УДК 519.1

Г.А. ДОНЕЦ, Л.Н. КОЛЕЧКИНА

ПОСТРОЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВА ПУТИ В ГРАФАХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Ключевые слова: *полиэдральная комбинаторика, комбинаторные множества, комбинаторное множество перестановок, перестановочный многогранник, графы, гиперграни, гамильтонов путь*.

ВВЕДЕНИЕ

Графы многогранников обладают многими специфическими свойствами: при их изучении возникает множество задач, представляющих интерес не только для теории графов, комбинаторики, топологии, но и для теории линейного программирования. У. Гамильтон построил простые циклы, содержащие каждую вершину додекаэдра. Позже было высказано предположение, что каждый полиэдральный граф является гамильтоновым. Это обусловило появление множества работ, посвященных установлению гамильтоновости полиэдральных графов. Следует отметить, что свойства графов и многогранников широко используются при исследовании многих классов комбинаторных моделей, для разработки новых методов их решения [1–10]. Наиболее интересные результаты получены для многогранников задачи об упаковке, задачи о максимальном паросочетании графа, задачи коммивояжера, задачи о рюкзаке и т.п. Важную роль в дискретной оптимизации играет задача о коммивояжере. Допустимая область определения данной задачи описывается многогранником гамильтоновых циклов и контуров. Во многих источниках исследуется возможность линеаризации этой задачи, т.е. построение выпуклой оболочки ее допустимых решений. Использование информации о структуре выпуклой оболочки допустимых решений, являющейся основанием для многих методов решения комбинаторных задач, — один из самых успешных на сегодняшний день подходов к решению задач комбинаторной оптимизации. Комбинаторная теория многогранников изучает экстремальные свойства многогранников, рассматривая множество его граней всех размерностей как некоторый комплекс. Но при решении таких задач возникают проблемы, связанные со сложностью математических моделей, большим объемом информации и другие, так как большинство задач на комбинаторных множествах *NP*-полные. Следует отметить тесную связь свойств многогранников и их графов с проблемами оценки числа итераций и эффективности алгоритмов такого типа в задачах линейного программирования.

Большинство задач на графах касается определения компонент связности, поиска маршрутов, расстояний и т.п. Однако при решении реальных задач соответствующие им графы весьма велики, а анализ возможен лишь с привлечением современной вычислительной техники. Поэтому конечная цель рассмотрения каждой из задач — описание и реализация практического алгоритма решения данной задачи на ПЭОМ. На сегодняшний день в области исследования различных классов комбинаторных моделей и разработки новых методов их решения получены существенные результаты.

Настоящая работа продолжает исследования комбинаторных задач на различных множествах перестановок, сочетаний, полиперестановок, представленных в [4, 5, 10–13]. На основании установленной взаимосвязи между задачами комбинаторных множеств и графами многогранников соответствующих множеств в статье изучены некоторые структурные свойства допустимой области, а также сформулирован метод решения комбинаторной задачи, основанный на применении графов. В частности, в работе [4] описан способ построения гамильтонова пути внутри гиперграней. В настоящей работе ставится задача построения гамильтонова пути между гипергранями, т.е. рассматривается, как построить гамильтонов путь, «вклеив» к двум слоям третий, если известен гамильтонов путь внутри двух слоев.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общая задача комбинаторной оптимизации состоит в отыскании экстремума линейной целевой функции на перестановочном многограннике при наличии дополнительных линейных ограничений. Как правило, при решении класса таких задач исследуется возможность их линеаризации, т.е. построения выпуклой оболочки допустимых решений задачи. Переход от параметрической формы задания выпуклого многогранника к аналитической имеет большое значение для задач дискретной оптимизации, так как позволяет сформулировать их в терминах линейного программирования, но, как показывает практика, это не всегда оправдано. Подзадачей сформулированной выше задачи может быть определение гамильтонова пути, который отражает изменение значения целевой функции на множестве перестановок. Многогранник гамильтоновых циклов графа является гранью многогранника гамильтоновых циклов полного графа. Рассмотрим из [4] известный граф перестановочного многогранника. Укажем на основное свойство этого графа. Он отображает частичную упорядоченность множества перестановок для $n=4$ относительно значений произвольной линейной функции $f(x)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4$, где $c_1 \le c_2 \le c_3 \le c_4$, а набор $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ пробегает множество всех перестановок P_n. В графе две вершины, соответствующие двум перестановкам, смежные, если отличаются одна от другой позициями только двух элементов. Другими словами, две перестановки смежные, если они получаются одна из другой с помощью транспозиции двух элементов.

