УДК 539.3: 519.6

И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ [1]

Ключевые слова: *многокомпонентные тела, термонапряженное состояние, идентификация параметров, градиентные методы*.

В работах [1, 2] рассмотрены вопросы построения на основе результатов теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [3, 4] явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации различных параметров начально-краевых задач для уравнений параболического типа с условиями сопряжения. Функционалы-невязки учитывают наблюдения во внутренних точках и на внутренних поверхностях тела.

Аналогичные вопросы при таких наблюдениях исследованы в работе [5] для квазистационарных задач термоупругости.

В данной работе рассмотрены вопросы построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами О.М. Алифанова [6] различных параметров и термоупругих состояний составных тел по результатам наблюдений на частях поверхностей, ограничивающих исследуемое тело.

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ ТЕЛА ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ

Предположим, что в ограниченной связной строго липшицевой области $\Omega \in R^3$ определена система [7, 8] уравнений термоупругого равновесия

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(T;\, y)}{\partial x_k} = \tilde{f}_i(x),\ i = \overline{1,3}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\sigma_{ki} = \sigma_{ik} = \sigma_{ik}(T;\, y) = \sigma_{ik}(x, \alpha, T;\, y) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}(\varepsilon_{lm}(y) - \varepsilon^0_{lm}(\alpha, T))$, σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, ε_{lm} — компоненты тензора деформаций, $\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y_l}{\partial x_m} + \frac{\partial y_m}{\partial x_l}\right)$, $y_l = y_l(x)$ — проекция вектора смещений $y = y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$ точки $x \in \overline{\Omega}$ на ось Ox_l декартовой системы координат; ε^0_{lm} — компоненты тензора деформаций, вызванных изменением $T = \overline{T} - \overline{T}_0$ температуры $\overline{T}$ точки $x \in \overline{\Omega}$ от ее начального состояния $\overline{T}_0$. Когда материал упруго- и теплоизотропный, то полагают [7, 8] $\varepsilon^0_{lm} = l^0 \delta_{lm} = \alpha T \delta_{lm}$, α — коэффициент линейного теплового расширения, δ_{lm} — символ Кронекера, c_{iklm} — упругие постоянные материала области Ω, удовлетворяющие условиям: $c_{iklm} = c_{lmik} = c_{limk}$,

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{lm} \ge \alpha_0 \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon^2_{ik},\ \alpha_0 = \text{const} > 0,\ \forall\, \varepsilon_{ik} \in R^1,\ \forall\, x \in \Omega. \tag{1'}$$

Изменение температуры T по области Ω удовлетворяет уравнению

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \overline{f}, \tag{2}$$

---

[1] Работа выполнена при поддержке «ДФФД–РФФД–2009», проект № Ф28.1/011; договор № Ф28/277–2009.

где $k_{ij} = k_{ji}$,

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \xi_i \xi_j \geq \overline{\alpha}_0 \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2, \ \overline{\alpha}_0 = \text{const} > 0, \ \forall x \in \Omega, \ \forall \xi_i \in R^1. \tag{2$'$}$$

На границе $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω заданы краевые условия:

$$y = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \ i = \overline{1,3}, \ x \in \Gamma_2^1, \tag{4}$$

$$T = \varphi_0, \ x \in \Gamma_1^2, \tag{5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = g_0, \ x \in \Gamma_2^2, \tag{6}$$

$$T = \varphi_1, \ x \in \Gamma_3^2. \tag{7}$$

Предполагаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения

$$y = f_0. \tag{8}$$

При этом считаем, что на участке Γ_3^2 является неизвестным распределение изменения температуры T, т.е. функция φ_1 условия (7) неизвестна.

Таким образом, сформулирована задача (1)–(8), состоящая в определении функции φ_1, при которой первая компонента решения (y, T) задачи (1)–(7) удовлетворяет условию (8).

Вместо краевого условия (7) зададим условие Неймана

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = u, \ x \in \Gamma_3^2, \tag{9}$$

т.е. будем рассматривать задачу (1)–(6), (8), (9), состоящую в определении функции $u = u(x) \in \mathcal{U} = C(\Gamma_3^2)$, при которой первая компонента y решения $Y = (y, T)$ задачи (1)–(6), (9) удовлетворяет равенству (8), где $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{2} \Gamma_i^1$, $\Gamma_1^1 \cap \Gamma_2^1 = \varnothing$, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i^2$, $\Gamma_i^2 \cap \Gamma_j^2 = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1,3}$, $n_j = \cos(n, x_j)$, n — внешняя нормаль.

Легко видеть, что при существовании решения задачи (1)–(8) эта задача и задача (1)–(6), (8), (9) эквивалентны.

Введем в рассмотрение функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2} \| Au - f_0(\cdot) \|_{L_2(\gamma_0)}^2, \tag{10}$$

где $Au = y(u; x)|_{\gamma_0}$.

Вместо классического решения краевой задачи (1)–(6), (9) будем рассматривать ее обобщенное решение.

Определение 1. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением дифференциальной задачи (1)–(6), (9) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall z = (z_1(x), z_2(x)) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a(y, z_1) = l(T; z_1), \tag{11}$$

$$a_1(T, z_2) = l_1(u; z_2), \tag{12}$$

где

$$V = \{v = (v_1(x), v_2(x)) : v_1 \in (W_2^1(\Omega))^3, \ v_2 \in W_2^1(\Omega), \ v|_{\Gamma_1^1} = \varphi, \ v_2|_{\Gamma_1^2} = \varphi_0\},$$

$$V_0 = \{v = (v_1(x), v_2(x)) : v_1|_{\Omega} \in (W_2^1(\Omega))^3, \ v_2 \in W_2^1(\Omega), \ v|_{\Gamma_1^1} = 0, \ v|_{\Gamma_1^2} = 0\},$$

$$a(y,z_1)=\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{lm}(y)\varepsilon_{ik}(z_1)dx,\quad a_1(T,z_2)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}dx,$$

$$l(T;z_1)=(\widetilde{f},z_1)+(g,z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)}+\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{lm}^{0}(\alpha,T)\varepsilon_{ik}(z_1)dx,$$

$$l_1(u;z_2)=(\overline{f},z_2)+(g_0,z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)}+(u,z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}.$$

Теорема 1. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ решение $Y=(y,T)$ задачи (11), (12) существует и единственно.

Справедливость теоремы устанавливается, следуя [9].

Задачу (11), (12), (10) будем решать приближенно с помощью градиентных методов [6].

Итерационная последовательность для нахождения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (11), (12), (10) имеет вид

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n,\quad n=0,1,\ldots,n^*, \tag{13}$$

и начинается с некоторого начального приближения $u_0\in\mathcal{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются выражениями [6]:

- для метода минимальных ошибок

$$p_n=J'_{u_n},\quad \beta_n=\frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}; \tag{14}$$

- для метода скорейшего спуска

$$p_n=J'_{u_n},\quad \beta_n=\frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}; \tag{15}$$

- для метода сопряженных градиентов

$$p_n=J'_{u_n}+\gamma_n p_{n-1},\quad \gamma_0=0,\quad \gamma_n=\frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2},\quad \beta_n=\frac{(J'_{u_n},p_n)}{\|Ap_n\|^2}, \tag{16}$$

где J'_{u_n} — градиент функционала (10) в точке u_n.

Введем в рассмотрение обозначения

$$\pi(u,v)=(\overline{Y}(u)-\overline{Y}(0),\overline{Y}(v)-\overline{Y}(0))_{L_2(\gamma_0)},$$
$$L(v)=(f_0-\overline{Y}(0),\overline{Y}(v)-\overline{Y}(0))_{L_2(\gamma_0)}, \tag{17}$$

где $\forall\, v\in\mathcal{U}$ $\overline{Y}(v)=y(v;x)|_{\gamma_0}$, $y(v;x)$ — первая компонента решения $Y=(y,T)$ задачи (11), (12) при $u=v$.

