УДК 519.21

П.С. КНОПОВ, Е.И. КАСИЦКАЯ

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ЭМПИРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Ключевые слова: *задача стохастического программирования, стационарная эргодическая случайная последовательность, условие сильного перемешивания, большие уклонения*.

Пусть $\{\xi_i, i \in Z\}$ — стационарная в узком смысле эргодическая случайная последовательность, заданная на вероятностном пространстве (Ω, G, P) и принимающая значения в некотором измеримом пространстве $(Y, \aleph)$; $X = [a; b] \subset \Re$; функция

$$\{h(i, x, y): Z * X * Y \to \Re\}$$

выпукла по второму аргументу и измерима по третьему.

Рассмотрим задачу поиска

$$\min_{x \in X} \left\{ f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(i, x, \xi_i) \right\}. \tag{1}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) при всех $i \in Z, x \in X$ $E|h(i, x, \xi_0)| < \infty$;

2) для любого $x \in X$ существует функция $f(x) = \lim_{n \to \infty} E f_n(x)$;

3) найдутся такие $\bar{x} \in X, c > 0$, что

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + c|x - \bar{x}| \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

Из условия 3) следует, что существует единственное решение задачи поиска

$$\min_{x \in X} f(x), \tag{3}$$

и это решение — точка $\bar{x}$.

Очевидно, что при любых n, ω функция $f_n(\cdot)$ выпукла и для каждого n выпукла функция $E f_n(\cdot)$.

Для произвольной функции $g: \Re \to \Re$ обозначим

$$g'_+(x) = \lim_{\Delta \to +0} \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\Delta}, \tag{4}$$

$$g'_-(x) = \lim_{\Delta \to +0} \frac{g(x - \Delta) - g(x)}{\Delta}, \tag{5}$$

если эти пределы существуют.

Введем обозначение $g_n(x) = E f_n(x)$, $x \in X$. Так как из выпуклости функции следует существование для нее пределов (4), (5), получаем, что такие пределы существуют:

— при всех i, y для функции $h(i, \cdot, y)$;

— при каждом i для $Eh(i, \cdot, \xi_0)$;

— при любых n, ω для $f_n(\cdot)$;

— при каждом n для $g_n(\cdot)$.

Лемма 1. Пусть имеется функция $u: X * \Omega \to \Re$, выпуклая по первому аргументу и измеримая по второму. Предположим, что для любого $x \in X$ $E|u(x, \omega)| < \infty$. Обозначим $v(x) = Eu(x, \omega)$. Тогда

$$v'_+(x) = E\{u'_+(x, \omega)\}, \; v'_-(x) = E\{u'_-(x, \omega)\}.$$

Доказательство. Имеем

$$v'_{+}(x)=\lim_{\Delta\to+0}\frac{Eu(x+\Delta,\omega)-Eu(x,\omega)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to+0}E\frac{u(x+\Delta,\omega)-u(x,\omega)}{\Delta}.$$

В силу выпуклости u по x для всех ω

$$u'_{+}(x,\omega)=\inf_{\Delta>0}\frac{u(x+\Delta,\omega)-u(x,\omega)}{\Delta},\tag{6}$$

$$u'_{-}(x,\omega)=\inf_{\Delta>0}\frac{u(x-\Delta,\omega)-u(x,\omega)}{\Delta},\tag{7}$$

причем дроби в правых частях (6) и (7) убывают монотонно при $\Delta\to+0$. Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$E\frac{u(x+\Delta,\omega)-u(x,\omega)}{\Delta}\to E\{u'_{+}(x,\omega)\},\ \Delta\to+0.$$

Аналогично рассуждаем для $v'_{-}(x)$. Лемма доказана.