Лемма 1. Из двух смежных перестановок функция $f(x)$ принимает не меньшее (большее) значение для той, в которой максимальный из двух различающихся элементов находится справа.

Эта лемма справедлива для произвольного *n*. Действительно, пусть $p_1=(x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_l,\dots,x_n)$ и $p_2=(x_1,x_2,\dots,x_l,\dots,x_k,\dots,x_n)$ — две перестановки, которые отличаются положением двух элементов: x_k и x_l, при этом пусть $x_l > x_k$. Рассмотрим разность значений $f(p_1)-f(p_2)$. После упрощений получим, что она равна $c_k(x_k-x_l)+c_l(x_l-x_k)=(c_l-c_k)(x_l-x_k)$. Так как для $l<k$ всегда $c_l \ge c_k$, то это выражение не меньше нуля, что и подтверждает справедливость леммы.

В графе на рис. 1 все смежные перестановки соединяются дугами в соответствии с леммой 1. Аналогично строится граф перестановочного многогранника $G(P_n)$ для произвольного *n*.

Следствие. Максимальное значение линейная функция $f(x)$ на перестановочном многограннике $G(P_n)$ принимает в перестановке $(1,2,\dots,n)$, а минимальное — в перестановке $(n,n-1,\dots,2,1)$.

Действительно, любая перестановка, отличная от первой, будет на каком-то j-м месте иметь число, меньшее j. По лемме 1 это означает, что значение функции в этой перестановке всегда меньше исходного, что и требовалось доказать. Эти же рассуждения можно привести и относительно минимального значения функции.

Для подобных графов достаточно часто возникает следующая задача: найти множество перестановок, в которых значение целевой функции равно заданному значению, т.е.

