УДК 519.21

Н.Ю. КУЗНЕЦОВ

О НЕКОТОРЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ИНИЦИИРОВАННЫХ РАБОТАМИ АКАДЕМИКА И.Н. КОВАЛЕНКО

Ключевые слова: *метод «искусственных» моментов регенерации, асимптотическая инвариантность, метод Монте-Карло, ускоренное моделирование, принцип монотонных отказов.*

ВВЕДЕНИЕ

Данную статью я посвящаю своему Учителю академику НАН Украины, доктору физико-математических наук, доктору технических наук, профессору, лауреату государственных премий СССР, УССР и Украины Игорю Николаевичу Коваленко. Игорь Николаевич стоял у истоков развития современной математической теории надежности, результаты его исследований легли в основу многочисленных новых научных направлений, что принесло ему мировую известность и признание. Игорь Николаевич щедро делился идеями со своими учениками, что сыграло ключевую роль при подготовке и защите десяти докторских и свыше 30 кандидатских диссертаций.

Автору посчастливилось познакомиться с Игорем Николаевичем еще в 1973 г., будучи студентом третьего курса факультета кибернетики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко. Идеи И.Н. Коваленко на долгие годы предопределили область научных интересов автора.

Цель настоящей статьи — обзор некоторых направлений исследований, инициированных И.Н. Коваленко и нашедших свое отражение в совместных работах с автором данной статьи, к настоящему моменту их насчитывается уже 16, в том числе три книги. Тематику исследований условно можно разбить на четыре направления:

- метод «искусственных» моментов регенерации;
- асимптотическая нечувствительность;
- метод Монте-Карло и методы понижения дисперсии оценок;
- принцип монотонных отказов.

Рассмотрим каждое из этих направлений в отдельности.

МЕТОД «ИСКУССТВЕННЫХ» МОМЕНТОВ РЕГЕНЕРАЦИИ

Существование вложенного процесса восстановления значительно облегчает анализ сложных систем. В теории массового обслуживания принято считать, что такой процесс существует лишь в том случае, когда основной марковский процесс, описывающий поведение системы, линейчатый. Более общий случай, когда в каждый момент времени одновременно функционирует хотя бы два элемента с «немарковским» характером отказов, исследовать принципиально сложнее, так как не удается построить вложенную цепь Маркова с конечным или счетным множеством состояний. Согласно определению И.Н. Коваленко, система называется существенно многолинейной, если ее поведение можно описать марковским процессом вида

$$\zeta(t)=(\nu(t);\xi_1(t),\dots,\xi_{|\nu(t)|}(t)),\ t\ge 0,$$

причем для любого фиксированного $t\ge 0$ с вероятностью 1 $|\nu(t)|\ge 2$. Здесь $\nu(t)$ — дискретная компонента, отображающая состояние системы, $\xi_1(t),\dots$ $\dots,\xi_{|\nu(t)|}(t)$ — дополнительные непрерывные переменные, принимающие значения в $[0,\infty)$ и вводимые для того, чтобы процесс $\zeta(t)$, $t\ge 0$, стал марковским, а $|\nu(t)|$ — число дополнительных переменных при состоянии системы $\nu(t)$. При этом предполагается, что значение $|\nu(t)|$ не может быть уменьшено путем расширения пространства состояний дискретной компоненты $\nu(t)$.

На протяжении многих лет ученые разных стран пытались подобрать ключи к решению проблемы исследования существенно многолинейных систем. Лишь в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого столетия удалось достичь существенного прогресса. Были разработаны подходы, позволяющие получать результаты и в случае существенно многолинейных систем. Здесь следует упомянуть метод расщепления фазового пространства [1], метод обновлений [2], метод рекуррентных марковских цепей [3] и процессы марковского восстановления [4]. В этом ряду одно из первых мест по праву занимает работа И.Н. Коваленко [5], в которой предложен принципиально новый метод построения «искусственных» моментов регенерации для процессов, описывающих поведение существенно многолинейных систем. При этом открылись широкие перспективы обобщения результатов, полученных для систем, описываемых регенерирующими процессами, на системы, исследование которых еще до недавнего времени представлялось совершенно малоперспективным. В частности, с помощью метода «искусственных» моментов регенерации для многочисленных систем обслуживания и резервированных систем доказаны [6, 7] предельные теоремы о распределении первого момента наступления редкого события (потери требования, отказа системы).