Имеет место равенство

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+\|f_0-\overline{Y}(0)\|^2_{L_2(\gamma_0)}. \tag{18}$$

Пусть $u,v\in\mathcal{U}$. При $\lambda\in(0,1)$ $z=\lambda v+(1-\lambda)u=u+\lambda(v-u)\in\mathcal{U}$. С учетом (17), (18) получаем

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{J(u+\lambda(v-u))-J(u)}{\lambda}=\pi(u,v-u)-L(v-u)=$$
$$=(\overline{Y}(u)-f_0,\overline{Y}(v)-\overline{Y}(u))_{L_2(\gamma_0)}=\langle J'_u,v-u\rangle. \tag{19}$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (11), (12), (10), следуя [1, 2, 5], введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0,\ x \in \Omega, \quad \psi|_{\Gamma_1^1} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0,\ i = \overline{1,3},\ x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i},\ i = \overline{1,3},\ x \in \gamma_0,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) = 0,\ x \in \Omega, \tag{20}$$

$$p = 0,\ x \in \Gamma_1^2, \qquad \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} n_i = 0,\ x \in \Gamma_2^2 \cup \Gamma_3^2,$$

где $\sigma_{ik}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(\psi)$. Здесь принято $\varepsilon_{lm}^0 = \alpha T \delta_{lm}$.

Вместо классического решения $Y^* = (\psi, p)$ краевой задачи (20) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 2. Обобщенным решением краевой задачи (20) называется вектор-функция $Y^* = (\psi, p) \in V_0$, которая $\forall\ z \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}, \tag{21}$$

$$a_1(p, z_2) - \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) z_2\, dx = 0. \tag{22}$$

Теорема 2. При каждом фиксированном u_n задача (21), (22) имеет единственное решение $Y^* = (\psi, p)$.

Заменив в (21) z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, а в (22) z_2 — разностью $T(u_{n+1}) - T(u_n)$, с учетом (11), (12) получаем

$$(y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n)) +$$

$$+ a_1(p, T(u_{n+1}) - T(u_n)) - \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha (T(u_{n+1}) - T(u_n)) \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) dx =$$

$$= l_1(u_{n+1}; p) - l_1(u_n; p) = (\Delta u_n, p)_{L_2(\Gamma_3^2)},$$

т.е.

$$(y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = (\Delta u_n, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}. \tag{23}$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = p|_{\Gamma_3^2}$, $\| J'_{u_n} \| = \| \widetilde{\psi}_n \|_{L_2(\Gamma_3^2)}$.

Замечание 1. Если в задаче (11), (12), (10) восстанавливаемый поток $u = \text{const} \in \mathcal{U} = R$, то на основании (23) градиент $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n = (1, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}$. Следовательно, $\| J'_{u_n} \| = | \widetilde{\psi}_n |$.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВОГО И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ

На основании равенства (23) можно получить явные выражения градиента J'_{u_n} для случая, когда восстанавливаемый поток $u = u(x)$ задачи (11), (12), (10) может быть представлен в виде линейной комбинации системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$.

Пусть $u = u_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(x)$, где $\alpha_i \in R^1$, $i = \overline{1,m}$. На основании (23) получаем

$$(y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = \sum_{i=1}^{m} \Delta\alpha_i (\varphi_i, p)_{L_2(\gamma_0)}.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_{ni}\}_{i=1}^{m}$, $\widetilde{\psi}_{ni} = (\varphi_i, p)_{L_2(\gamma_0)}$, $\left\| J'_{u_n} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\psi}_{ni}^2$.

Все проведенные рассуждения остаются в силе также для случая, когда тело Ω — изотропное. Тогда компоненты $\sigma_{ij}(T; y)$ тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T)\delta_{ij}, \tag{24}$$

где в (24) по повторяющимся индексам предполагается суммирование ($\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$), $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ — постоянные Ляме; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно [8].

С учетом (24) билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ и форма $l(T; \cdot)$ принимают вид

$$a(y, z_1) = \int_{\Omega} \left\{ \lambda \operatorname{div} y \operatorname{div} z_1 + 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(y)\varepsilon_{ij}(z_1) \right\} dx,$$

$$l(T; z_1) = (\widetilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_{\Omega} (3\lambda + 2\mu)\alpha T \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(z_1) dx.$$

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВОГО И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ ПО НОРМАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЯМ ЧАСТИ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Пусть уравнения равновесия имеют вид (1), а изменение температуры T по области Ω удовлетворяет уравнению (2). На границе Γ области Ω заданы краевые условия (3)–(6) и ограничение

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = u, \; x \in \Gamma_3^2, \tag{25}$$

где $u = u(x)$ — неизвестная функция из $\mathcal{U} = C(\Gamma_3^2)$.

Предполагаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны нормальные составляющие y_N смещения y, заданные равенством

$$y_N = f_0. \tag{26}$$

Получена задача (1)–(6), (25), (26), состоящая в нахождении элемента $u \in \mathcal{U}$, при котором первая компонента решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (1)–(6), (25) удовлетворяет равенству (26).

В этом случае функционал-невязка меет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \| y_N(u) - f_0 \|_{L_2(\gamma_0)}^2. \tag{27}$$

При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ вместо классического решения $Y = (y, T)$ задачи (1)–(6), (25) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. вектор-функцию $Y = (y, T)$, являющуюся решением задачи (11), (12).

Тем самым получена задача (11), (12), (27), состоящая в нахождении элемента u, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (27) при ограничениях (11), (12). Эту задачу будем решать с помощью градиентных методов (13).

Имеют место выражения вида (17)–(19), где $\forall v \in \mathcal{U}$ $\bar{Y}(v) = y_N(v; x)|_{\gamma_0}$, y_N — нормальная составляющая первой компоненты $y(v; x)$ решения $Y = (y, T)$ задачи (11), (12) при $u = v$.

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (11), (12), (27) сопряженная задача имеет вид

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \ x \in \Omega,$$

$$\psi|_{\Gamma_1^1} = 0, \ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \ i = \overline{1,3}, \ x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0,$$

$$\sigma_N(\psi) = y_N(u_n) - f_0, \ x \in \gamma_0,$$

$$\tau_s(\psi) = 0, \ x \in \gamma_0, \tag{28}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) = 0, \ x \in \Omega,$$

$$p = 0, \ x \in \Gamma_1^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} n_i = 0, \ x \in \Gamma_2^2 \cup \Gamma_3^2,$$

где $\sigma_{ij}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{ijlm} \varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 3. Обобщенным решением задачи (28) называется вектор-функция $Y^* = (\psi, p) \in V_0$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a(\psi, z_1) = (y_N(u_n) - f_0, z_{1N})_{L_2(\gamma_0)}, \tag{29}$$

$$a_0(p, z_2) - \int_{\Omega} \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) z_2 \, dx = 0. \tag{30}$$

Имеет место теорема, аналогичная теореме 2.

Заменив в (29) z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, а в (30) z_2 — разностью $T(u_{n+1}) - T(u_n)$, с учетом (11), (12) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = (y_N(u_n) - f_0, y_N(u_{n+1}) - y_N(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = (\Delta u_n, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}. \tag{31}$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = p|_{\Gamma_3^2}$.

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (13), (14) определения $(n+1)$-го приближения решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (11), (12), (27) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (14).

Решив задачу определения функции $z(\tilde{\psi}_n; x) = (z^1, z^2) \in V$, которая $\forall\, w = (w_1(x), w_2(x)) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a(z^1, w_1) = l(z^2; w_1), \tag{32}$$

$$a_1(z^2, w_2) = l_1(J'_{u_n}; w_2), \tag{33}$$

получим элемент AJ'_{u_n}, что позволит реализовать метод скорейшего спуска (13), (15) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (11), (12), (27).