$$x^* = \arg_{x\in P_n} f(x), \tag{1}$$

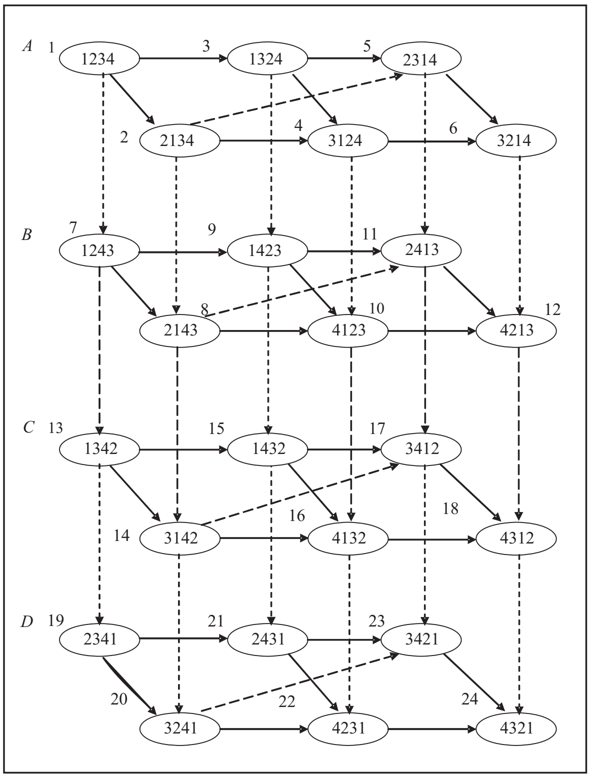

Рис. 1

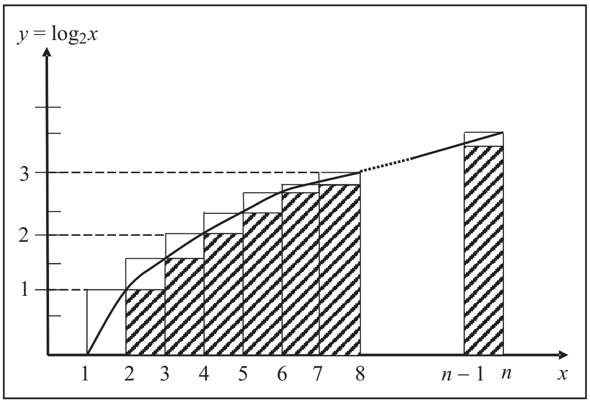

Рис. 2

где $f(x^*) = y$. Также имеет смысл рассматривать аналогичную задачу, где не всегда существуют перестановки, в которых целевая функция принимает заданное значение. Тогда сформулированная выше проблема предстанет как задача: определить множество пар перестановок $(\underline{x}, \overline{x})$, для которых при заданном y

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \arg\min_{f(x) > y} f(x), \\ \underline{x} &= \arg\max_{f(x) < y} f(x). \end{aligned} \qquad (2)$$

2. ПОДХОД К РЕШЕНИЮ

Очевидно, что обе задачи можно решить, если на графе $G(P_n)$ достроить множество дуг между несмежными перестановками, позволяющее пройти по дугам путь от начальной вершины, где $f(x)$ принимает максимальное значение, к конечной, где $f(x)$ принимает минимальное значение. При этом необходимо пройти все остальные вершины графа. Этот путь и называется гамильтонов. Если известна последовательность перестановок, через которые он проходит, то с помощью дихотомии гамильтонова пути, вычисляя значения функции в соответствующей перестановке, всегда можно локализовать произвольное значение целевой функции $f(x)$.

Лемма 2. Сложность решения задач (1), (2) оценивается сверху полиномом не выше второй степени.

Поскольку число вершин графа $G(P_n)$ (перестановок) равно $n!$, то сложность вычислений при дихотомии оценивается величиной $R = \log_2 n! = \sum_{i=2}^{n} \log_2 i$. Для ее определения рассмотрим график функции $y = \log_2 x$ на рис. 2.

Площадь всех прямоугольников, возвышающихся над кривой y, и с основанием на оси Ox, равна $\overline{S} = \sum_{i=2}^{n} \log_2 i = R$. Аналогично площадь всех прямоугольников, построенных под кривой y (заштрихованных), равна $\underline{S} = \sum_{i=2}^{n-1} \log_2 i = R - \log_2 n$.

Из рисунка можно увидеть, что площадь, ограниченная кривой $y=\log_2 x$ и осью абсцисс, удовлетворяет ограничениям

$$R-\log_2 n<\int_1^n \log_2 x dx<R\,. \tag{3}$$

Значение неопределенного интеграла равно $[x\ln x-x]/\ln 2$. Так как $n\gg\log_2 n$, то получим оценку $R\le n^2$, что и требовалось.

Перейдем непосредственно к построению гамильтонова пути в графе $G(P_4)$. Для удобства оперирования перестановками пронумеруем их от 1 до 24, как показано на рис. 1, и назовем их точками (вершинами) p_i $(i=1,2,\dots,24)$, например $p_{16}=(4,1,3,2)$. Вектор коэффициентов функции $f(x)$ обозначим $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$, на рис. 1 это $c=(c_1,c_2,c_3,c_4)$. Тогда значение функции $f(x)$ в произвольной точке p_i $(1\le i\le 24)$ определяется как скалярное произведение $f(p_i)=(p_i,c)$. Покажем, что граф $G(P_4)$ можно построить индуктивным способом, начиная с двух первых перестановок. Представим, что вершины p_1 и p_2 составляют подграф графа $G(P_4)$, у которого фиксированы два последних элемента: 3 и 4. Вершина p_2 образована из p_1 транспозицией элементов 1 и 2, поэтому согласно лемме 1 $f(p_1)\ge f(p_2)$. Если теперь в вершинах p_1 и p_2 поменять местами элементы 2 и 3, то получим вершины p_3 и p_4, у которых остается соотношение $f(p_3)\ge f(p_4)$, кроме того, по лемме 1 имеем $f(p_1)\ge f(p_3)$ и $f(p_2)\ge f(p_4)$. Аналогично транспозицией элементов 1 и 2 в вершинах p_3 и p_4 будем иметь вершины p_5 и p_6. В результате этих действий получим подграф A, который содержит все перестановки P_4 с фиксированным четвертым элементом $x_4=4$. Очевидно, что в подграфе A $f(x)$ принимает максимальное значение в вершине p_1 и минимальное — в вершине p_6. Однако для построения гамильтонова пути в этом подграфе дуг не хватает. Можно построить еще одну дугу из вершины p_2 к вершине p_5, так как эти перестановки отличаются между собой транспозицией чисел 1 и 3, но этого также недостаточно (эта дуга отмечена пунктиром).