Проиллюстрируем идею метода построения «искусственных» моментов регенерации на примере m независимых процессов восстановления, определяемых функциями распределения $F_i(x)$, $i=1,\dots,m$.

Рассмотрим вначале простой процесс восстановления с функцией распределения $F(x)$ времени ξ между последовательными моментами восстановления. Обозначим $\gamma(t)$ величину перескока, т.е. время от момента t до следующего после t момента восстановления. Предположим, что существуют $\delta>0$, $\rho>0$ и $T<\infty$ такие, что для любого $t\ge T$ и любого борелевского множества $A\subset[0,\delta]$

$$\mathbf{P}\{\gamma(t)\in A\}\ge\rho\int_A dz. \qquad (1)$$

Из этого соотношения следует, что для любого $t\ge T$ и для любого борелевского множества $A\subset[0,\infty]$

$$\mathbf{P}\{\gamma(t)\in A\}=\rho\delta\mathbf{P}\{\theta(0,\delta)\in A\}+(1-\rho\delta)U(t,A), \qquad (2)$$

где $\theta(0,\delta)$ — случайная величина, равномерно распределенная в $[0,\delta]$; для каждого $t\ge T$ $U(t,A)$ — некоторая вероятностная мера, заданная на σ-алгебре борелевских множеств из $[0,\infty)$. Из соотношения (2) следует, что при $t\ge T$ с вероятностью $\rho\delta$ $\gamma(t)$ имеет равномерное распределение в $[0,\delta]$.

Пусть теперь имеется m независимых процессов восстановления, определяемых функциями распределения $F_i(x)$, $i=1,\dots,m$. Предположим, что для любого $i=1,\dots,m$ $\gamma_i(t)$ удовлетворяет соотношению (1), где $\gamma_i(t)$ — величина перескока в момент t у i-го процесса восстановления. Построим последовательность $\{t_n,\ n\ge0\}$, определяемую по следующей рекуррентной схеме:

$$t_0=0,\ \ \tau_n=\inf\{t\ge t_{n-1}:\gamma_i(t)\le R,\ \ 1\le i\le m\},\ \ t_n=\tau_n+T+R,\ \ n\ge1, \qquad (3)$$

где $R>0$ — некоторое фиксированное конечное число. Из построения последовательностей $\{\tau_n, n\ge1\}$ и $\{t_n, n\ge1\}$ следует, что в каждый из моментов t_n соотношение (2) справедливо для всех $\gamma_i(t)$, $i=1,\dots,m$. Введем независимые в совокупности случайные величины I_n, принимающие значение 1 с вероятностью $(\rho\delta)^m$ и 0 — с вероятностью $1-(\rho\delta)^m$. Построив реализацию данных случайных величин, получим новую последовательность $\{t_k^*\}$, которая образуется по правилу: $t_n\in\{t_k^*\}$, если $I_n=1$. Моменты $\{t_k^*\}$ называются «искусственными» моментами регенерации. В каждый из моментов t_k^* все $\gamma_i(t)$, $i=1,\dots,m$, независимы и равномерно распределены в интервале $(0,\delta)$. Это следует из интерпретации соотношения (2).

Следующее утверждение указывает простые условия, гарантирующие выполнение соотношения (1).

Лемма. Предположим, что $\mathbf{M}\xi<\infty$ и существуют такие числа a,b,c $(0\le a<b<\infty,\ c>0)$, что для любых α,β $(a\le\alpha<\beta\le b)$

$$F(\beta)-F(\alpha)\ge c(\beta-\alpha). \qquad (4)$$

Тогда справедливо соотношение (1).

Теорема. Если условия леммы выполнены для каждого из m процессов восстановления, то при определенном выборе R $\mathbf{M}(t_{k+1}^* - t_k^*) < \infty$.