Определив направление спуска p_n с помощью формул (16) и решив задачу вида (32), (33), где в (33) вместо J'_{u_n} используем p_n, получим Ap_n, что позволит реализовать метод сопряженных градиентов (13), (16) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (11), (12), (27).

4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ

Предположим, что тело $\Omega \in R^3$ — изотропное. Компоненты тензора напряжений имеют вид (24), где коэффициент линейного расширения $\alpha = u \in \mathcal{U} = R_+ = (0,+\infty)$ считаем неизвестным. Уравнения равновесия имеют вид

$$-\mu\,\Delta y_i - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div} y + (3\lambda+2\mu)\,\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i} = \widetilde{f}_i\,,\ \ i=\overline{1,3}\,, \tag{34}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = \overline{f}\,,\ \ x\in\Omega\,. \tag{35}$$

На границе Γ заданы краевые условия:

$$y=\varphi,\ \ x\in\Gamma_1^1,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(y)n_j = g_i\,,\ \ i=\overline{1,3},\ \ x\in\Gamma_2^1,$$

$$T=\varphi_0\,,\ \ x\in\Gamma_1^2,$$

$$\sum_{i=1}^{3}k\frac{\partial T}{\partial x_i}\cos(n,x_i) = g_0\,,\ \ x\in\Gamma_2^2\,,\ \ \Gamma=\Gamma_1^2\cup\Gamma_2^2\,. \tag{36}$$

Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (8). Квадратичный функционал-невязка имеет вид (10).

Получена задача (34)–(36), (10), состоящая в нахождении элемента $u=\alpha$, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (10) при ограничениях (34)–(36). Решив эту задачу, получим значение коэффициента α линейного расширения, распределение температурного поля T и смещений y точек тела $\overline{\Omega}$.

При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения $Y=(y,T)$ задачи (34)–(36) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 4. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (34)–(36) называется вектор-функция $Y=(y,T)\in V$, которая $\forall\, z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(y,z_1) = l(u,T;z_1)\,, \tag{37}$$

$$a_1(T,z_2) = l_1(z_2)\,, \tag{38}$$

где

$$a(y,z_1) = \int_\Omega\left\{\lambda\operatorname{div} y\operatorname{div} z_1 + 2\mu\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(y)\varepsilon_{ij}(z_1)\right\}dx\,,$$

$$l(u,T;z_1) = (\widetilde{f},z_1) + (g,z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_\Omega(3\lambda+2\mu)uT\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(z_1)dx,$$

$$a_1(T,z_2) = \int_\Omega\sum_{i=1}^{3}k\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}dx,\ \ l_1(z_2) = (\overline{f},z_2) + (g_0,z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)}.$$

Задачу (37), (38), (10) будем решать с помощью градиентных методов (13). Для каждого приближения u_n введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0,\ \ x\in\Omega,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_1^1}=0,\quad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=0,\quad i=\overline{1,3},\ x\in\Gamma_2^1\setminus\gamma_0,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=y_i(u_n)-f_{0i},\ i=\overline{1,3},\ x\in\gamma_0, \tag{39}$$

где $\sigma_{ik}(\psi)=\sum\limits_{l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 5. Обобщенным решением краевой задачи (39) называется функция $\psi\in V_1^0=\{v(x)\in(W_2^1(\Omega))^3 : v\big|_{\Gamma_1^1}=0\}$, которая $\forall\ z_1\in V_1^0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi,z_1)=(y(u_n)-f_0,z_1)_{L_2(\gamma_0)}. \tag{40}$$

Заменив в (40) функцию z_1 разностью $y(u_{n+1})-y(u_n)$, с учетом (37), (38) получаем

$$(y(u_n)-f_0,y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=a(\psi,y(u_{n+1})-y(u_n))=$$

$$=l(u_{n+1},T;\psi)-l(u_n,T;\psi)=\int_\Omega(3\lambda+2\mu)\Delta u_n T\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)dx,$$

т.е.

$$(y(u_n)-f_0,y(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=\int_\Omega(3\lambda+2\mu)\Delta u_n T\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)dx,$$

где T — решение задачи (38).

Следовательно,

$$J'_{u_n}=\widetilde{\psi}_n, \tag{41}$$

где $\widetilde{\psi}_n=\int\limits_\Omega(3\lambda+2\mu)T\sum\limits_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)dx$, $\|J'_{u_n}\|=|\widetilde{\psi}_n|$.

5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что тело $\Omega\in R^3$ — изотропное. Компоненты тензора напряжений имеют вид (24), где изменения температуры T считаем неизвестными.

Уравнения равновесия имеют вид

$$-\mu\Delta y_i-(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\,y+(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}=\widetilde{f}_i,\ i=\overline{1,3},\ x\in\Omega. \tag{42}$$

На границе Γ заданы краевые условия

$$y=\varphi,\ x\in\Gamma_1^1, \tag{43}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(y)n_j=g_i,\ i=\overline{1,3},\ x\in\Gamma_2^1. \tag{44}$$

Считаем, что на участке $\gamma_0\subset\Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (8). Квадратичный функционал-невязка имеет вид (10).

Получена задача (42)–(44), (8), состоящая в определении изменения температуры $T=u(x)\in\mathcal{U}=C^1(\overline{\Omega})$, при которой решение $y=y(u)$ задачи (42)–(44) удовлетворяет равенствам (8). Вместо классического решения y краевой задачи (42)–(44) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 6. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (42)–(44) называется функция $y=y(u)\in V_1$, которая $\forall\ z_1\in V_1^0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y,z_1)=l(u;z_1), \tag{45}$$

где множество V_1^0 и билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определены в разд. 4,

$$V_1 = \{v(x) \in (W_2^1(\Omega))^3 : v|_{\Gamma_1^1} = \varphi\},$$

$$l(u; z_1) = (\tilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_\Omega (3\lambda + 2\mu)\alpha u \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(z_1)dx.$$

Вместо задачи (42)–(44), (8) будем рассматривать задачу (45), (10), состоящую в нахождении элемента u, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (10) при ограничении (45). Заметим, что в этом случае можно предположить $\mathcal{U} = C(\overline{\Omega})$. В результате решения задачи (45), (10) получим вектор смещений $y = y(x)$ точек области $\overline{\Omega}$ и распределение по $\overline{\Omega}$ изменения температуры T.

Имеют место выражения (17)–(19). Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (45), (10) сопряженная задача имеет вид

$$-\mu\Delta\psi_i - (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\psi = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\psi|_{\Gamma_1^1} = 0, \tag{46}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi)n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_0,$$

где $\sigma_{ij}(\psi) = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(\psi)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\psi), \ i, j = \overline{1,3}.$

Определение 7. Обобщенным решением краевой задачи (46) называется функция $\psi \in V_1^0$, которая $\forall\, z_1 \in V_1^0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}. \tag{47}$$

Выбирая в тождестве (47) вместо z_1 разность $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (45) получаем

$$(y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n)) =$$

$$= l(u_{n+1}; \psi) - l(u_n; \psi) = \int_\Omega (3\lambda + 2\mu)\alpha\Delta u_n \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)dx$$

или

$$(y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = \int_\Omega (3\lambda + 2\mu)\alpha\Delta u_n \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi)dx.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n, \tag{48}$$

где

$$\tilde{\psi}_n = (3\lambda + 2\mu)\alpha \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\psi), \quad \left\|J'_{u_n}\right\|^2 = \int_\Omega \tilde{\psi}_n^2\, dx.$$

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ НОРМАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЯМ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Пусть для изотропного тела Ω уравнения равновесия имеют вид (42), где коэффициент линейного расширения $\alpha = u \in \mathcal{U} = R_+$ считаем неизвестным. Краевые условия заданы выражениями

$$y = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y)n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1, \tag{49}$$

$$y_N = f_0, \quad x \in \gamma_0 \subset \Gamma_2^1.$$

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению (35). На границе Γ заданы краевые условия

$$T=\varphi_0\,,\ x\in\Gamma_1^2\,,$$
$$\sum_{i=1}^{3}k\frac{\partial T}{\partial x_i}\cos(n,x_i)=g_0\,,\ x\in\Gamma_2^2\,,\ \Gamma=\Gamma_1^2\cup\Gamma_2^2\,. \tag{50}$$

Функционал-невязка имеет вид (27). При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения $Y=(y,T)$ краевой задачи (42), (49), (35), (50) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 8. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (42), (49), (35), (50) называется вектор-функция $Y=(y,T)\in V$, которая $\forall\, z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y,z_1)=l(u;z_1)\,, \tag{51}$$

$$a_1(T,z_2)=l_1(z_2)\,, \tag{52}$$

где билинейные формы $a(\cdot,\cdot)$, $a_1(\cdot,\cdot)$ и формы $l(\cdot;\cdot)$, $l(\cdot)$ определены в разд. 4.