По лемме 1 при любых $i\in Z,\ x\in X$

$$(Eh)'_{+}(i,x,\xi_i)=E\{h'_{+}(i,x,\xi_i)\},\ (Eh)'_{-}(i,x,\xi_i)=E\{h'_{-}(i,x,\xi_i)\},$$

а также для всех $n\in N, x\in X$

$$g'_{n+}(x)=E\{f'_{n+}(x)\}, g'_{n-}(x)=E\{f'_{n-}(x)\}.$$

Лемма 2. Пусть, кроме предположений 1)–3), выполнены следующие условия:

а) последовательности $h'_{+}(i,\bar{x},\xi_i)-E\{h'_{+}(i,\bar{x},\xi_i)\}$, $i\in Z$, и $h'_{-}(i,\bar{x},\xi_i)-$ $-E\{h'_{-}(i,\bar{x},\xi_i)\}$, $i\in Z$, удовлетворяют условию сильного перемешивания с коэффициентом $\alpha(j)\le\frac{c_0}{1+j^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon>0$;

б) найдется такое $\delta>2/\varepsilon$, что при каждом i

$$E|h'_{+}(i,\bar{x},\xi_0)|^{2+\delta}<\infty,\ E|h'_{-}(i,\bar{x},\xi_0)|^{2+\delta}<\infty;$$

в) существует $c'>0$ такое, что

$$E[h'_{+}(i,\bar{x},\xi_0)]^2\le c',\ E[h'_{-}(i,\bar{x},\xi_0)]^2\le c',\ i\in Z;$$

г) $g'_{n+}(\bar{x})\to f'_{+}(\bar{x}),\ g'_{n-}(\bar{x})\to f'_{-}(\bar{x}),\ n\to\infty$.

Тогда

$$P\{f'_{n+}(\bar{x})\to f'_{+}(\bar{x}), n\to\infty\}=1,\tag{8}$$

$$P\{f'_{n-}(\bar{x})\to f'_{-}(\bar{x}), n\to\infty\}=1.\tag{9}$$

Доказательство. Обозначим $\eta_n=f'_{n+}(\bar{x})-E\{f'_{n+}(\bar{x})\}$. Имеем

$$E\{\eta_n^2\}=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h'_{+}(i,\bar{x},\xi_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\{h'_{+}(i,\bar{x},\xi_i)\}\right]^2=$$

$$=E\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[h'_{+}(i,\bar{x},\xi_i)-E\{h'_{+}(i,\bar{x},\xi_i)\}][h'_{+}(j,\bar{x},\xi_j)-E\{h'_{+}(j,\bar{x},\xi_j)\}]\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\zeta_i\zeta_j,$$

где $\zeta_i=h'_{+}(i,\bar{x},\xi_i)-E\{h'_{+}(i,\bar{x},\xi_i)\},\ i\in Z$.

Из [1] вытекает, что для всех i,j

$$E\zeta_i\zeta_j\le\frac{c_1}{1+|i-j|^{1+\varepsilon'}},\ \varepsilon'>0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\zeta_i\zeta_j \le \frac{c_1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|i-j|^{1+\varepsilon'}} \le \frac{c_2}{n}.$$

Положим $n=m^2$. По лемме Бореля–Кантелли $P\left\{\lim\limits_{m\to\infty}\eta_{m^2}=0\right\}=1.$

Введем обозначение $\varphi_m=\sup\limits_{m^2\le n\le(m+1)^2}|\eta_n-\eta_{m^2}|$. При $m^2\le n\le(m+1)^2$ имеем

$$|\eta_n|\le|\eta_{m^2}|+\varphi_m,$$

$$\eta_n-\eta_{m^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i-\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m^2}\zeta_i=\frac{1}{n}\sum_{i=m^2+1}^{n}\zeta_i+\eta_{m^2}\left(\frac{m^2}{n}-1\right).$$

Отсюда получаем

$$\varphi_m\le\psi_m+\sup_{m^2\le n\le(m+1)^2}\left|\eta_{m^2}\left(\frac{m^2}{n}-1\right)\right|,$$

где $\psi_m=\sup\limits_{m^2\le n\le(m+1)^2}\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=m^2+1}^{n}\zeta_i\right|$.