Таким образом, при естественных и достаточно просто проверяемых условиях типа (4) удается строить последовательность «искусственных» моментов регенерации с конечным средним временем между последовательными моментами.

Идея построения «искусственных» моментов регенерации реализована в [6, 7] и для процессов весьма общего вида, когда после моментов обращения $\gamma_i(t)$ в нуль следуют импульсы (в интерпретации — восстановление элементов) с малой средней длительностью, причем во время этих импульсов процессы $\{\gamma_i(t)\}$ могут изменяться «искаженным» образом. Это типичная схема для описания функционирования резервированных систем с восстановлением.

Обратим внимание на важное свойство. Предположим, что поведение системы описывается случайным процессом $\zeta(t)$, $t \ge 0$, и при этом удалось построить последовательность $\{t_k^*\}$ «искусственных» моментов регенерации. Обозначив B_k некоторое событие, связанное с траекторией процесса в $[t_k^*, t_{k+1}^*)$, можно утверждать, что события B_k и B_{k+j} независимы при $j \ge 2$. В то же время события B_k и B_{k+1} могут быть зависимы. Именно данное свойство позволило доказать ряд предельных теорем [6, 7] о распределении первого момента наступления редкого события в системах, для которых невозможно построение регенерирующего процесса в обычном смысле.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

При решении многих практических задач возникает потребность в построении количественных оценок близости искомых показателей надежности систем с незначительно отличающимися характеристиками. Для получения таких оценок иногда удается использовать аналитические методы [8–10]. Однако их практическое применение ограничено двумя факторами: сложностью реальных систем и недостаточной для практических расчетов точностью получаемых оценок. Метод же Монте-Карло вообще не позволяет уловить различие между системами с незначительно отличающимися характеристиками.

И.Н. Коваленко предложил новый метод [11, 12] построения численных оценок непрерывности характеристик систем массового обслуживания и резервированных систем, основанный на совместном использовании статистического моделирования вспомогательной цепи Маркова и аналитическом вычислении некоторых функционалов от ее траекторий.

Рассматривается однородная цепь Маркова $\{\xi_n, n \ge 0\}$, принимающая значения в измеримом пространстве $(X, \mathfrak{F})$, $0 \in X$ — некоторое выделенное состояние (состояние регенерации). Переходную функцию обозначим

$$P(A \mid y) = \mathbf{P}\{\xi_n \in A \mid \xi_{n-1} = y\}, \quad A \in \mathfrak{F}.$$

Предполагается, что в состояние 0 цепь Маркова $\{\xi_n, n \ge 0\}$ возвращается с вероятностью 1, среднее время возвращения конечно и выполнено условие апериодичности. Обозначим $\pi(A)$ эргодическое распределение $\{\xi_n, n \ge 0\}$.

Рассмотрим также цепь Маркова $\{\xi_n^{(0)}, n \ge 0\}$ с переходной функцией $P_0(A \mid y)$, эргодическое распределение $\pi_0(A)$ которой известно. Пусть $P_1(A \mid y) = P(A \mid y) - P_0(A \mid y)$. Положим

$$P_1(A \mid y) = \varepsilon(y)[P^+(A \mid y) - P^-(A \mid y)],$$

где $\varepsilon(y) \ge 0$, а $P^{\pm}(A \mid y)$ — вероятностные меры при любом $y \in X$, для которого $\varepsilon(y) > 0$. Задача состоит в оценке величины

$$a = \int_X f(x)\pi(dx) - \int_X f(x)\pi_0(dx), \tag{5}$$

где $f(x)$ — заданная функция, оба интеграла в правой части (5) конечны.

При указанных условиях в работах [11, 12] получена явная аналитическая формула для расчета поправки a, в которую входят величины, вычисляемые методом Монте-Карло как функционалы траекторий некоторой вспомогательной цепи Маркова.

Данное направление исследований продолжает работа [13], в которой предложен новый метод оценки близости нестационарного и стационарного коэффициентов готовности восстанавливаемой системы.