Задачу (51), (52), (27) будем решать с помощью градиентных методов (13). Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (51), (52), (27) сопряженная задача имеет вид

$$\begin{gathered}-\mu\Delta\psi_i-(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\psi=0,\ x\in\Omega,\\ \psi\big|_{\Gamma_1^1}=0,\\ \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(\psi)n_j=0,\ i=\overline{1,3},\ x\in\Gamma_2^1\setminus\gamma_0,\\ \sigma_N(\psi)=y_N(u_n)-f_0\,,\ x\in\gamma_0,\quad \tau_s(\psi)=0,\ x\in\gamma_0,\end{gathered} \tag{53}$$

где $\sigma_{ij}(\psi)=2\mu\varepsilon_{ij}(\psi)+\lambda\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(\psi)\delta_{ij}$.

Определение 9. Обобщенным решением краевой задачи (53) называется функция $\psi\in V_1^0$, которая $\forall\, z_1\in V_1^0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi,z_1)=(y_N(u_n)-f_0\,,z_1)_{L_2(\gamma_0)}. \tag{54}$$

Выбирая в тождестве (54) вместо функции z_1 разность $y_N(u_{n+1})-y_N(u_n)$, с учетом тождества (51) получаем

$$(y_N(u_n)-f_0\,,y_N(u_{n+1})-y_N(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=$$
$$=l(u_{n+1};\psi)-l(u_n;\psi)=\int_\Omega(3\lambda+2\mu)\Delta u_n T\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)dx.$$

Следовательно, $J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n$, где

$$\tilde{\psi}_n=\int_\Omega(3\lambda+2\mu)T\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(\psi)dx,\ \left\|J'_{u_n}\right\|=\left|\tilde{\psi}_n\right|.$$

7. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПО ЗАДАННЫМ СМЕЩЕНИЯМ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛА, ОСЛАБЛЕННОГО СЛАБОПРОЧНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Пусть на ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1,\Omega_2\in R^3$ ($\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$) определена система уравнений термоупругого равновесия

$$-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}(y)}{\partial x_k}=\tilde{f}_i\,,\ i=\overline{1,3}\,, \tag{55}$$

где $\sigma_{ik}(y)=\sigma_{ik}(T;y)=\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}(\varepsilon_{lm}(y)-\varepsilon_{lm}^0)$, $\varepsilon_{lm}^0=\varepsilon_{lm}^0(T)$ — компоненты тензора температурных деформаций.

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \overline{f}, \quad x \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2. \tag{56}$$

На границе $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma \quad (\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq \varnothing)$ заданы краевые условия

$$\begin{gathered} y = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1, \\ T = \varphi_0, \quad x \in \Gamma_1^2, \\ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = g_0, \quad x \in \Gamma_2^2, \\ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = u, \quad x \in \Gamma_3^2. \end{gathered} \tag{57}$$

Здесь $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{2} \Gamma_i^1, \; \Gamma_1^1 \cap \Gamma_2^1 = \varnothing, \; \Gamma = \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i^2, \; \Gamma_i^2 \cap \Gamma_j^2 = \varnothing$ при $i \neq j; \; i, j = \overline{1,3}$.

Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (8).

На участке γ, разделяющем тело $\overline{\Omega}$ на две составляющие — $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2$, условия сопряжения слабопрочного включения имеют вид

$$\begin{gathered} [y_N] = 0, \quad [\sigma_N(y)] = 0, \\ [\tau_s(y)] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(y) = r[y_s]. \end{gathered} \tag{58}$$

Эти условия отражают непрерывность нормальных составляющих векторов смещений и напряжений, непрерывность касательных составляющих вектора напряжений и пропорциональность касательных составляющих вектора напряжений скачку касательных составляющих вектора смещений. Здесь $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^+ = \{\varphi\}^+ = \varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega_2 \cap \gamma$, $\varphi^- = \{\varphi\}^- = \varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega_1 \cap \gamma$.

Влияние слаботеплопроницаемого включения γ на температурное состояние тела $\overline{\Omega}$ учитывается условиями

$$[q_T] = 0, \quad q_T^{\pm} = r_1[T], \tag{59}$$

где

$$q_T = \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i). \tag{60}$$

Здесь n — нормаль к участку γ, направленная в область Ω_2.

Получена задача (55)–(59), (8), состоящая в нахождении функции $u \in \mathcal{U} = C(\Gamma_3^2)$, при которой первая компонента y классического решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (55)–(59) удовлетворяет равенству (8). Легко видеть, что в результате решения задачи (55)–(59), (8) определяем не только плотность распределения теплового потока на участке Γ_3^2 границы Γ тела $\overline{\Omega}$, а и распределение температуры, смещений, напряжений, деформаций по составляющим $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2$ тела $\overline{\Omega}$.

Функционал-невязка имеет вид (10). Вместо классического решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (55)–(59) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 10. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (55)–(59) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y, z_1) = l(T; z_1), \tag{61}$$

$$a_1(T, z_2) = l_1(u; z_2), \tag{62}$$

где

$$V = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x)) : v_1|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3,\ v_2|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2,\ v_1|_{\Gamma_1^1} = \varphi,$$

$$[v_{1N}]|_\gamma = 0,\ v_2|_{\Gamma_1^2} = \varphi_0\},\ V_0 = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x)) : v_1|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3,$$

$$v_2|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2,\ v_1|_{\Gamma_1^1} = 0,\ [v_{1N}]|_\gamma = 0,\ v_2|_{\Gamma_1^2} = 0\},$$

$$a(y, z_1) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(z_1)\, dx + \int_\gamma r[y_s][z_{1s}]\, d\gamma,$$

$$a_1(T, z_2) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i}\, dx + \int_\gamma r_1[T][z_2]\, d\gamma,$$

$$l(T; z_1) = (\bar{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \alpha T \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(z_1)\, dx,$$

$$l_1(u; z_2) = (\tilde{f}, z_2) + (g_0, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)} + (u, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}.$$

Задачу (61), (62), (10) будем решать с помощью градиентных методов (13). Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (61), (62), (10) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0,\ x \in \Omega, \quad \psi|_{\Gamma_1^1} = 0,\ \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}(\psi) n_k = 0,\ i = \overline{1,3},\ x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i},\ i = \overline{1,3},\ x \in \gamma_0,$$

$$[\psi_N]|_\gamma = 0,\ [\sigma_N(\psi)] = 0,\ x \in \gamma,$$

$$[\tau_s(\psi)] = 0,\ \tau_s^\pm(\psi) = r[\psi_s],\ x \in \gamma, \tag{63}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\, \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) = 0,\ x \in \Omega,$$

$$p = 0,\ x \in \Gamma_1^2,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = 0\right],\ x \in \gamma,$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i)\right\}^\pm = r_1[p],\ x \in \gamma,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} n_i = 0,\ x \in \Gamma_2^2 \cup \Gamma_3^2,$$

где $\sigma_{ij}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{ijlm}\, \varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 11. Обобщенным решением краевой задачи (63) называется вектор-функция $Y^* = (\psi, p) \in V_0$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}, \tag{64}$$

$$a_1(p, z_2) - \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) z_2 \, dx = 0. \tag{65}$$

Решение Y^* задачи (64), (65) существует и единственно.

