентам тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_0 + Э_{ij}$ должно быть поставлено в соответствие шесть независимых величин из $\varepsilon_0, Э_{ij}$, или, что одно и то же, траектория деформаций $\overline{Э}(\tau) = Э_k \hat{e}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ в E_5 и ε_0 в каждой ее точке. В этом случае под образом процесса следует понимать совокупность траектории деформаций $\overline{Э}(\tau)$ при заданном репере $\{\hat{e}_k\}$ с построенным в каждой ее точке вектором напряжений $\overline{\sigma} = S_k \hat{e}_k$ и приписанными к этим точкам параметрами $\varepsilon_0(s), T(s), \beta(s)$, где $s = s(t)$. Определяющее соотношение можно представить в виде [1, 5, 6]

$$\overline{\sigma} = P_k\{s, \kappa_m, \varepsilon_0, I_3, T, \beta\}_t\, \hat{p}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 5); \tag{13}$$

$$\sigma_0 = P_0\{s, \kappa_m, \varepsilon_0, I_3, T, \beta\}_t, \tag{14}$$

где s – длина дуги траектории; $\hat{p}_k$ – единичные орты пятимерного репера Френе; κ_m $(m = 1, 2, 3, 4)$ – параметры кривизны и кручения пятимерной траектории в E_5.

Вид уравнений Френе (7) при этом такой же, но $\kappa_0 = 0, \kappa_5 = 0$, поэтому имеем четыре параметра кривизны и кручения $\kappa_m(s)$, где $m = 1, 2, 3, 4$.

Разложим систему уравнений Френе (7) в E_5 на четыре подсистемы [7]

$$\frac{d\hat{p}_m}{ds} = \kappa_m \hat{p}_{m+1}, \quad \frac{d\hat{p}_{m+1}}{ds} = -\kappa_m \hat{p}_m. \tag{15}$$

Для $m = 1, m = 4$ подсистемы дают вращение репера Френе вокруг орты $\hat{p}_3$ со скоростями κ_1, κ_4 в гиперплоскости, образуемой соприкасающимися плоскостями с реперами $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ и $(\hat{p}_4, \hat{p}_5)$ соответственно. Эту гиперплоскость назовем соприкасающейся по аналогии с трехмерными траекториями. Вектор $\hat{p}_3$ ортогонален этой плоскости, и его можно назвать гипербинормалью пятимерного репера Френе. Таким образом, параметры κ_1, κ_4 характеризуют кривизны траекторий деформации в E_5.

Для $m = 2$, $m = 3$ подсистемы (15) дают вращение со скоростями κ_2, κ_3 вокруг ортов $\hat{p}_1$, $\hat{p}_5$, которые по аналогии с трехмерным случаем обусловливают направления касательных к пятимерной траектории. Параметры κ_2, κ_3 характеризуют кручение пятимерной траектории деформации, причем орты $\hat{p}_1$, $\hat{p}_5$, около которых происходит это кручение, являются двумя ее гипернормалями.

Таким образом, в каждый момент движения по траектории репер Френе $\{\hat{p}_k\}$ совершает поступательное движение вдоль касательных векторов $\hat{p}_1$, $\hat{p}_5$ в соприкасающейся гиперплоскости, части которой, определяемые плоскостями с реперами $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$, $(\hat{p}_3, \hat{p}_4)$, могут независимо закручиваться относительно этих же ортов. Это придает перемещению репера Френе по траектории характер винтового движения в E_5. Четыре параметра кривизны и кручения $\kappa_m(s)$ представляют собой натуральные уравнения траектории и вместе с длиной дуги s определяют пять параметров ее внутренней геометрии.

Аналогичные выводы можно привести для траектории нагружения в Σ_5.

Если свойства рассматриваемой среды не зависят от третьих инвариантов $I_3 = |\text{Э}_{ij}|$, $I_3^\sigma = |S_{ij}|$ или их влиянием можно пренебречь (например, в случае металлов и их сплавов), то не только сама среда, отнесенная к физическому пространству с координатами x_k, но и пространства E_6, E_5 и Σ_6, Σ_5 становятся изотропными. В этом случае приходим к постулату изотропии: образ физического процесса в E_5 сохраняется при всех преобразованиях вращения и отражения, если в соответствующих точках траектории деформации сохраняются параметры ε_0, T, β [1, 2, 4]. Аналогичную формулировку можно дать в пространстве Σ_5.

Отметим, что понятие образа процесса можно несколько расширить, если в каждой точке траектории наряду с вектором $\bar{\sigma}$ (либо $\bar{\text{Э}}$) рассматривать другие физические векторы, например $d\bar{\sigma}$ (либо $d\bar{\text{Э}}$) [1, 2–6].

Параметры кривизны и кручения κ_m $(m = 1, 2, 3, 4)$ могут быть вычислены по рекурентной формуле [2, 4]

$$\kappa_k^2 = -\kappa_{k-1}^2 + \left(\frac{d\hat{p}_k}{ds}\right)^2 \quad (k = 1, 2, \ldots, 5). \tag{16}$$

Соотношения Френе (7) позволяют с учетом $\hat{p}_1 = d\bar{\text{Э}}/ds$ последовательно найти входящие в (16) векторы $\hat{p}_k$:

$$\begin{cases} \hat{p}_1 = \dfrac{d\bar{\text{Э}}}{ds}, \ \kappa_1 \hat{p}_2 = \dfrac{d^2\bar{\text{Э}}}{ds^2}, \ \kappa_2 \hat{p}_3 = \kappa_1 \dfrac{d\bar{\text{Э}}}{ds} + \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\kappa_1}\dfrac{d^2\bar{\text{Э}}}{ds^2}\right), \\ \kappa_3 \hat{p}_4 = \kappa_2 \hat{p}_2 + \dfrac{d}{ds}(\hat{p}_3), \ \kappa_4 \hat{p}_5 = \kappa_3 \hat{p}_3 + \dfrac{d}{ds}(\hat{p}_4) \end{cases} \tag{17}$$