Рассмотрим восстанавливаемую систему монотонной структуры, состоящую из m независимо функционирующих элементов, имеющих показательно распределенные длительности безотказной работы с постоянными интенсивностями отказа элементов $\{\lambda_i\}$. Число каналов и дисциплина восстановления отказавших элементов может быть произвольной. При этом не накладываются какие-либо ограничения на функции распределения длительностей восстановления элементов, за исключением конечности математических ожиданий. Кроме того, задан критерий (например, структурная функция), позволяющий определять, является ли текущее состояние отказовым. Таким образом, функционирование системы описывается альтернирующим процессом восстановления, первая фаза которого соответствует исправности всех m элементов и имеет показательное распределение с параметром $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, а вторая фаза (период занятости) — интервал времени, когда хотя бы один из элементов неисправен. В начальный момент времени все элементы предполагаются исправными.

Пусть $K(t)$ — нестационарный коэффициент готовности, т.е. вероятность того, что система исправна в момент t. Стационарный коэффициент готовности обозначим $K = K(\infty)$. Для разности $K(t) - K$ И.Н. Коваленко [13] получил аналитическую формулу в виде быстро сходящегося знакопеременного ряда, содержащую некоторые параметры, вычисление которых не может быть осуществлено по явным аналитическим формулам. В то же время удалось предложить эффективную схему оценки этих параметров методом Монте-Карло. Данная схема реализована для конкретного класса резервированных систем, отказовые состояния которых определяются множеством минимальных отказовых сечений. Предложенный подход позволяет, в частности, оценить скорость вхождения системы в стационарный режим.

Методы расчета поправок находят применение и для решения оптимизационных задач теории надежности, играющих особенно важную роль на этапах проектирования систем. В частности, большое значение имеют исследования, направленные на оценку влияния надежности различных групп элементов на надежность системы в целом. Такие исследования позволяют выявить «слабые места» систем, а также обосновать требования к надежности составляющих систему элементов для обеспечения требуемой надежности системы в целом. Математическая постановка задачи состоит в следующем [14].

Пусть имеется система фиксированной структуры, состоящая из m элементов. Все элементы разбиты на n групп однотипных в каждой группе элементов. Предположим, что длительности безотказной работы элементов i-й группы $(1 \le i \le n)$ имеют экспоненциальное распределение со средним τ_i. Не конкретизируя остальные характеристики системы и, в частности, множество состояний ее неисправности, обозначим $P(\tau_1, \dots, \tau_n)$ вероятность отказа системы в фиксированном промежутке $[0, T]$ при заданных $\{\tau_i\}$. Пусть, далее, задана функция $\psi(\tau_1, \dots, \tau_n)$, определяющая затраты на изготовление системы со средними длительностями безотказной работы элементов $\tau_1, \dots, \tau_n$. Предполагается, что эта функция строго выпуклая, монотонно возрастающая и непрерывно дифференцируемая по каждой переменной. Требуется решить следующую задачу нелинейного программирования:

$$\psi(\tau_1, \dots, \tau_n) \Rightarrow \min \tag{6}$$

при ограничениях

$$P(\tau_1, \dots, \tau_n) \le q, \tag{7}$$

$$\tau_i \in (0, \tau_i^+], \quad 1 \le i \le n, \tag{8}$$

где $q \in (0,1)$, $\tau_i^+ \in (0, \infty]$, $1 \le i \le n$, — некоторые фиксированные числа.

В работе [14] предложен метод решения данной задачи, основанный на построении количественных оценок непрерывности с использованием ускоренного моделирования и методов стохастического программирования. В качестве критерия, оценивающего степень влияния надежности различных групп элементов на

$P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, выбирается градиент

$$\nabla P = \left(\frac{\partial P(\tau_1, \ldots, \tau_n)}{\partial \tau_1}, \ldots, \frac{\partial P(\tau_1, \ldots, \tau_n)}{\partial \tau_n} \right).$$

При вычислении градиента ключевым является соотношение

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_i + \varepsilon, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_n) = P(\tau_1, \ldots, \tau_n) + \varepsilon\, A_i(\tau_1, \ldots, \tau_n) + o(\varepsilon),$$

причем коэффициент $A_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ при ε вычисляется с помощью специального алгоритма статистического моделирования, т.е.

$$\frac{\partial P(\tau_1, \ldots, \tau_n)}{\partial \tau_i} = A_i(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \mathbf{M}\alpha_i(\tau_1, \ldots, \tau_n), \quad 1 \le i \le n,$$

и алгоритм построения реализаций случайных величин $\{\alpha_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)\}$ известен. Далее, для решения оптимизационной задачи (6)–(8) используются методы стохастического программирования [15].