Заменив в (64) функцию z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, а в (65) z_2 — разностью $T(u_{n+1}) - T(u_n)$, с учетом (61), (62) получим

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = (y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = (\Delta u_n, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}. \tag{65$'$}$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где

$$\tilde{\psi}_n = p|_{\Gamma_3^2}, \quad \|J'_{u_n}\|^2 = \int_{\Gamma_3^2} \tilde{\psi}_n^2 \, d\Gamma_3^2.$$

Замечание 2. Если $\Gamma_3^2 = \Gamma_3^{21} \cup \Gamma_3^{22}$, где $\Gamma_3^{21} \cap \Gamma_3^{22} = \varnothing$, $\Gamma_3^{2i} = \partial\Omega_i \cap \Gamma_3^2$, $i = 1,2$, то можем предположить $\mathcal{U} = C(\Gamma_3^{21}) \times C(\Gamma_3^{22})$. На основании (65$'$) получаем $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi} = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\tilde{\psi}_n^i = p|_{\Gamma_3^{2i}}$, $i = 1,2$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Gamma_3^{2i}} (\tilde{\psi}_n^i)^2 \, d\Gamma_3^{2i}$.

Замечание 3. Если $u|_{\Gamma_3^{2i}} = u_m^i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^i \varphi_j^i(x)$, где $\{\varphi_j^i\}_{j=1}^{m_i}$ — система линейно независимых функций, то $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\tilde{\psi}_n^i = \{\tilde{\psi}_{n_j}^i\}_{j=1}^{m_i}$, $\tilde{\psi}_{n_j}^i = \int_{\Gamma_3^{2i}} \varphi_j^i p \, d\Gamma_3^{2i}$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{m_i} (\tilde{\psi}_{n_j}^i)^2$.

8. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ПАРАМЕТРА ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ ПРОСЛОЯ, ЕГО ТЕРМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Пусть на области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ определена система термоупругого равновесия (55) и диффузии тепла (56). На границе Γ заданы краевые условия

$$\begin{gathered} y = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1, \\ T = \varphi_0, \quad x \in \Gamma_1^2, \\ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = g_0, \quad x \in \Gamma_2^2, \\ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = u_1(x), \quad x \in \Gamma_3^2. \end{gathered} \tag{66}$$

Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (8).

На участке γ условия сопряжения имеют вид

$$\begin{gathered} [y_N] = 0, \quad [\sigma_N(y)] = 0, \quad [\tau_s(y)] = 0, \quad \tau_s^{\pm} = u_2[y_s], \\ [q_T] = 0, \quad q_T^{\pm} = u_3[T], \end{gathered} \tag{67}$$

где $u_2, u_3 = \text{const} \geq 0$.

Получена задача (55), (56), (66), (67), (8), состоящая в нахождении вектора $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathcal{U}=C(\Gamma_3^2)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$, при котором первая компонента классического решения $Y=(y,T)$ краевой задачи (55), (56), (66), (67) удовлетворяет равенству (8). При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения $Y=(y,T)$ краевой задачи (55), (56), (66), (67) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 12. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (55), (56), (66), (67) называется вектор-функция $Y=(y,T)\in V$, которая $\forall\, z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(u;y,z_1)=l(T;z_1), \tag{68}$$

$$a_1(u;T,z_2)=l_1(u;z_2), \tag{69}$$

где множества V, V_0 определены в разд. 7,

$$a(u;y,z_1)=\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\,\varepsilon_{lm}(y)\varepsilon_{ik}(z_1)dx+\int_\gamma u_2[y_s][z_{1s}]d\gamma,$$

$$a_1(u;T,z_2)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}dx+\int_\gamma u_3[T][z_2]d\gamma,$$

$$l(T;z_1)=(\widetilde{f},z_1)+(g,z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)}+\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\alpha T\delta_{lm}\,\varepsilon_{ik}(z_1)dx,$$

$$l_1(u;z_2)=(\overline{f},z_2)+(g_0,z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)}+(u_1,z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}.$$

При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ решение $Y=(y,T)$ задачи (68), (69) существует и единственно. Задачу (68), (69), (10), состоящую в нахождении элемента u, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал (10) при ограничениях (68), (69), будем решать с помощью градиентных методов (13). При определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (68), (69), (10) определим вектор $\widetilde{Y}=(\widetilde{y},\widetilde{T})$ как элемент множества V, который $\forall\, z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(u_n;\widetilde{y},z_1)=l(\widetilde{T};z_1)-\int_\gamma \Delta u_{2n}[y_s(u_n)][z_{1s}]d\gamma, \tag{70}$$

$$a_1(u_n;\widetilde{T},z_2)=l_1(u_n;z_2)-\int_\gamma \Delta u_{3n}[T(u_n)][z_2]d\gamma+(\Delta u_{1n},z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}. \tag{71}$$

Решение $\widetilde{Y}=(\widetilde{y},\widetilde{T})$ задачи (70), (71) для фиксированных u_n, $\Delta u_n=$ $=(\Delta u_{1n},\Delta u_{2n},\Delta u_{3n})$ существует и единственно.

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (68), (69), (10) введем в рассмотрение сопряженную задачу, состоящую в нахождении вектор-функции $Y^*=(\psi,p)\in V_0$, которая $\forall\, z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(u_n;\psi,z_1)=(y(u_n)-f_0,z_1)_{L_2(\gamma_0)}, \tag{72}$$

$$a_1(u_n;p,z_2)-\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\alpha z_2\delta_{lm}\,\varepsilon_{ik}(\psi)dx=0. \tag{73}$$

Заменив в (72) функцию z_1 разностью $\widetilde{y}-y(u_n)$, а в (73) z_2 — разностью $\widetilde{T}-T(u_n)$, с учетом (70), (71) получим

$$(y(u_n)-f_0,\widetilde{y}-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=a(u_n;\widetilde{y}-y(u_n),\psi)+a_1(u_n;\widetilde{T}-T(u_n),p)-$$
$$-\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\alpha((\widetilde{T}-T(u_n))\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi))dx=-\int_\gamma \Delta u_{2n}[y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma-$$
$$-\int_\gamma \Delta u_{3n}[T(u_n)][p]d\gamma+(\Delta u_{1n},p)_{L_2(\Gamma_3^2)}$$

или

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle \approx (y(u_n) - f_0, \tilde{y} - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = -\int_\gamma \Delta u_{2n} [y_s(u_n)][\psi_s] d\gamma -$$

$$-\int_\gamma \Delta u_{3n} [T(u_n)][p] d\gamma + (\Delta u_{1n}, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}. \qquad (74)$$

Следовательно, $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3$, $\tilde{\psi}_n^1 = p|_{\Gamma_3^2}$, $\tilde{\psi}_n^2 = -\int_\gamma [y_s(u_n)][\psi_s] d\gamma$,

$\tilde{\psi}_n^3 = -\int_\gamma [T(u_n)][p] d\gamma$, $\left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \int_{\Gamma_3^2} (\tilde{\psi}_n^1)^2 d\Gamma_3^2 + (\tilde{\psi}_n^2)^2 + (\tilde{\psi}_n^3)^2$.

Замечание 4. Если в задаче (68), (69), (10) u_1 — известная функция, то $\mathcal{U} = [0, \infty) \times [0, \infty)$.

На основании (74) получаем $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$, где

$\tilde{\psi}_n = (\tilde{\psi}_n^2, \tilde{\psi}_n^3)$, $\tilde{\psi}_n^2 = -\int_\gamma [y_s(u_n)][\psi_s] d\gamma$, $\tilde{\psi}_n^3 = -\int_\gamma [T(u_n)][p] d\gamma$, $\left\| J'_{u_n} \right\|^2 \approx \sum_{i=1}^2 (\tilde{\psi}_n^i)^2$.

9. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ ПРОСЛОЯ

Пусть на областях Ω_1, Ω_2 определена система термоупругого равновесия (55) и диффузии тепла (56), где $\sigma_{ik}(T; y)|_{\overline{\Omega}_j} = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} (\varepsilon_{lm}(y) - u_1^j T \delta_{lm})$, u_1^j — коэффициент линейного расширения материала тела $\overline{\Omega}_j$, $u_1 = (u_1^1, u_1^2)$.

На границе Γ заданы краевые условия

$$\begin{gathered} y = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \ i = \overline{1,3}, \ x \in \Gamma_2^1, \\ T = \varphi_0, \ x \in \Gamma_1^2, \\ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = g_0, \ x \in \Gamma_2^2, \end{gathered} \qquad (75)$$

где $\Gamma = \Gamma_1^2 \cup \Gamma_2^2$, $\Gamma_1^2 \cap \Gamma_2^2 = \varnothing$.

Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (8). На участке γ условия сопряжения имеют вид

$$\begin{gathered} [y_N] = 0, \ [\sigma_N(y)] = 0, \\ [\tau_s(y)] = 0, \ \tau_s^{\pm}(y) = u_2 [y_s], \\ [q_T] = 0, \ q_T^{\pm} = r_1 [T], \end{gathered} \qquad (76)$$

где $u_2 = \mathrm{const} \geq 0$ неизвестен.

Получена задача (55), (56), (75), (76), (8), состоящая в нахождении элемента $u \in \mathcal{U} = (R_+ \times R_+) \times [0, \infty)$, при котором первая компонента классического решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (55), (56), (75), (76) удовлетворяет равенству (8).

Определение 13. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (55), (56), (75), (76) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(u; y, z_1) = l(T; z_1), \qquad (77)$$

$$a_1(T, z_2) = l_1(z_2), \qquad (78)$$

где
$$a(u;y,z_1)=\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{lm}(y)\varepsilon_{ik}(z_1)dx+\int_\gamma u_2[y_s][z_{1s}]d\gamma,$$
$$a_1(T,z_2)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial z_2}{\partial x_i}dx+\int_\gamma r_1[T][z_2]d\gamma,$$
$$l(u,T;z_1)=(\widetilde{f},z_1)+(g,z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)}+\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}u_1T\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(z_1)dx,$$
$$l_1(z_2)=(\overline{f},z_2)+(g_0,z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)}.$$

Задачу (77), (78), (10) будем решать с помощью градиентных методов (13).

При определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (77), (78), (10) определим вектор $\widetilde{Y}=(\widetilde{y},T)$ как элемент множества V, который $\forall\, z=(z_1,z_2)\in \in V_0$ удовлетворяет системе тождеств
$$a(u_n;\widetilde{y},z_1)=l(u_n,T;z_1)-\int_\gamma \Delta u_{2n}[y_s(u_n)][z_{1s}]d\gamma+$$
$$+\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\Delta u_{1n}T\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(z_1)dx, \tag{79}$$
$$a_1(T,z_2)=l_1(z_2). \tag{80}$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (77), (78), (10) введем в рассмотрение сопряженную задачу, состоящую в нахождении функции $\psi\in V_1^0=\{v(x):v|_{\Omega_i}\in (W_2^1(\Omega_i))^3,\ i=1,2,\ v|_{\Gamma_1^1}=0,\ [v_N]|_\gamma=0\}$, которая $\forall\, z_1\in V_1^0$ удовлетворяет тождеству
$$a(u_n;\psi,z_1)=(y(u_n)-f_0,z_1)_{L_2(\gamma_0)}. \tag{81}$$

Выбирая в тождестве (81) вместо z_1 разность $\widetilde{y}-y(u_n)$, с учетом (79), (77) получаем
$$(y(u_n)-f_0,\widetilde{y}-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=-\int_\gamma \Delta u_{2n}[y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma+$$
$$+\int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\Delta u_{1n}T\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)dx. \tag{81$'$}$$

Следовательно,
$$J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n, \tag{82}$$
где $\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_n^1=\{\widetilde{\psi}_{ni}^1\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_{nj}^1=\int_{\Omega_j}\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}T\delta_{em}\varepsilon_{ik}(\psi)d\Omega_j$, $j=1,2;$

$\widetilde{\psi}_n^2=-\int_\gamma [y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma$, $\|J'_{u_n}\|^2=\sum_{j=1}^{2}(\widetilde{\psi}_{nj}^1)^2+(\widetilde{\psi}_n^2)^2$.

Замечание 5. Тождество (81$'$) также позволяет определить J'_{u_n} для случая переменного параметра $u_2=u_2(x)|_\gamma$, переменных u_1^j на Ω_j, $j=1,2$, а также для случаев параметрического их определения, например, если $u_2=u_2(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i(x)$, где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций, то $\widetilde{\psi}_n=\{\widetilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_n^1=\{\widetilde{\psi}_{ni}^1\}_{i=1}^2$, $\widetilde{\psi}_n^2=\{\widetilde{\psi}_{nj}^2\}_{j=1}^m$, $\widetilde{\psi}_{nj}^2=-\int_\gamma \varphi_j[y_s(u_n)][\psi_s]d\gamma$, $\widetilde{\psi}_{nj}^1=\int_{\Omega_k}\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}T\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)d\Omega_j$, $j=1,2$.

10. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СМЕЩЕНИЯМ (НЕОДНОРОДНЫЕ СМЕШАННЫЕ УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ)

Пусть на ограниченных связных строго липшицевых областях $\Omega_1, \Omega_2 \in R^3$ определена система уравнений термоупругого равновесия

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(y)}{\partial x_k} = \widetilde{f}_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{83}$$

где $\sigma_{ik}(y) = \sigma_{ik}(T; y) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} (\varepsilon_{lm}(y) - \varepsilon_{lm}^0)$.

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \overline{f}, \quad x \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2. \tag{84}$$

На границе $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ $(\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2)$ заданы краевые условия

$$\begin{gathered} y = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1, \\ T = \varphi_0, \quad x \in \Gamma_1^2, \\ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = -\overline{\alpha} T + \beta, \quad x \in \Gamma_2^2, \\ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = u(x), \quad x \in \Gamma_3^2, \end{gathered} \tag{85}$$

где $\overline{\alpha} \in C(\Gamma_2^2)$, $\overline{\alpha} \geq \alpha_0 = \text{const} > 0$, $\beta \in C(\Gamma_2^2)$.

Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (8).

На участке γ, разделяющем тело $\overline{\Omega}$ на две составляющие — Ω_1, Ω_2, условия сопряжения расклинивающего давления имеют следующий вид [10]:

$$\begin{gathered} [y_N] = \delta, \quad \sigma_{N_0}(y) = -\overline{p}, \quad x \in \gamma^-, \quad x \in \gamma^+, \\ [\tau_s(y)] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(y) = r[y_s], \quad x \in \gamma. \end{gathered} \tag{86}$$

Здесь N_0 — внешняя нормаль к $\partial\Omega_i$, $i = 1,2$, $\gamma^- = \partial\Omega_1 \cap \gamma$, $\gamma^+ = \partial\Omega_2 \cap \gamma$, $\delta = \delta(x) \in C(\gamma)$ — заданная функция, например, учитывающая шероховатость поверхностей $\partial\Omega_i$, $i = 1,2$, на участке γ и давление $\overline{p}$.

Влияние составного слабопроницаемого включения γ на температурное состояние тела $\overline{\Omega}$ учитывается условиями

$$\begin{gathered} R_1 q_T^- + R_2 q_T^+ = [T], \quad x \in \gamma, \\ [q_T] = \omega, \quad x \in \gamma. \end{gathered} \tag{87}$$

Получена задача (83)–(87), (8), состоящая в нахождении функции $u \in \mathcal{U} = C(\Gamma_3^2)$, при которой первая компонента y классического решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (83)–(87) удовлетворяет равенству (8).