Рассмотрим

$$E(\psi_m^2)=E\sup_{m^2\le n\le(m+1)^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=m^2+1}^{n}\sum_{j=m^2+1}^{n}\zeta_i\zeta_j\le$$

$$\le E\frac{1}{m^4}\sum_{i=m^2+1}^{(m+1)^2}\sum_{j=m^2+1}^{(m+1)^2}|\zeta_i\zeta_j|\le\frac{c_3}{m^4}[(m+1)^2-m^2]^2\le\frac{c_4}{m^2}.$$

Таким образом, $P\left\{\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m=0\right\}=1.$ Следовательно, $P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=0\right\}=1.$

Из леммы 1 вытекает (8). Аналогично доказывается (9). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда с вероятностью 1 существует $n^*=n^*(\omega)$ такое, что для любого $n>n^*$ задача (1) имеет единственное решение x_n и $x_n=\bar{x}$.

Доказательство. В силу (2)

$$f'_+(\bar{x})\ge c,\;\; f'_-(\bar{x})\ge c.$$

Тогда по лемме 2 с вероятностью 1, начиная с некоторого n^*,

$$f'_{n+}(\bar{x})>0,\;\; f'_{n-}(\bar{x})>0. \tag{10}$$

Так как функция f_n выпукла, из (10) следует, что $\bar{x}$ — единственная точка минимума f_n.

Теорема доказана.

Рассмотрим одну теорему из теории больших уклонений.

Определение 1 [2]. Пусть Σ — сепарабельное банахово пространство, $\{\zeta_i, i\in Z\}$ — стационарная в узком смысле случайная последовательность, заданная на вероятностном пространстве (Ω, G, P) и принимающая значения из Σ. Обозначим B_{mk} σ-алгебру подмножеств Ω, порожденную случайными элементами $\{\zeta_i, m\le i\le k\}$. Для данного $l\in N$ действительные случайные величины $\eta_1,\ldots,\eta_p$, $p\ge2$, называются l-измеримо отделенными, если

$$-\infty\le m_1\le k_1<m_2\le k_2<\ldots<m_p\le k_p\le+\infty;\;\; m_j-k_{j-1}\ge l,\;\; j=2,\ldots,p,$$

и при каждом $j\in\{1,\ldots,p\}$ случайная величина η_j является $B_{m_jk_j}$-измеримой.

Определение 2. Будем полагать, что случайная последовательность $\{\zeta_i, i \in Z\}$ из определения 1 удовлетворяет гипотезе H, если существуют целое неотрицательное число l_0 и невозрастающая функция $\alpha : \{l > l_0\} \to [1; +\infty)$, удовлетворяющая соотношению $\lim_{l \to \infty} \alpha(l) = 1$, для которых

$$\|\eta_1 \ldots \eta_q\|_{L^1(P)} \le \prod_{j=1}^{q} \|\eta_j\|_{L^{\alpha(l)}(P)} \tag{11}$$

при любых $q \ge 2$, $l > l_0$, $\eta_1, \ldots, \eta_q$ l-измеримо отделенных, где

$$\|\eta\|_{L^r(P)} = \left(\int_{\Omega} |\eta(\omega)|^r \, dP \right)^{1/r}.$$

Обозначим $C(X)$ множество всех непрерывных действительных функций, определенных на X. Как известно [3], $C(X)^* = M(X)$ — совокупность ограниченных знаковых мер на X.