В работе [16] приведен обзор результатов, относящихся к асимптотической нечувствительности стационарных характеристик систем массового обслуживания при возмущении тех или иных параметров. Широко известна теорема И.Н. Коваленко, устанавливающая необходимое и достаточное условие независимости стационарного распределения вероятностей состояний одного класса резервированных систем относительно вида распределения времени восстановления элементов при фиксированном среднем времени. Возникает задача расчета поправок к стационарным вероятностям состояний в случае, когда выполнено условие, близкое к данному условию нечувствительности. Для расчета поправок с точностью до $o(\varepsilon)$ в [16] получена явная аналитическая формула, содержащая некоторые параметры, для вычисления которых разработаны эффективные методы статистического моделирования. Среди других результатов, приведенных в [16], отметим метод расчета стационарных вероятностей состояний системы $GI/G/n/0$, у которой рекуррентный поток входящих требований в определенном смысле близок к пуассоновскому. При этом «опорной» системой является система Эрланга $M/G/n/0$, для которой стационарные вероятности находятся в явном виде.

Среди наиболее значимых результатов, полученных в данной области в последнее время, отметим работу [17], в которой исследованы три случая асимптотической нечувствительности вероятности потери требования в системе $GI/G/n/0$ от вида распределения времени обслуживания.

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО И МЕТОДЫ ПОНИЖЕНИЯ ДИСПЕРСИИ ОЦЕНОК

Начало интенсивного применения метода Монте-Карло (метода статистического моделирования) для численного решения реальных практических задач приходится на середину 40-х годов прошлого столетия. Возможность применения метода Монте-Карло к решению детерминированных задач была замечена еще Е. Ферми, Дж. фон Нейманом и С. Уламом. Его суть состоит в использовании реализаций случайных величин для моделирования случайных процессов, описывающих поведение системы, вычислении некоторых функционалов от траекторий этих процессов и построении оценки путем усреднения по количеству реализаций [18, 19]. Закон больших чисел и центральная предельная теорема гарантируют сходимость с вероятностью 1 оценки к точному значению и позволяют оценить скорость сходимости.

На первых порах считалось, что метод Монте-Карло универсален и может использоваться во всех случаях, когда сложность задачи не позволяет применить аналитический подход. Однако оказалось, что при оценке вероятностей, связанных с возникновением редких событий (например, авария на атомной электростанции), этот метод малоэффективен, поскольку для достижения необходимой точности он требует чрезмерных затрат времени на моделирование. В то же время исследование опасности возникновения именно редких событий с большим экономическим и экологическим ущербом представляет наибольший интерес.

Указанный недостаток стимулировал исследования, направленные на поиск методов понижения дисперсии оценок (а следовательно, и времени моделирования), получивших название методов ускоренного моделирования. Одна из первых идей в этом направлении принадлежит И.Н. Коваленко [20, 21]. Он предложил схему моделирования, согласно которой характеристика надежности системы a представляется в виде ряда (аналитическая часть метода)

$$a = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \varepsilon^i \tag{9}$$

по степеням малого параметра $\varepsilon > 0$, причем коэффициенты $\{c_i\}$ от ε не зависят и могут быть вычислены методом Монте-Карло: $c_i = \mathbf{M}\alpha_i$ (статистическая часть метода). В качестве ε можно выбирать величину, которой пропорциональны интенсивности отказа элементов. В случае высокой надежности элементов (т.е. при малых значениях ε) для достижения высокой точности оценки достаточно взять лишь несколько первых членов ряда (9). Методы, использующие указанную идею, получили название аналитико-статистических.