Возьмем все перестановки подграфа A и одновременно сделаем в них транспозицию чисел 3 и 4. В результате получим подграф B, который содержит все те же перестановки P_4, у которых фиксирован четвертый элемент $x_4=3$. По лемме 1 соответствующие вершины подграфов A и B смежные и соединяющие их дуги идут сверху (от подграфа A) вниз (к подграфу B). Очевидно, что внутренняя ориентация подграфа B сохраняет внутреннюю ориентацию подграфа A. Если теперь в подграфе B во всех перестановках сделать транспозицию чисел 2 и 3, то в результате получим подграф C, содержащий все те перестановки P_4, у которых зафиксирован четвертый элемент $x_4=2$. Очевидно, что этот подграф также сохраняет внутреннюю ориентацию подграфа B (а также подграфа A) и в каждую его вершину входит дуга от соответствующей вершины подграфа B. И, наконец, если в подграфе C в каждой перестановке сделаем транспозицию чисел 1 и 2, то получим подграф D, который содержит все перестановки P_4 с фиксированным четвертым элементом $x_4=1$.

Все четыре подграфа A,B,C,D составляют граф $G(P_4)$. Можно говорить, что он построен индуктивным путем, начиная с двух вершин: p_1 и p_2. Сначала эти вершины как бы проецировались последовательно дважды, образуя подграф A. Затем подграф A проецировался трижды, образуя весь граф $G(P_4)$.

Вернемся к вопросу о построении гамильтонова пути в подграфе A. Принципиально важно установить соотношение значений функций в точках p_2 и p_3, а также в точках p_4 и p_5. Рассмотрим соответствующие разности, которые обозначим δf:

$$\begin{aligned}\delta f(2,3)&=f(p_2)-f(p_3)=(p_2,c)-(p_3,c)=c_1-2c_2+c_3;\\ \delta f(4,5)&=f(p_4)-f(p_5)=(p_4,c)-(p_5,c)=c_1-2c_2+c_3.\end{aligned} \tag{4}$$

Они совпадают, поэтому если значение $\delta f(2,3)$ известно, то этого достаточно для определения гамильтонова пути в подграфе A. Если $\delta f(2,3) \geq 0$, то получаем дуги $p_2 p_3$ и $p_4 p_5$, что определяет гамильтонов путь $\sigma_1(A) = (1,2,3,4,5,6)$. Если $\delta f(2,3) < 0$, то получаем дуги $p_3 p_2$ и $p_5 p_4$, что дает гамильтонов путь $\sigma_2(A) = (1,3,2,5,4,6)$.

Ввиду того, что при проецировании подграфа A на подграфы B, C и D первые три элемента в перестановках меняются, то соотношения (4), справедливые для подграфа A, на последующие подграфы не переносятся. Введем обозначения: $\Delta_i = c_{i+1} - c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2})$ — вектор, отражающий особенности заданной линейной функции: $\Delta_i = \alpha_{i-1} \Delta_{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$. В каждом подграфе A, B, C, D четвертый элемент всех перестановок фиксирован, поэтому структура этих подграфов зависит только от первых трех элементов, которые для общего случая обозначим (i_1, i_2, i_3), где $(i_1 < i_2 < i_3)$. В каждом подграфе эти элементы определяют первую вершину P_j, где $j \equiv 1 (\text{mod } 6)$, т.е. вершины p_1, p_7, p_{13}, p_{19}. Если для произвольного n из $G(P_n)$ выбрать подграф, у которого в перестановках зафиксировано $n-4$ последних элемента $(i_5, i_6, \ldots, i_{n-1}, i_n) \in N_n$, то получим подграф типа $G(P_4)$, у которого вместо элементов 1–4 будут элементы $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$. В графе A будет зафиксирован четвертый элемент i_4, в графе B — элемент i_3, в графе C — элемент i_2 и в графе D — элемент i_1.