и получить формулы для κ_m:

$$\begin{cases} \kappa_1^2 = \dfrac{d^2\overline{Э}}{ds^2}\dfrac{d^2\overline{Э}}{ds^2} = \dfrac{d^2Э_{ij}}{ds^2}\dfrac{d^2Э_{ij}}{ds^2}; \\ \kappa_2^2 = -\kappa_1^2 + \left[\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\kappa_1}\dfrac{d^2\overline{Э}}{ds^2}\right)\right]^2 = -\kappa_1^2 - \left(\dfrac{1}{\kappa_1}\dfrac{d^2\overline{Э}}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\kappa_1}\dfrac{d^3\overline{Э}}{ds^3}\right)^2; \\ \kappa_3^2 = -\kappa_2^2 + \left\{\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{\kappa_1}{\kappa_2}\dfrac{d\overline{Э}}{ds} + \dfrac{1}{\kappa_2}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\kappa_1}\dfrac{d^2\overline{Э}}{ds^2}\right)\right]\right\}^2; \\ \kappa_4^2 = -\kappa_3^2 + \left\{\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1\kappa_3}\dfrac{d^2\overline{Э}}{ds^2} + \dfrac{1}{\kappa_3}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\kappa_1}{\kappa_2}\dfrac{d\overline{Э}}{ds} + \dfrac{1}{\kappa_2}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\kappa_1}\dfrac{d^2\overline{Э}}{ds^2}\right)\right)\right]\right\}^2. \end{cases} \tag{18}$$

2. **Общие дифференциально-нелинейные определяющие соотношения теории процессов**. Далее будем рассматривать представление процессов в пятимерном совмещенном девиаторном пространстве, поскольку оно естественным образом отражает два основных типа деформирования сплошных сред – изменение формы и объема.

Введем угловые координаты в репере Френе $\{\hat{p}_k\}$ согласно формулам

$$\hat{\sigma} = \cos\beta_k \hat{p}_k \quad (k = 1, ..., 5). \tag{19}$$

Здесь и далее “∧” над буквой относится к единичным векторам [4–8]. Тогда соотношение (13) можно записать в виде

$$\overline{\sigma} = P_k \hat{p}_k = \sigma\cos\beta_k \hat{p}_k, \tag{20}$$

где

$$P_k = \overline{\sigma}\cdot\hat{p}_k = \sigma\cos\beta_k. \tag{21}$$

Представим также в репере Френе векторы

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = P_k^* \hat{p}_k; \quad \frac{d\hat{\sigma}}{ds} = P_k^0 \hat{p}_k. \tag{22}$$

Дифференцируя (21) по s, с учетом (15), (19), (22) получаем

$$P_k^* = \frac{d\sigma}{ds}\cos\beta_k + \sigma P_k^0; \tag{23}$$

$$P_k^0 = (\cos\beta_k)' - (\kappa_k\cos\beta_{k+1} - \kappa_{k-1}\cos\beta_{k-1}), \tag{24}$$

где штрих означает дифференцирование по длине дуги s. Введем кроме угловых координат β_k полярные сферические согласно формулам [4, 8]

$$\begin{gathered}\cos\beta_1 = \cos\vartheta_1;\ \cos\beta_2 = \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2;\ \cos\beta_3 = \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3;\\ \cos\beta_4 = \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3\cos\vartheta_4;\ \cos\beta_5 = \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3\sin\vartheta_4\end{gathered} \qquad (25)$$

так, что $\cos\beta_k\cos\beta_k = 1$.

Умножая теперь (23), (24) на $\cos\beta_k$ и производя индексное суммирование с учетом (25), получаем

$$\sigma' = P_k^* \cos\beta_k = P\cos\beta_1; \qquad (26)$$

$$P_k^0 \cos\beta_k = 0, \qquad (27)$$

где P – функция, введенная А. А. Ильюшиным [2]. Поскольку $\bar{\sigma} = \sigma\hat{\sigma}$, то дифференцируя это соотношение с учетом (22) имеем

$$\bar{\sigma}' = \sigma'\hat{\sigma} + \sigma P_k^0 \hat{p}_k. \qquad (28)$$

Исключая из (28) вектор $\hat{p}_2$, с помощью (19) находим

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_k\hat{p}_k + M\hat{\sigma}\ \ (k = 1, 2, \ldots, 5), \qquad (29)$$

где

$$M_k = \sigma(P_k^0 - P_2^0\cos\beta_k/\cos\beta_2),\ \ M_2 = 0; \qquad (30)$$

$$M = \sigma' - M_k\cos\beta_k. \qquad (31)$$

Соотношение (29) можно записать также в виде

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = (M_k + M\cos\beta_k)\hat{p}_k. \qquad (32)$$

Функционалы σ', M_k по-прежнему должны зависеть от параметров $\kappa_m, \varepsilon_0, I_3, T, \beta$ как функций длины дуги s. Следовательно, соотношения (29), (32) полностью отражают физический процесс в E_5 и потому являются общими дифференциально-нелинейными определяющими соотношениями математической теории пластичности. Если, в частности, функционалы процесса не будут зависеть от третьего инварианта I_3, то эти же соотношения будут удовлетворять требованиям постулата изотропии [1, 2].