Фундамент современной теории аналитико-статистических методов заложен в работе [22]. Была предложена общая схема, описывающая процесс развития аварийной ситуации в резервированных системах ранговой структуры. Суть подхода состоит в следующем. Поведение системы описывается непрерывным справа марковским процессом $\xi(t)$, $t \ge 0$, принимающим значения в измеримом пространстве $(X, \mathfrak{F})$. Выделяются подмножества состояний $Z_0 \supset Z_1 \supset \ldots \supset Z_r$, где $Z_0 = X$, а Z_r — множество состояний отказа системы. Положим $\tau_i = \inf\{t: \xi(t) \in Z_i\}$, $i = 1, \ldots, r$. Очевидно, что $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_r$. В [22] разработан алгоритм форсированного построения моментов $\{\tau_i\}$ таких, что $\tau_r \le T$, где $[0, T]$ — промежуток времени, в котором исследуется поведение системы. При этом определяются соответствующие нормирующие множители. Доказано, что оценка асимптотически несмещенная.

Данный аналитико-статистический метод построения асимптотически несмещенных оценок непосредственно на модели системы был обобщен в [12, 23]. Его модификация для различных классов резервированных систем с восстановлением позволяется строить несмещенные оценки, причем уменьшение дисперсии составляет в среднем два порядка, а в некоторых случаях и значительно больше. Принципы исследования систем методом Монте-Карло и некоторыми методами ускоренного моделирования см. в [24–26].

ПРИНЦИП МОНОТОННЫХ ОТКАЗОВ

Принцип монотонных отказов, получивший широкие практические применения в последние годы, был сформулирован И.Н. Коваленко еще в 1965 г. [27]. Он позволяет существенно упростить расчеты надежности систем при сохранении высокой точности. Суть принципа монотонных отказов состоит в следующем.

Предположим, что отказ системы наступает при отказе r ее элементов. Тогда последовательные состояния, определяемые числом отказавших элементов, образуют цепочку, начинающуюся нулем и заканчивающуюся числом r. Такой цепочкой будет, например, $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1 \to \ldots \to r-1 \to r$. Монотонная цепочка имеет вид $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to r-1 \to r$, т.е. это наикратчайший путь, который проходит система из абсолютно исправного состояния в отказовое. Оказалось, что с возрастанием надежности элементов вероятность возникновения монотонной отказовой цепочки возрастает, в то время как вероятность возникновения немонотонной отказовой цепочки стремится к нулю. Иначе говоря, если q — вероятность отказа системы в течение одного периода регенерации, то $q = q_0 + q_1$, где q_0 и q_1 — вероятности отказа по монотонной и немонотонной траекториям соответственно. В подавляющем большинстве реальных практических ситуаций $q_1 = o(q_0)$, т.е. вычисление вероятности q сводится к вычислению вероятности монотонного отказа q_0, которая вычисляется либо в явном виде, либо по асимптотической формуле, либо одним из методов ускоренного моделирования.

Широкое применение принцип монотонных отказов нашел при выводе асимптотических выражений для распределения времени безотказной работы систем, поведение которых описывается регенерирующим процессом [28, 29]. Оказывается, что при достаточно простых условиях время безотказной работы имеет асимптотически экспоненциальное распределение с параметром, пропорциональным q. Замена q на q_0 существенно упрощает расчеты при соблюдении их высокой точности. Для конкретного класса систем обслуживания с ограниченной интенсивностью входящего потока И.Н. Коваленко предложил [30] эффективный метод оценки интенсивности потока немонотонных отказов.

Принцип монотонных отказов может эффективно использоваться и при оценке надежности систем, поведение которых не может быть описано регенерирующим процессом [31]. Суть данного подхода состоит в следующем.

Пусть $\xi(t)$, $t \ge 0$, — непрерывный справа марковский процесс, описывающий поведение некоторой системы, содержащей в своем составе восстанавливаемые элементы (если все элементы невосстанавливаемые, то любой отказ монотонный). Обозначим E множество отказовых состояний. Требуется оценить $P(T)$ — вероятность отказа системы в промежутке $[0, T]$.