Функционал-невязка имеет вид (10). Вместо классического решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (83)–(87) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 14. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (83)–(87) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y, z_1) = l(T; z_1), \tag{88}$$

$$a_1(T, z_2) = l_1(u; z_2), \tag{89}$$

где $V = \{v = (v_1, v_2) : v_1|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3, \ [v_{1N}] = \delta, \ v_1|_{\Gamma_1^1} = \varphi, \ v_2|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \ i = 1,2;$ $v_2|_{\Gamma_2^1} = \varphi_0\}$, $V_0 = \{z = (z_1, z_2) : z_1|_{\Omega_i} \in (W_2^1(\Omega_i))^3, \ z_2|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \ i = 1,2; \ [z_{1N}] = 0, \ z_1|_{\Gamma_1^1} = 0, \ z_2|_{\Gamma_1^2} = 0\}$,

$$a(y, z_1) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(z_1) dx + \int_\gamma r[y_s][z_{1s}] d\gamma,$$

$$a_1(T, z_2) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} dx + \frac{1}{R_1 + R_2} \int_\gamma [T][z_2] d\gamma + \int_{\Gamma_2^2} \overline{\alpha} T z_2 d\Gamma_2^2,$$

$$l(T; z_1) = (\widetilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha T \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(z_1) dx + 2\int_\gamma \overline{p} z_{1N} d\gamma,$$

$$l_1(u; z_2) = (\overline{f}, z_2) + (\beta, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)} + (u, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)} + \int_\gamma \frac{R_2 \omega}{R_1 + R_2} [z_2] d\gamma - \int_\gamma \omega z_2^+ d\gamma.$$

Задачу (88), (89), (10) будем решать с помощью градиентных методов (13). Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (88), (89), (10) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\psi|_{\Gamma_1^1} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = y_i(u_n) - f_{0i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_0,$$

$$[\psi_N] = 0, \quad \sigma_{N_0} = 0, \quad [\tau_s(\psi)] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(y) = r[\psi_s], \quad x \in \gamma,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{90}$$

$$p|_{\Gamma_1^2} = 0, \quad \left[\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right] \Bigg|_\gamma = 0,$$

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right\}^{\pm} = \frac{1}{R_1 + R_2} [p], \quad x \in \gamma,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = -\overline{\alpha} p, \quad x \in \Gamma_2^2, \qquad \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = 0, \quad x \in \Gamma_3^2,$$

где $\sigma_{ij}(\psi) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{ijlm} \varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 15. Обобщенным решением краевой задачи (90) называется функция $Y^* = (\psi, p) \in V_0$, которая $\forall \, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет системе тождейств

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0, z_1)_{L_2(\gamma_0)}, \tag{91}$$

$$a_1(p, z_2) - \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) z_2 dx = 0. \tag{92}$$

Решение Y^* задачи (91), (92) существует и единственно.

Заменив в (91) функцию z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, а в (92) z_2 — разностью $T(u_{n+1}) - T(u_n)$, с учетом (88), (89) получим

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = (y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = (\Delta u_n, p)_{L_2(\Gamma_3^2)}.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n$, где $\widetilde{\psi}_n = p|_{\Gamma_3^2}$, $\left\| J'_{u_n} \right\|^2 = \int_{\Gamma_2^2} \widetilde{\psi}_n^2 d\Gamma_3^2$.

11. ОДНОВРЕМЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА И МОЩНОСТИ ПОТОКА ТЕПЛА НА γ

Пусть на области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ определена система термоупругого равновесия (83) и диффузии тепла (84). На границе Γ заданы краевые условия

$$y = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(y) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1,$$

$$T = \varphi_0, \quad x \in \Gamma_1^2, \tag{93}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = -\overline{\alpha} T + \beta, \quad x \in \Gamma_2^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = u_1(x), \quad x \in \Gamma_3^2..$$

Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (8). На участке γ, разделяющем тело $\overline{\Omega}$ на две составляющие — Ω_1, Ω_2, условия сопряжения заданы выражениями (86) и ограничениями

$$R_1 q_T^- + R_2 q_T^+ = [T], \quad x \in \gamma,$$

$$[q_T] = u_2(x), \quad x \in \gamma. \tag{94}$$

Получена задача (83), (84), (86), (93), (94), (8), состоящая в определении вектора $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{U} = C(\Gamma_3^2) \cup C(\gamma)$, при котором первая компонента y классического решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (83), (84), (86), (93), (94) удовлетворяет равенству (8).

Определение 16. Обобщенным решением краевой задачи (83), (84), (86), (93), (94) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y, z_1) = l(T; z_1), \tag{95}$$

$$a_1(T, z_2) = l_1(u; z_2), \tag{96}$$

где формы $a(\cdot,\cdot)$, $a_1(\cdot,\cdot)$, $l(T;\cdot)$, множества V, V_0 определены в разд. 10,

$$l_1(u; z_2) = (\overline{f}, z_2) + (\beta, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)} + (u_1, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)} + \int_\gamma \frac{R_2 u_2}{R_1 + R_2} [z_2] d\gamma - \int_\gamma u_2 z_2^+ d\gamma.$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (95), (96), (10) сопряженная задача имеет вид (90), а соответствующая ей обобщенная — вид (91), (92). На основании (91), (92) с учетом (95), (96) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = (y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))_{L_2(\gamma_0)} = (\Delta u_{1n}, p)_{L_2(\Gamma_3^2)} +$$

$$+ \int_\gamma \frac{R_2 \Delta u_{2n}}{R_1 + R_2}[p] d\gamma - \int_\gamma \Delta u_{2n} p^+ d\gamma = (\Delta u_{1n}, p)_{L_2(\Gamma_3^2)} - \int_\gamma \Delta u_{2n} \frac{R_1 p^+ + R_2 p^-}{R_1 + R_2} d\gamma.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\tilde{\psi}_n^1 = p|_{\Gamma_3^2}$, $\tilde{\psi}_n^2 = -\dfrac{R_1 p^+ + R_2 p^-}{R_1 + R_2}$,

$$\left\| J'_{u_n} \right\|^2 = \int_{\Gamma_3^2} (\tilde{\psi}_n^1)^2 d\Gamma_3^2 + \int_\gamma (\tilde{\psi}_n^2)^2 d\gamma.$$

Если $\mathcal{U} = C(\Gamma_3^2) \times R^1$, то $\tilde{\psi}_n^1 = p|_{\Gamma_3^2}$, $\tilde{\psi}_n^2 = -\displaystyle\int_\gamma \frac{R_1 p^+ + R_2 p^-}{R_1 + R_2} d\gamma$, $\left\| J'_{u_n} \right\|^2 =$

$$= \int_{\Gamma_3^2} (\tilde{\psi}_n^1)^2 d\Gamma_3^2 + (\tilde{\psi}_n^2)^2.$$

12. ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕРМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И РАСКЛИНИВАЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ

Пусть на области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ определена система термоупругого равновесия (83) и диффузии тепла (84). На границе Γ заданы краевые условия (93). Считаем, что на участке $\gamma_0 \subset \Gamma_2^1$ известны смещения, заданные равенством (8). На участке γ, разделяющем тело $\overline{\Omega}$ на две составляющие — Ω_1, Ω_2, условия сопряжения имеют вид

$$\begin{gathered} [y_N] = \delta, \quad \sigma_{N_0}(y) = -u_2, \\ [\tau_s(y)] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(y) = r[y_s], \quad x \in \gamma, \\ u_3 q_T^- + u_4 q_T^+ = [T], \quad x \in \gamma, \\ [q_T] = \omega, \quad x \in \gamma. \end{gathered} \tag{97}$$

Получена задача (83), (84), (93), (97), (8), состоящая в определении вектора $u = \{u_i\}_{i=1}^4 \in \mathcal{U} = C(\Gamma_3^2) \times C_+(\gamma) \times (R_+ \times R_+)$, при котором первая компонента y классического решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (83), (84), (93), (97) удовлетворяет равенству (8), где $C_+(\gamma) = \{v(x) : v \in C(\gamma), v \geq 0\}$.