Используя (24), (25), функционалы процесса (30) запишем в развернутом виде:

$$
\begin{cases}
M_1 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2/\sigma = -\Phi_1 \cos\vartheta_2 + \Phi_2 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_2 - \\
-\kappa_1 (\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2)^2; \\
M_3 \cos\vartheta_2/\sigma = \Phi_2 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_3 - \Phi_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 - \\
-\kappa_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 + \kappa_2 \sin\vartheta_1 (\cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3)^2; \\
M_4 \cos\vartheta_2/\sigma = \Phi_2 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4 + \\
+\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 (\Phi_3 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4 - \Phi_3 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4) - \\
-\kappa_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4 - \\
-\kappa_2 \sin\vartheta_1 (\cos\vartheta_2)^2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4 + \\
+\kappa_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 (\sin\vartheta_4)^2; \\
M_5 \cos\vartheta_2/\sigma = \sin\vartheta_1 [(\Phi_2 \sin\vartheta_3 + \Phi_3 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3)\sin\vartheta_4 + \\
+\Phi_4 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4] - \sin\vartheta_4 [\kappa_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 + \\
+\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 (\kappa_2 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 + \kappa_3 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_4)],
\end{cases}
\tag{33}
$$

где

$$
\Phi_m = \vartheta'_m + \kappa_m \cos\vartheta_{m+1} \quad (m = 1, 2, 3, 4, \vartheta_5 = 0). \tag{34}
$$

Функционалы M_k ответственны за векторные свойства материала, σ' – за скалярные свойства. Для их конкретизации необходима постановка базовых экспериментов по исследованию векторных и скалярных свойств материалов. Для различных классов траекторий должны быть изучены зависимость $\vartheta_m(s)$ и $\sigma(s)$.

Если соотношения (33) разрешить относительно полярных угловых координат ϑ_m, то получим систему уравнений:

$$
\begin{cases}
\vartheta'_1 + \kappa_1 \cos\vartheta_2 = -[M_1 \sin\vartheta_1 + M_0 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2]/\sigma; \\
\sin\vartheta_1 (\vartheta'_2 + \kappa_2 \cos\vartheta_3) = \kappa_1 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + M_0 \cos\vartheta_2/\sigma; \\
\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 (\vartheta'_3 + \kappa_3 \cos\vartheta_4) = \kappa_1 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 + \\
+(M_* \cos\vartheta_3 - M_3 \sin\vartheta_3)/\sigma; \\
\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 (\vartheta'_4 + \kappa_4) = \kappa_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4 + \\
+(M_5 \cos\vartheta_4 - M_4 \sin\vartheta_4)/\sigma,
\end{cases}
\tag{35}
$$

где

$$
M_0 = M_3 \cos\vartheta_3 + M_* \sin\vartheta_3; \;\; M_* = M_4 \cos\vartheta_4 + M_5 \sin\vartheta_4. \tag{36}
$$

Уравнения (35) при конкретизированных функционалах либо функциях процесса служат для определения углов ϑ_m.

Полученные определяющие соотношения являются дифференциально нелинейными в отличие от таковых в теории течения. Они описывают как активный, так и пассивный процессы упругопластического деформирования. Активный процесс определяется из условия положительности элементарной работы формоизменения:

$$dA = \bar{\sigma} d\bar{Э} = \sigma ds \cos\vartheta_1. \tag{37}$$

Если $dA < 0$, то процесс считается пассивным. Таким образом, в среде допускается существование границы раздела зон активного и пассивного деформирования, определяемой из условия $dA = 0$ $(\vartheta_1 = \pi/2)$. Однако при исследовании процессов граница как таковая не используется, и представляет чисто методологический интерес.

Еще одна форма определяющих соотношений получена в [8]. Запишем вектор $\hat{Э}$ в репере Френе в виде

$$\hat{Э} = \cos\alpha_k \hat{p}_k \quad (k = 1, 2, ..., 5). \tag{38}$$

Исключая из (19), (38) вектор $\hat{p}_2$, находим

$$\hat{\sigma} = A_0 \hat{Э} + A_m \hat{p}_m \quad (m = 1, 3, 4, 5), \tag{39}$$

где

$$A_0 = \cos\beta_2 / \cos\alpha_2; \; A_m = \cos\beta_m - A_0 \cos\alpha_m. \tag{40}$$

Исключив $\hat{p}_3$ из (29), (39), получим дифференциально нелинейную форму определяющих соотношений:

$$d\bar{\sigma}/ds = N_r \hat{p}_r + N_\sigma \hat{\sigma} + N_Э \hat{Э} \quad (r = 1, 4, 5), \tag{41}$$

где

$$\begin{cases} N_r = M_r - M_3 A_r / A_3, \; N_Э = -M_3 A_0 / A_3; \\ N_\sigma = \sigma' - N_r \cos\beta_r - N_Э \cos\alpha = M + M_3 / A_3; \\ \cos\alpha = \hat{\sigma} \cdot \hat{Э} = \cos\beta_k \cos\alpha_k. \end{cases} \tag{42}$$

Определяющее соотношение (41) привлекательно тем, что содержит четыре основных физических вектора: $d\bar{\sigma}$, $d\bar{Э}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{Э}$, так как $\hat{p}_1 = d\bar{Э}/ds$, $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$, $\hat{Э} = \bar{Э}/Э$. Это позволило конкретно исследовать локально простые процессы и дать им новое толкование [4, 8], что дало возможность найти пути сближения теории процессов и теории течения.

Определяющие соотношения в пространстве напряжений, аналогичные (29), (32), (41), построены в работах [9, 10]. Все они представляют собой общие законы связи между напряжениями и деформациями в математической теории пластичности. Для ряда сред, в том числе металлов и их сплавов, третьи инварианты не оказывают существенного влияния на точность функционалов и функций процессов. В этом случае не только начально изотропное физическое пространство, но и пятимерное девиаторное пространство становится изотропным. Это означает, что мы приходим к постулату изотропии [1, 2]. Данное свойство некоторых сред настолько упрощает экспериментальные исследования и построение функционалов и функций процессов, что становится возможным решение краевых задач прямым методом, известным как метод СН-ЭВМ [1, 2].