Введем понятие монотонного отказа. Пусть $\xi(t) = x$, $t < T$. Обозначим $B(t, x)$ событие, состоящее в том, что $\xi(u) \in E$ для некоторого $u \in (t, T]$ и в интервале $(t, u]$ не было восстановлено ни одного элемента системы (монотонный отказ из состояния x в момент t). Для того чтобы в промежутке $[0, T]$ произошел отказ системы, необходимо и достаточно, чтобы в $[0, T]$ произошел монотонный отказ (событие $B(\tau_0, x_0)$, где $\tau_0 = 0$, $x_0 = \xi(\tau_0)$), либо в некоторый момент τ_1 окончилось восстановление одного из элементов и в $(\tau_1, T]$ произошел монотонный отказ (событие $B(\tau_1, x_1)$, где $x_1 = \xi(\tau_1)$), либо в момент τ_2 окончилось восстановление элемента и в $(\tau_2, T]$ произошел монотонный отказ (событие $B(\tau_2, x_2)$, где $x_2 = \xi(\tau_2)$) и т.д. Данный подход позволяет свести вычисление $P(T)$ к вычислению вероятностей $Q(\tau_i, x_i) = \mathbf{P}\{B(\tau_i, x_i)\}$ монотонного отказа в некоторых точках $\{(\tau_i, x_i)\}$.

Алгоритм построения случайной последовательности $\vec{V} = (\nu; \tau_0, x_0, \tau_1, x_1, \ldots, \tau_\nu, x_\nu)$ состоит в следующем.

1. Полагаем $\tau_0 = 0$, $x_0 = \xi(\tau_0)$.

2. Моделируем случайный процесс $\xi(t)$ в промежутке $[\tau_0, T]$ при условии, что событие $B(\tau_0, x_0)$ не произошло, и находим τ_1 — первый момент окончания восстановления одного из элементов.

3. Если $\tau_1 \ge T$, то алгоритм окончен и в этом случае $\nu = 0$. Если же $\tau_1 < T$, то полагаем $x_1 = \xi(\tau_1)$.

4. Предположим, что для некоторого k построен момент $\tau_k < T$ и найдено состояние $x_k = \xi(\tau_k)$. Тогда моделируем случайный процесс $\xi(t)$ в промежутке $[\tau_k, T]$ при условии, что событие $B(\tau_k, x_k)$ не произошло и находим τ_{k+1} — первый момент окончания восстановления одного из элементов. Если $\tau_{k+1} \ge T$, то алгоритм окончен и в этом случае $\nu = k$. Если же $\tau_{k+1} < T$, то полагаем $x_{k+1} = \xi(\tau_{k+1})$ и алгоритм повторяем, увеличивая k на единицу.

При фиксированной последовательности $\vec{V}$ несмещенной оценкой вероятности $P(T)$ служит величина

$$p(\vec{V}) = 1 - \prod_{j=0}^{\nu} [1 - Q(\tau_j, x_j)].$$

Усредняя по реализациям $\vec{V}$, строим оценку с заданными достоверностью и точностью. Для вычисления вероятностей $\{Q(\tau_j, x_j)\}$ монотонного отказа могут использоваться самые разнообразные методы — от аналитических до методов ускоренного моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре затронуты лишь некоторые направления исследований, основы которых заложены в работах И.Н. Коваленко. Эти идеи оставили глубокий след в отечественной и мировой науке, они актуальны до сих пор и эффективно используются для получения все новых результатов. Автор глубоко благодарен Игорю Николаевичу не только за постоянную поддержку и новые нестандартные идеи, которыми он щедро делился, но и за конструктивную критику, способствовавшую творческому росту автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N u m m e l i n E . A splitting technique for φ-recurrent Markov chains. — Helsinki: Inst. Math., Helsinki Univ. Technol. Espoo, 1976.

2. Боровков А.А. Теоремы эргодичности и устойчивости для одного класса стохастических уравнений и их приложения // Теория вероятностей и ее применения. — 1978. — **23**, вып. 2. — С. 241–262.