Определение 17. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (83), (84), (93), (97) называется вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y, z_1) = l(u, T; z_1), \tag{98}$$

$$a_1(u; T, z_2) = l_1(z_2), \tag{99}$$

где

$$a(y, z_1) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}(y) \varepsilon_{ik}(z_1) dx + \int_\gamma r[y_s][z_{1s}] d\gamma,$$

$$a_1(u; T, z_2) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} dx + \frac{1}{u_3 + u_4} \int_\gamma [T][z_2] d\gamma + \int_{\Gamma_2^2} \overline{\alpha} T z_2 d\gamma,$$

$$l(u, T; z_1) = (\tilde{f}, z_1) + (g, z_1)_{L_2(\Gamma_2^1)} + \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha T \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(z_1) dx + 2 \int_\gamma u_2 z_{1N} d\gamma,$$

$$l_1(u; z_2) = (\overline{f}, z_2) + (\beta, z_2)_{L_2(\Gamma_2^2)} + (u_1, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)} + \int_\gamma \frac{u_4 \omega}{u_3 + u_4}[z_2] d\gamma - \int_\gamma \omega z_2^+ d\gamma.$$

При определении $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (98), (99), (10) введем в рассмотрение вектор-функцию $\widetilde{Y} = (\widetilde{y}, \widetilde{T})$, являющуюся классическим решением краевой задачи, заданной системой уравнений

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\widetilde{y})}{\partial x_k} = \widetilde{f}_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Omega,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}\right) = \overline{f}, \quad x \in \Omega,$$

$$\widetilde{y} = \varphi, \quad x \in \Gamma_1^1, \qquad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\widetilde{y}) n_j = g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1,$$

$$\widetilde{T} = \varphi_0, \quad x \in \Gamma_1^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = -\overline{\alpha}\, \widetilde{T} + \beta, \quad x \in \Gamma_2^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = u_{1n} + \Delta u_{1n}, \quad x \in \Gamma_3^2, \tag{100}$$

$$[\widetilde{y}_N] = \delta, \quad \sigma_{N_0}(\widetilde{y}) = -(u_{2n} + \Delta u_{2n}), \quad x \in \gamma,$$

$$[\tau_s(\widetilde{y})] = 0, \quad \tau_s^{\pm}(\widetilde{y}) = r[\widetilde{y}_s], \quad x \in \gamma,$$

$$u_{3n} q_{\widetilde{T}}^{-} + u_{4n} q_{\widetilde{T}}^{+} = [\widetilde{T}] - \Delta u_{3n} q_T^{-} - \Delta u_{4n} q_T^{+}, \quad x \in \gamma, \qquad [q_{\widetilde{T}}] = \omega, \quad x \in \gamma,$$

где

$$\sigma_{ik}(\widetilde{y}) = \sigma_{ik}(\widetilde{T}, \widetilde{y}; x) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}(\varepsilon_{lm}(\widetilde{y}) - \alpha \widetilde{T} \delta_{lm}),$$

$$q_T = \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial T(u_n)}{\partial x_j} \cos(n, x_i).$$

Определение 18. Обобщенным решением краевой задачи (100) называется вектор-функция $\widetilde{Y} = (\widetilde{y}, \widetilde{T}) \in V$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(\widetilde{y}, z_1) = l(u_n, \widetilde{T}; z_1) + 2\int_{\gamma} \Delta u_{2n} z_{1N}\, d\gamma,$$

$$a_1(u_n; \widetilde{T}, z_2) = l_1(u_n; z_2) + \int_{\gamma} \frac{\Delta u_{3n} q_T^{-} + \Delta u_{4n} q_T^{+}}{u_{3n} + u_{4n}} [z_2]\, d\gamma + (\Delta u_{1n}, z_2)_{L_2(\Gamma_3^2)}. \tag{101}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (98), (99), (10) сопряженная задача имеет вид

$$-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(\psi)}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Omega,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \alpha \delta_{lm} \varepsilon_{ik}(\psi) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\psi\big|_{\Gamma_1^1} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \Gamma_2^1 \setminus \gamma_0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\psi) n_j = (y_i(u_n) - f_{0i}), \quad i = \overline{1,3}, \quad x \in \gamma_0,$$

$$p\big|_{\Gamma_1^2}=0,\quad \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=-\overline{\alpha}\,p,\quad x\in\Gamma_2^2, \tag{102}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\cos(n,x_i)=0,\quad x\in\Gamma_3^2,$$

$$[\psi_N]=0,\quad \sigma_{N_0}(\psi)=0,\quad x\in\gamma,\qquad [\tau_s(\psi)]=0,\quad \tau_s^{\pm}(\psi)=r[\psi_s],\quad x\in\gamma,$$

$$[q_p]=0,\quad q_p^{\pm}=\frac{1}{u_{1n}+u_{2n}}[p],\quad x\in\gamma,$$

где $\sigma_{ik}(\psi)=\sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{lm}(\psi)$.

Определение 19. Обобщенным решением краевой задачи (102) называется вектор-функция $Y^*=(\psi,p)\in V_0$, которая $\forall\, z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(\psi,z_1)=(y(u_n)-f_0,z_1)_{L_2(\gamma_0)}, \tag{103}$$

$$a_1(u_n;p,z_2)-\int_{\Omega}\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm}\alpha\delta_{lm}\varepsilon_{ik}(\psi)z_2\,dx=0. \tag{104}$$

На основании (103), (104) с учетом (98), (99), (101) получаем

$$\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle\approx(y(u_n)-f_0,\tilde{y}(u_{n+1})-y(u_n))_{L_2(\gamma_0)}=2\int_{\gamma}\Delta u_{2n}\psi_N\,d\gamma+$$

$$+\int_{\gamma}\frac{\Delta u_{3n}q_T^- +\Delta u_{4n}q_T^+}{u_{3n}+u_{4n}}[p]\,d\gamma+(\Delta u_{1n},p)_{L_2(\Gamma_3^2)}.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n}\approx\tilde{\psi}_n,$$

где $\tilde{\psi}_n=\{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^3$, $\tilde{\psi}_n^1=p\big|_{\Gamma_3^2}$, $\tilde{\psi}_n^2=2\psi_N\big|_{\gamma}$, $\tilde{\psi}_n^3=\int_{\gamma} q_T^-[p]/(u_{3n}+u_{4n})\,d\gamma$,

$$\tilde{\psi}_n^4=\int_{\gamma} q_T^+[p]/(u_{3n}+u_{4n})\,d\gamma,\quad \left\|J'_{u_n}\right\|^2\approx\int_{\Gamma_3^2}(\tilde{\psi}_n^1)^2\,d\Gamma_3^2+\int_{\gamma}(\tilde{\psi}_n^2)^2\,d\gamma+\sum_{i=3}^{4}(\tilde{\psi}_n^i)^2.$$

Наличие приближения $\tilde{\psi}_n$ градиента J'_{u_n} позволяет использовать градиентные методы (13) для определении $(n+1)$-го приближения решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (98), (99), (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение коэффициентных обратных задач теплопроводности для составной пластины // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 3. — С. 21–48.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 48–71.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
4. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. — 400 p.
5. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач термоупругости // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 5. — С. 64–87.
6. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
7. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. — Киев: Наук. думка, 1972. — 508 с.
8. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. — Киев: Наук. думка, 1970. — 308 с.
9. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. — Киев: Наук. думка, 2007. — 703 с.
10. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. К определению осесимметричного напряженного состояния составного тела при расклинивающем давлении // Прикл. механика. — 1999. — **35**, № 1. — С. 50–57.

Поступила 18.03.2009