Другое упрощение теории процессов, связанное со сближением с современной теорией течения, будет рассмотрено ниже.

3. **Постулат локальной размерности и частные варианты теории процессов**. Движение репера Френе по траектории вместе с векторами $\overline{\sigma}, d\overline{\sigma}, d\overline{Э}$ создает в каждой ее точке локальный образ процесса. В зависимости от необходимости в этих точках можно рассматривать либо естественный $\{\hat{p}_k\}$, либо общий неподвижный координатный $\{\hat{e}_k\}$ реперы. Отнесем пространство Σ_5 вектора $\overline{\sigma}$ к реперу $\{\hat{p}_k\}$. Представим выражение (19) для вектора $\overline{\sigma}$ в репере Френе в полярных сферических координатах (25) следующим образом:

$$\hat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1\{\cos\vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin\vartheta_2[\cos\vartheta_3 \hat{p}_3 +$$

$$+ \sin\vartheta_3(\cos\vartheta_4 \hat{p}_4 + \sin\vartheta_4 \hat{p}_4)]\}. \tag{43}$$

Разложим Σ_5 на два пересекающихся подпространства $Z \cap \Pi$ с ортонормированными векторами $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}\}, \{\hat{p}_3, \hat{p}_4, \hat{p}_5\}$, в которых соответственно

$$\hat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin\vartheta_2 \hat{p}); \tag{44}$$

$$\hat{p} = \cos\vartheta_3 \hat{p}_3 + \sin\vartheta_3(\cos\vartheta_4 \hat{p}_4 + \sin\vartheta_4 \hat{p}_5). \tag{45}$$

Вектор $\hat{p}$, принадлежащий одновременно к Z- и П-подпространствам, является их пересечением и ортогонален соприкасающейся плоскости $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$. Вектор $\hat{p}$ входит в число базисных векторов Z-подпространства, но не может быть базисным в П-подпространстве в силу зависимости (45). Размерность каждого из рассматриваемых подпространств равна трем, хотя размерность исходного пятимерного пространства сохраняется и равна 3 + 3 – – 1 = 5. В качестве реперов в Z- и П-подпространствах могут быть также приняты $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2\}, \{\hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4, \hat{p}_5\}$ либо $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}\}, \{\hat{p}_4, \hat{p}_5\}$ и др. Важно, что при любом разложении вектор $d\overline{Э} = \hat{p}_1 ds$ в П-подпространство не попадает, поэтому оно является неполным для построения локального образа процесса. На основании этого логически правомерным будет утверждение, названное нами постулатом локальной размерности образа процесса: локальный образ процесса содержится в Z-подпространстве, размерность которого определяется классом рассматриваемых траекторий деформирования.

Рассмотрим ряд классов траекторий различной размерности Z-подпространства.

1. *Одномерный локальный образ.* Здесь можно выделить два класса траекторий – прямолинейные и траектории малой кривизны:

а) *простое нагружение* [3]. В этом случае $\kappa_m = 0, \vartheta_m = 0$ $(m = 1, 2, 3, 4)$. Из (19), (29)–(33), (38) следует $\hat{\sigma} = \hat{p}_1, \hat{Э} = \hat{p}_1, M_3 = M_4 = M_5 = 0$, что приводит к соответствиям теории малых упругопластических деформаций:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{Э}\bar{Э}, \; d\bar{\sigma} = \frac{d\sigma}{dЭ}d\bar{Э}, \tag{46}$$

где связь между σ и $Э$ устанавливается законом Роша–Эйхингера [3] в виде универсальной для любого напряженного состояния зависимости

$$\sigma = \Phi(Э); \tag{47}$$

$$\sigma/Э = 2G_p, \; d\sigma/dЭ = 2G_k, \tag{48}$$

где G_p, G_k – пластический (секущий) и касательный модули сдвига.

Закон пропорциональной (простой) разгрузки имеет вид закона Гука:

$$\Delta\bar{\sigma} = 2G\Delta\bar{Э}; \tag{49}$$

б) *траектории малой сен-венановской кривизны* [2, 11–14]. В этом случае кривизны $\kappa_1 \neq 0, \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0$ $(m = 1, 2, 3, 4)$. Кривизна κ_1 настолько мала, что угол сближения ϑ_1 практически равен нулю. Из (19), (29)–(33) следует

$$\hat{\sigma} = \hat{p}_1; \; M_3 = M_4 = M_5 = 0; \tag{50}$$

$$d\bar{Э} = \frac{ds}{\sigma}\bar{\sigma}; \; d\bar{\sigma} = \frac{d\sigma}{ds}d\bar{Э}; \; ds = \sqrt{dЭ_{ij}dЭ_{ij}} = \sqrt{ds_k ds_k}, \tag{51}$$

где модуль σ связан с длиной дуги s универсальной зависимостью

$$\sigma = \Phi(s). \tag{52}$$

Однако эта зависимость теряет смысл, если s велика [15]. Образ процесса является локально простым или скользящим [4, 5, 8]. Данная теория была впервые предложена в работе [11].

2. *Двумерный локальный образ.* Здесь возможны два типа траекторий – плоская, расположенная в гиперплоскости E_5, и траектории весьма малого кручения, описываемые гипотезой компланарности [1]:

а) *гиперплоские траектории.* В этом случае векторы $\bar{\sigma}, d\bar{\sigma}, d\bar{Э}$ лежат в гиперплоскости $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4\}$, кручения траектории нет $(\kappa_2 = \kappa_3 = 0)$.