3. Athreya K.B., Ney P.E. A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains // Trans. Amer. Math. Soc. — 1978. — **245**, N 1. — P. 493–501.
4. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — Киев: Наук. думка, 1982. — 235 с.
5. Коваленко И.Н. Предельные теоремы теории надежности // Кибернетика. — 1977. — № 6. — С. 106–116.
6. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Построение вложенного процесса восстановления для существенно многомерных процессов теории массового обслуживания и его применение к получению предельных теорем. — Киев, 1980. — 60 с. — (Препр. АН Украины / Ин-т кибернетики; № 80-12).
7. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu. Renewal process and rare events limit theorems for essentially multidimensional queueing processes // Math. Operationsforsch. und Statist. — 1981. — **12**, N 2. — P. 211–224.
8. Золотарев В.М. О непрерывности стохастических последовательностей, порождаемых рекуррентными процедурами // Теория вероятностей и ее применения. — 1975. — **20**, вып. 4. — С. 834–847.
9. Боровков А.А. Теоремы эргодичности и устойчивости для одного класса стохастических уравнений и их применения // Там же. — 1978. — **23**, вып. 2. — С. 241–262.
10. Калашников В.В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. — М.: Наука, 1978. — 248 с.
11. Коваленко И.Н. К расчету поправок к характеристикам СМО // Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара. — М.: ВНИИСИ. — 1986. — С. 45–48.
12. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.
13. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Исследование отклонения нестационарного коэффициента готовности восстанавливаемой системы от его стационарного значения // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 2. — С. 79–92.
14. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Наконечный А.Н. Оптимизация характеристик надежности систем на основе использования количественных оценок непрерывности и методов ускоренного моделирования // Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара. — М.: ВНИИСИ. — 1988. — С. 79–84.
15. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 239 с.
16. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Асимптотическая нечувствительность систем массового обслуживания / П. Франкен, Д. Кениг, У. Арндт, Ф. Шмидт. Очереди и точечные процессы. — Киев: Наук. думка, 1984. — С. 250–270.
17. Kovalenko I.N., Atkinson J.B., Mykhalevych K.V. Three cases of light traffic insensitivity of the loss probability in a GI/G/m/0 loss system to the shape of the service time distribution // Queueing Systems. — 2003. — **45**, N 3. — P. 245–271.
18. Hammersley J.M., Handscomb D.C. Monte Carlo methods. — London: Methuen, 1964.
19. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
20. Коваленко И.Н. Некоторые вопросы теории надежности сложных систем // Кибернетику — на службу коммунизму. — М.: Энергия. — 1964. — **2**. — С. 194–205.
21. Коваленко И.Н. Асимптотический метод оценки надежности сложных систем // О надежности сложных систем. — М.: Сов. радио, 1966. — С. 205–223.
22. Коваленко И.Н. К расчету характеристик высоконадежных систем аналитико-статистическим методом // Электрон. моделирование. — 1980. — **2**, № 4. — С. 5–8.
23. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы ускоренного моделирования характеристик высоконадежных систем // Статистика и управление случайными процессами. — М.: Наука, 1989. — С. 77–86.
24. Коваленко И.Н., Кривуца В.Г., Кузнецов Н.Ю. Опыт практического применения методов статистического моделирования в теории надежности // Кибернетика. — 1987. — № 5. — С. 111–117.
25. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Кривуца В.Г. Метод статистического моделирования (метод Монте-Карло) // Надежность и эффективность в технике. — М.: Машиностроение, 1987. — **2**. — С. 208–250.
26. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. — Chichester: Wiley, 1997. — 303 p.
27. Коваленко И.Н. Об оценке надежности сложных систем // Вопросы радиоэлектроники. — 1965. — **12**, № 9. — С. 50–68.
28. Соловьев А.Д. Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1971. — № 6. — С. 79–89.
29. Гнеденко Д.Б., Соловьев А.Д. Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем // Там же. — 1975. — № 3. — С. 121–128.
30. Коваленко И.Н. Оценка интенсивности потока немонотонных отказов в системе обслуживания $(\leq\lambda)/G/m$ // Укр. матем. журн. — 2000. — **52**, № 9. — С. 1219–1225.
31. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Принцип монотонных отказов и его применение к расчету характеристик надежности структурно сложных систем // Стохастические модели систем. — Киев: Военная академия ПВО сухопутных войск, 1986. — С. 25–45.

Поступила 22.11.2009