Теорема 2 [4]. Пусть $\{\zeta_i, i \in Z\}$ — стационарная в узком смысле эргодическая случайная последовательность, заданная на вероятностном пространстве (Ω, G, P) и принимающая значения в компактном выпуклом множестве $K \subset C(X)$. Предположим, что эта последовательность удовлетворяет гипотезе H. Тогда для каждой меры $Q \in M(X)$ существует предел

$$\Lambda(Q) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\int_{\Omega} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{X} \zeta_i(\omega)(x) Q(dx) \right\} dP \right)$$

и для любого замкнутого $A \subset K$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(P \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \in A \right\} \right) \le - \inf_{g \in A} \Lambda^*(g),$$

где $\Lambda^*(g) = \sup \left\{ \int_X g(x) Q(dx) - \Lambda(Q), Q \in M(X) \right\}$ — неотрицательная, полунепрерывная снизу, выпуклая функция.

Вернемся к рассматриваемой задаче.

Теорема 3. Пусть, кроме условий леммы 2, выполнены следующие условия:

— последовательность $\{\xi_i, i \in Z\}$ удовлетворяет гипотезе H;

— существует такое $L > 0$, что для всех $i \in Z$, $y \in Y$

$$|h'_+(i, \bar{x}, y)| \le L, \; |h'_-(i, \bar{x}, y)| \le L.$$

Тогда

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln (P\{A_n^c\}) \le - \inf_{g \in F} \Lambda^*(g), \tag{12}$$

где

$$\Lambda^*(g) = \sup \{gQ(X) - \Lambda(Q), Q \in M(X)\},$$

$$\Lambda(Q) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\int_{\Omega} \exp \left\{ Q(X) \sum_{i=1}^{n} \min [h'_+(i, \bar{x}, \xi_i), h'_-(i, \bar{x}, \xi_i)] \right\} dP \right),$$

$$A_n = \left\{ \omega : \arg\min_{x \in X} f_n(x) = \{\bar{x}\} \right\}, \; A_n^c = \Omega \setminus A_n,$$

$$F = [-L; 0].$$

Доказательство. Имеем

$$P(A_n^c) = P\{\min[f'_{n+}(\bar{x}), f'_{n-}(\bar{x})] \in F\} \le$$

$$\le P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \min[h'_+(i,\bar{x},\xi_i), h'_-(i,\bar{x},\xi_i)] \in F\right\}. \qquad (13)$$

Обозначим

$$K = \{\alpha(x) = \alpha \ \forall x \in X, \alpha \in [-L; L]\}.$$

Очевидно, что K — компактное выпуклое подмножество $C(X)$.

Исследуем функцию

$$a_i = a_i(x) = \min[h'_+(i,\bar{x},\xi_i), h'_-(i,\bar{x},\xi_i)] \ \ \forall x \in X.$$

При любых фиксированных i, ω имеем $a_i(x) \in K$. Положим

$$F_1 = \{(\alpha(x) = \alpha) \in K : \alpha \in [-L; 0]\}.$$

Получаем, что F_1 — замкнутое подмножество K. Далее,

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \min[h'_+(i,\bar{x},\xi_i), h'_-(i,\bar{x},\xi_i)] \in F\right\} = P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \in F_1\right\}. \qquad (14)$$

Применив теорему 2, имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \in F_1\right\}\right) \le -\inf_{g \in F_1} \Lambda^*(g), \qquad (15)$$

где

$$\Lambda^*(g) = \sup\{g\,Q(X) - \Lambda(Q), Q \in M(X)\},$$

$$\Lambda(Q) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\int_{\Omega} \exp\left\{Q(X)\sum_{i=1}^{n} a_i\right\} dP\right).$$

Из (13)–(15) вытекает (12).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К н о п о в П. С. Про одну нестаціонарну модель M-оцінок з дискретним часом // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 1997. — **57.** — С. 60–66.
2. D e u s c h e l J.-D., S t r o o c k D.W. Large deviations. — Boston: Acad. press, 1989. — 310 p.
3. D u n f o r d N., S c h w a r t z J. Linear operators. Part I: General theory. — New York: Interscience, 1957. — 896 p.
4. К н о п о в П. С., К а с и ц к а я Е. И. О больших уклонениях эмпирических оценок в задачах стохастического программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 52–61.

Поступила 15.12.2009