Вследствие этого депланация плоскостей $(\hat{p}_1, \hat{p}_2), (\hat{p}_4, \hat{p}_5)$ отсутствует, поэтому $\vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$. Из соотношений (19), (29)–(33) следует $M_3 = M_4 = = M_5 = 0$:

$$\hat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1 \hat{p}_2; \tag{53}$$

$$d\bar{\sigma}/ds = M_1 \hat{p}_1 + (d\sigma/ds - M_1 \cos\vartheta_1)\hat{\sigma}; \tag{54}$$

$$M_1 \sin\vartheta_1 = -\sigma(d\vartheta_1/ds + \kappa_1). \tag{55}$$

Аппроксимации, конкретизирующие M_1, $d\sigma/ds$, приведены автором ранее [4, 7, 8–10, 15];

б) *гипотеза компланарности Ильюшина* [1, 2]. Согласно этой гипотезе, допускаются малые кручения κ_2, κ_3, которые практически не вызывают депланации плоскостей $(\hat{p}_1, \hat{p}_2), (\hat{p}_4, \hat{p}_5)$, что приводит к условиям $\vartheta_2 \approx 0$, $\vartheta_3 \approx 0$. Это означает, что соотношения (53) – (55) для гиперплоской траектории принимаются в качестве аппроксимационных для этого класса траекторий деформирования сверхмалого кручения.

3. *Трехмерный локальный образ.* К этому случаю относятся плоские трехпараметрические задачи и задачи с траекториями малого кручения:

а) *плоские задачи* [3, 4] реализуются в трехмерном изображающем девиаторном подпространстве E_3. Локальный образ в общем случае деформирования также трехмерный, поскольку $\kappa_3 = \kappa_4 = 0, \vartheta_3 = \vartheta_4 = 0$. Из соотношений (19), (29)–(33) получаем основные уравнения:

$$\hat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin\vartheta_2 \hat{p}_3); \tag{56}$$

$$d\bar{\sigma}/ds = M_1 \hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \tag{57}$$

где

$$M = d\sigma/ds - M_1 \cos\vartheta_1 - M_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2; \tag{58}$$

$$M_1 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2/\sigma = -(d\vartheta_1/ds + \kappa_1 \cos\vartheta_2) +$$

$$+(d\vartheta_2/ds + \kappa_2)\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 - \kappa_1(\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2)^2; \tag{59}$$

$$M_3 \cos\vartheta_2/\sigma = (d\vartheta_2/ds + \kappa)\sin\vartheta_1 - \kappa_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2. \tag{60}$$

Конкретизация $d\sigma/ds, \vartheta_m$ дана в работе [15];

б) *гипотеза малого кручения (2-я гипотеза компланарности)* [4–8]. В соответствии с этой гипотезой, параметры кручения κ_2, κ_3 малы настолько, что вектор $\bar{\sigma}$ остается лежать в гиперплоскости, поворачиваясь вместе с ней возле орта $\hat{p}_3$ так, что $\vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$. При этом соотношения (19), (29)–(33) принимают вид

$$\hat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1 \hat{p}_2; \tag{61}$$

$$d\bar{\sigma}/ds = M_1\hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3\hat{p}_3; \tag{62}$$

$$\begin{cases} M_1 \sin\vartheta_1/\sigma = -(d\vartheta_1/ds + \kappa_1), \\ M_3 = \kappa_2\sigma\sin\vartheta_1, \\ M = d\sigma/ds - M_1\cos\vartheta_1. \end{cases} \tag{63}$$

Если допустить, что $\vartheta_2 = 0, \vartheta_3 \neq 0, \kappa_2 \neq 0, \kappa_3 \neq 0$, то соотношения (61)–(63) теории малого кручения полностью сохраняются. При этом ϑ_4, κ_4 – произвольны. В этом случае границы применения теории существенно расширяются. Если $\vartheta_2 \neq 0, \vartheta_3 = 0$, то соотношения теории сохраняются при условии $\kappa_3 = 0$.

4. *Четырехмерный образ*. Данный случай может быть реализован при объемном напряженном состоянии:

а) *теория среднего кручения и произвольных кривизн*. Назовем так теорию, в которой кручение плоскости $(\hat{p}_4, \hat{p}_5)$ практически отсутствует $(\vartheta_3 = 0)$ вследствие малости параметра кручения $\kappa_3 \neq 0$. Тогда из (19), (29)–(33) следуют уравнения данной теории:

$$\hat{\sigma} = \cos\vartheta_1\hat{p}_1 + \sin\vartheta_1(\cos\vartheta_2\hat{p}_2 + \sin\vartheta_2\hat{p}_3); \tag{64}$$

$$d\bar{\sigma}/ds = M_1\hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3\hat{p}_3 + M_4\hat{p}_4, \tag{65}$$

где

$$M_1\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2/\sigma = -\Phi_1\cos\vartheta_2 + \Phi_2\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 -$$

$$-\kappa_1(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2)^2; \tag{66}$$

$$M_3\cos\vartheta_2/\sigma = \Phi_2\sin\vartheta_1 - \kappa_1\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2; \tag{67}$$

$$M_4\cos\vartheta_2/\sigma = \kappa_3\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2; \;\; M_5 = 0; \tag{68}$$

$$M = d\sigma/ds - M_1\cos\vartheta_1 - M_3\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2, \tag{69}$$

где при вычислении Φ_2 следует учесть $\vartheta_3 = 0$. В соотношения (64)–(69) параметры ϑ_4, κ_4 не вошли. Поэтому они не влияют на вид определяющих соотношений и функций процесса и могут быть произвольными, в том числе равными нулю.

5. *Пятимерный локальный образ*. Возможен в общем случае объемного напряженного состояния:

а) *теория средней кривизны и произвольного кручения*. Так мы назовем теорию при произвольных параметрах $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ и малом значении второй кривизны κ_4, которое приводит к $\vartheta_4 \approx 0$. В этом случае имеют место пятичленные определяющие соотношения (19), (29). M_1, M_3 описываются выражениями (66), (67), а для M_4, M_5 получаем

$$\begin{cases} M_4 \cos\vartheta_2 / \sigma = \Phi_2 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_3 + \Phi_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 - \\ -\kappa_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 - \kappa_2 \sin\vartheta_1 (\cos\vartheta_2)^2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_3; \\ M_5 \cos\vartheta_2 / \sigma = \kappa_4 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3. \end{cases} \tag{70}$$

Если $\kappa_4 = 0$, то $M_5 = 0$, и образ процесса становится четырехмерным;

б) *общий случай теории процессов*. В этом случае все параметры процесса ϑ_m, κ_m отличны от нуля. Им соответствуют пятичленные определяющие соотношения (19), (29)–(33) и траектории большой кривизны и большого кручения.

Приведенная классификация траекторий деформирования и соответствующих им локальных образов процессов упругопластического деформирования позволяет обоснованно ставить и проводить базовые эксперименты по конкретизации и аппроксимации функций процессов M_k. Если для трехмерного локального образа достаточно постановки базовых экспериментов на тонкостенных трубчатых образцах, то для четырех- и пятимерных локальных образов нужна постановка экспериментальных исследований нового типа. Одной из проблем экспериментальной пластичности становится реализация четырех- и пятипараметрических испытаний образцов. Такие испытания можно реализовать на трубчатых толстостенных образцах при наличии мощной испытательной техники либо на тонкостенных слоистых образцах из разных материалов, достаточно сильно отличающихся своими упругопластическими свойствами.

К настоящему времени проведены многочисленные экспериментальные исследования по установлению закономерностей упругопластического деформирования различных материалов и сред, направленных на обоснование физической достоверности теории процессов [5, 6, 8, 10, 16–31]. Достаточно глубоко исследованы закономерности упругопластического поведения металлов на двузвенных траекториях, плоских и пространственных многозвенных траекториях, плоских криволинейных траекториях постоянной и переменной кривизны, винтовых пространственных траекториях и т.п. Экспериментально обоснованы постулат изотропии, принцип запаздывания, постулат размерности образа процесса, локально простые процессы, закономерности сложной разгрузки и др.

Построены аппроксимации функций процессов, достаточно хорошо отвечающие опытным данным [15]. Систематические базовые испытания материалов проведены на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе типа СН-ЭВМ, который включает в себя испытательную машину кинематического типа для сложного деформирования, управляющую ЭВМ, датчики сил и деформаций и др. [32].

4. **Современная теория течения**. Во всех теориях течения [1, 4, 33–36] компоненты тензора деформаций и его девиатора разлагаются на упругую и пластическую части. В векторной форме в E_5 это разложение имеет вид

$$\bar{Э} = \bar{Э}^e + \bar{Э}^p, \quad d\bar{Э} = d\bar{Э}^e + d\bar{Э}^p, \tag{71}$$

где упругая часть $\overline{Э}^e$ определяется законом Гука:

$$\overline{Э}^e = \overline{\sigma}/2G, \quad d\overline{Э}^e = d\overline{\sigma}/2G, \tag{72}$$

а пластическая часть $\overline{Э}^p$ – принципом градиентальности [1]:

$$d\overline{Э}^p = d\lambda \operatorname{grad} f. \tag{73}$$

(В данном случае деформационной анизотропией пренебрегаем.)

Вектор напряжений обычно представляют в виде [35, 36]

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^0 + \overline{a}, \tag{74}$$

где $\overline{\sigma}^0 = S_k^0 \hat{e}_k$ – вектор активных напряжений; $\overline{a} = a_k \hat{e}_k$ – вектор микронапряжений.

Вектору $\overline{\sigma}^0$ отвечает тензор-девиатор активных напряжений (S_{ij}^0) так, что в E_5

$$S_k^0 S_k^0 = (\sigma^0)^2 = S_{ij}^0 S_{ij}^0. \tag{75}$$

Второй и третий инварианты девиатора (S_{ij}^0) определяются соотношениями

$$2I_2^0 = S_{ij}^0 S_{ij}^0; \quad I_3^0 = \left|S_{ij}^0\right| = \frac{1}{3} S_{ij}^0 S_{ik}^0 S_{jk}^0. \tag{76}$$

Вместо I_3^0 рассмотрим параметр μ вида напряженного состояния

$$\mu = \cos 3\varphi = 3\sqrt{6}\left|S_{ij}^0\right| \Big/ (\sigma^0)^3, \tag{77}$$

где φ – фаза (или угол) вида напряженного состояния, создаваемая (S_{ij}^0).

Представим поверхность текучести выражением

$$2f = S_k^0 S_k^0 - C^2(\mu, \sigma_{kk}^0) = 0, \tag{78}$$

которое зависит от всех трех инвариантов тензора активных напряжений $\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij}\sigma_0^0$, $\sigma_0 = \sigma_{kk}/3$.

С учетом (73), (76), (77) получаем

$$d\overline{Э}^p = d\lambda \overline{n}, \tag{79}$$

где

$$\bar{n} = \bar{\sigma}^0 - \bar{n}^0; \qquad (80)$$

$$\bar{n}^0 = n_k^0 \hat{e}_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_{ij}^k n_{ij}; \qquad (81)$$

$$n_{ij}^0 = 3q\{\sqrt{6}[S_{ik}^0 S_{jk}^0 / (\sigma^0)^2 - \delta_{ii}/3] - \mu S_{ij}^0 / \sigma^0\}. \qquad (82)$$

Вектор $\bar{n}^0$ назовем вектором вида напряженного состояния, а (n_{ij}) – его тензором-девиатором. Параметр $q = \partial C / \partial \mu$ определяется на основе обработки экспериментальных данных. Для определения вектора $\bar{a}$ в [36] предложено уравнение вида

$$d\bar{a} = N^p d\bar{Э}^p + ds^p (N_\sigma^p \bar{a} + N_Э^p \bar{Э}^p). \qquad (83)$$

Здесь

$$ds^p = \sqrt{dЭ_{ij}^p dЭ_{ij}^p}, \qquad (84)$$

где $Э_{ij}^p$ – компоненты девиатора пластических деформаций; s^p – длина дуги траектории пластических деформаций в E_5.

Основные уравнения теории течения (79), (83), учитывающие трансляционное упрочнение, эффект Баушингера, изменение формы поверхности текучести, можно получить как частный случай определяющих соотношений теории процессов для трехмерного образа процесса в E_5. Полагая в (64) $N_4 = N_5 = 0$, с учетом (71) получаем

$$d\bar{\sigma} = N_1^p d\bar{Э}^p + ds (N_\sigma^p \bar{\sigma} + N_Э^p \bar{Э}^p), \qquad (85)$$

где

$$N_1^p = N_1 / b; \; N_\sigma^p = \frac{1}{b}\left(\frac{N_\sigma}{\sigma} - \frac{N_Э}{2GЭ}\right); \; N_Э^p = N_Э / Эb, \; b = 1 - N_1/2G. \qquad (86)$$

Если теперь в (85) принять $N_1^p = N^p + N_0$, то, используя (72), придем к системе уравнений

$$d\bar{Э}^p = d\lambda \left(\bar{\sigma}^0 - \frac{1}{N_\sigma^p} \frac{d\bar{\sigma}_0}{ds} \right); \quad d\lambda = ds\, N_\sigma^p / N_0; \qquad (87)$$

$$d\bar{a} = N^p d\bar{Э}^p + ds (N_\sigma^p \bar{a} + N_Э^p \bar{Э}^p). \qquad (88)$$

Из сравнения уравнений (83) с (88) следует, что (83), (88) по форме совпадают, а уравнения (79), (87) приводят к соотношениям

$$\frac{d\bar{\sigma}^0}{ds} = N_\sigma^p \bar{n}^0, \quad \frac{ds_{ij}^0}{ds} = N_\sigma^p n_{ij}^0; \tag{89}$$

$$\bar{\sigma} d\bar{Э}^p = \bar{\sigma} d\bar{Э} - \bar{\sigma}\, d\bar{\sigma}/2G = d\lambda(\bar{n}\cdot\bar{\sigma}) \tag{90}$$

или

$$d\lambda = \frac{ds^p}{n} = ds(1 - P/2G)\cos\vartheta_1 / n\cos\vartheta_1^p; \tag{91}$$

$$ds^p = g ds, \; g = (1 - P/2G)\cos\vartheta_1/\cos\vartheta_1^p, \tag{92}$$

где $\cos\vartheta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_1$; $\cos\vartheta_1^p = \hat{\sigma}\cdot\hat{n}$.

Из уравнения (89) при заданной функции процесса N_σ^p и начальном положении поверхности текучести можно найти s_{ij}^0 и $\bar{\sigma}^0$. В теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением определяющие соотношения имеют вид [4]

$$d\bar{Э}^p = d\lambda\bar{\sigma}^0; \; d\bar{a} = N^p d\bar{Э}^p + d(N^p)\bar{Э}^p \;\; (\bar{a} = N^p Э^p). \tag{93}$$

Сравнивая (93) с (87), (88), видим, что первое из них может иметь место только при постоянном по величине и направлению векторе $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0\hat{\sigma}^0$. Если же $\sigma^0 = \text{const}$, то $d\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 d\hat{\sigma}^0 \neq 0$ $(d\bar{\sigma}^0 \perp \bar{\sigma}^0)$.

Второе соотношение (93) также оказывается неточным в общем случае сложного нагружения, что уже отмечалось в работах [4, 36].

Таким образом, теорию течения с трансляционно-неизотропным упрочнением можно рассматривать как один из классических вариантов конкретизации теории процессов. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с теоретическо-экспериментальной конкретизацией функционалов и функций процессов упругопластического деформирования различных сред. Это весьма важно, так как способствует сближению теории течения с теорией процессов в рамках общей математической теории пластичности.

Заключение. В работе приведено систематическое изложение современного состояния теории процессов математической теории пластичности. На основе постулата локальной размерности образов процесса дана их классификация, предложены новые частные варианты теории пластичности. Указан путь сближения теории течения с теорией процессов в рамках общей математической теории пластичности.

Р е з ю м е

Наведено результати досліджень автора щодо розвитку й розробки теорії визначальних рівнянь процесів пластичного деформування в сучасній математичній теорії пластичності. Обговорено основні її класичні направлення: теорія текучості й теорія процесів. В основі першого направлення лежить концепція існування граничної поверхні й можливість розкладу деформацій на пружну й пластичну частини. У другому направленні, що бурхливо розвивається, навпаки, не використовується концепція існування граничних поверхонь і не допускається розклад деформацій на пружну й пластичну частини, за виключенням випадків простого навантаження і простого розвантажування. Прийнято, що у випадку складного навантаження й складного розвантажування деформація є пружнопластичною (неповною пластичною або неповною пружною). Зближення цих двох направлень у теорії пластичності, як вважає автор, в умовах складного навантаження неминуче, оскільки вони призначені для дослідження закономірностей одних і тих же фізико-механічних процесів пластичного деформування різних середовищ. Одна з таких можливостей зближення наведена в даній роботі.

1. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. – М.: МГУ, 1990. – 310 с.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Упругопластические деформации. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
4. *Зубчанинов В. Г.* Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1990. – 368 с.
5. *Зубчанинов В. Г.* Постулат локальной размерности образа процесса и определяющие соотношения в теории пластичности // Прикл. механика. – 1989. – **34**, № 5. – С. 86 – 97.
6. *Зубчанинов В. Г.* Определяющие соотношения теории процессов пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Прочность и пластичность. Тр. IX конф. – М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. – Т. 1. – С. 80 – 85.
7. *Зубчанинов В. Г.* Определяющие соотношения общей теории пластичности при сложном нагружении // Тверь: Твер. ГТУ, 1994. – С. 14 – 38.
8. *Зубчанинов В. Г.* Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 5. – С. 3 – 12.
9. *Зубчанинов В. Г.* Определяющие соотношения теории неупругих процессов в пространстве напряжений. Сообщ. 1. Теоретические основы // Пробл. прочности. – 1992. – № 5. – С. 3 – 13.
10. *Зубчанинов В. Г.* Определяющие соотношения теории неупругих процессов в пространстве напряжений. Сообщ. 2. Экспериментальные основы // Там же. – № 6. – С. 3 – 12.
11. *Ильюшин А. А.* Связь между теориями Сен-Венана–Леви–Мизеса и теорией малых упругопластических деформаций // Прикл. математика и механика. – 1945. – **9**, № 3. – С. 207 – 218.

12. *Ильюшин А. А.* О связи между напряжениями в механике сплошных сред // Там же. – 1954. – **18**, № 6. – С. 641 – 666.
13. *Ильюшин А. А.* Вопросы общей теории пластичности // Там же. – 1960. – **24**, № 3. – С. 399 – 411.
14. *Ильюшин А. А.* Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 3 – 29.
15. *Зубчанинов В. Г.* Об определяющих функциях процессов пластического деформирования // Устойчивость, пластичность, ползучесть. – Тверь: Твер. ГТУ, 1998. – С. 3 – 21.
16. *Зубчанинов В. Г.* Экспериментальное исследование и обоснование теории упругопластических процессов // Устойчивость и пластичность в МДТТ. – Тверь: Политехн. ин-т, 1992. – С. 94 – 159.
17. *Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л.* Экспериментальное исследование закономерностей пластического деформирования металлов по плоским криволинейным траекториям // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 7. – С. 65 – 71.
18. *Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л.* О деформировании конструкционных сталей по замкнутым траекториям непропорционального нагружения // Математическое моделирование систем и процессов. – 1998. – № 6. – С. 30 – 37.
19. *Зубчанинов В. Г.* Проблемы теории пластичности и устойчивости // IV Междунар. науч. симп. “Устойчивость и пластичность в МДТТ”: Тез. докл. – Тверь: Твер. ГУ, 1998. – С. 4 – 11.
20. *Зубчанинов В. Г.* Пластическое деформирование стали по замкнутым криволинейным траекториям // Пробл. прочности. – 1996. – № 4. – С. 19 – 26.
21. *Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л.* Экспериментальное исследование процессов пластического деформирования металлов при сложном нагружении // Прочность и пластичность: Тр. IX конф. – М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. – Т. 1. – С. 86 – 91.
22. *Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л.* О некоторых особенностях упрочнения конструкционных сталей при деформировании по замкнутым криволинейным траекториям // Пробл. прочности. – 1996. – № 5. – С. 17 – 22.
23. *Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л.* Упрочнение конструкционных материалов при сложном деформировании по замкнутым плоским траекториям // Там же. – 1997. – № 3. – С. 19 – 29.
24. *Зубчанинов В. Г., Охлопков Н. Л., Гараников В. В.* Расчет процессов сложного деформирования по многозвенным ломаным траекториям // Изв. вузов. Строительство. – 1998. – № 9. – С. 9 – 15.
25. *Зубчанинов В. Г., Иванов Д. Е., Акимов А. В.* Экспериментальное исследование упругопластического деформирования сталей 40, 40Х при сложном нагружении по плоским траекториям // Устойчивость и пластичность в МДТТ. – Тверь: Твер. политехн. ин-т, 1993. – Ч. 3. – С. 44 – 93.

26. *Зубчанинов В. Г., Аль-Делеми Саади Дж.* Локально простые процессы нагружения сплава АМГ6 в $P+p$ опытах // Устойчивость и пластичность в МДТТ. – Тверь: Твер. политехи. ин-т, 1993. – Ч. 2. – С. 163 – 167.
27. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1960. – № 5. – С. 93 – 100.
28. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопр. теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58 – 82.
29. *Васин Р. А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. – 1971. – № 1. – С. 59 – 126.
30. *Вавакин А. С., Васин Р. А., Викторов В. В., Степанов А. П.* Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. – М.: ВИНИТИ, 1986. – 66 с. Деп. ВИНИТИ 16. 10. 86. № 7298. В 86.
31. *Дегтярев В. П.* Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1976. – 136 с.
32. *Зубчанинов В. Г., Акимов А. В., Охлопков Н. Л.* Автоматизированный комплекс для исследования упругопластических свойств материалов при сложном нагружении. Свидетельство на полезную модель. – М.: Комитет РФ по патентам и тов. знакам, 1998, № 7.
33. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. – М.: МГУ, 1979. – 207 с.
34. *Ишлинский А. Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. – М.: Наука, 1986. – 359 с.
35. *Новожилов В. В.* Вопросы механики сплошной среды. – Л.: Судостроение, 1989. – 397 с.
36. *Бондарь В. С., Фролов А. Н.* Математическое моделирование процессов неупругого поведения и накопления повреждений материала при сложном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 6. – С. 99 – 107.

Поступила 24. 05. 99