Определение. Назовем структурными коэффициентами графа $G(P_4)$ величины

$$\lambda_A = \frac{i_2 - i_1}{i_3 - i_2}; \ \lambda_B = \frac{i_2 - i_1}{i_4 - i_2}; \ \lambda_C = \frac{i_3 - i_1}{i_4 - i_3}; \ \lambda_D = \frac{i_3 - i_2}{i_4 - i_3}. \tag{5}$$

Для построения гамильтонова пути в каждом подграфе необходимо вычислить разность значений функции в вершинах p_i и p_j, где $i \equiv 2 (\text{mod } 6)$, $j \equiv 3 (\text{mod } 6)$, а также в вершинах p_k и p_l, где $k \equiv 4 (\text{mod } 6)$, $l \equiv 5 (\text{mod } 6)$. В подграфе A $p_i = (i_2, i_1, i_3, i_4)$, $p_j = (i_1, i_3, i_2, i_4)$, поэтому

$$\begin{gathered} \delta f(2,3) = (p_i, c) - (p_j, c) = c_1 (i_2 - i_1) - c_2 (i_3 - i_1) + c_3 (i_3 - i_2), \\ \delta f(2,3) = -(i_2 - i_1)\Delta_1 + (i_3 - i_2)\Delta_2. \end{gathered} \tag{6}$$

Дуга, соединяющая вершины p_2 и p_3, будет иметь направление $p_2 p_3$, если $\delta f(2,3) \geq 0$, а это возможно только при условии

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \geq \frac{i_2 - i_1}{i_3 - i_2} \text{ или } \alpha_1 \geq 1/\lambda_A. \tag{7}$$

Продолжая такие же вычисления относительно вершин p_4 и p_5, получим $\delta f(4,5) = -(i_3 - i_2)\Delta_1 + (i_2 - i_1)\Delta_2$. Дуга будет иметь направление $p_4 p_5$, если выполняются условия

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \geq \frac{i_3 - i_2}{i_2 - i_1} \text{ или } \alpha_1 \geq 1/\lambda_A. \tag{8}$$

Аналогичные результаты можно получить и для других подграфов. Например, для подграфа C вычислим $\delta f(14,15)$. Дуга будет иметь направление $p_{14} p_{15}$, если

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \geq \frac{i_3 - i_1}{i_4 - i_3} \text{ или } \alpha_1 \geq \lambda_C,$$

а дуга $p_{16} p_{17}$ будет иметь место, если $\alpha_1 \geq 1/\lambda_C$.

Рассмотрим номера вершин графа $G(P_4)$ в классе вычетов по mod 6, где в качестве полной системы вычетов принята система (1, 2, 3, 4, 5, 6). Последние вычисления дают право утверждать, что справедлива теорема.

Теорема 1. В произвольном подграфе X графа $G(P_4)$, где $X \in \{A, B, C, D\}$, гамильтонов путь проходит в последовательности:

$$
\begin{aligned}
&(1, 3, 2, 5, 4, 6)(\mathrm{mod}\, 6), \text{ если } \alpha_1 \le \min(\lambda_x, 1/\lambda_x);\\
&(1, 2, 3, 4, 5, 6)(\mathrm{mod}\, 6), \text{ если } \alpha_1 \ge \max(\lambda_x, 1/\lambda_x);\\
&(1, 2, 3, 4, 5, 6)(\mathrm{mod}\, 6), \text{ если } 1/\lambda_x \le \alpha_1 \le \lambda_x \text{ и } \lambda_x \ge 1;\\
&(1, 2, 3, 5, 4, 6)(\mathrm{mod}\, 6), \text{ если } \lambda_x \le \alpha_1 \le 1/\lambda_x \text{ и } \lambda_x \le 1.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Все четыре гамильтоновы пути могут иметь место при одном условии, если для α_1 ни в одном из ограничений (9) не выполняется равенство. Если выполняется равенство типа (7), то $f(p_i) = f(p_j)$, ребро $p_i p_j$ и его можно проходить в произвольном направлении, откуда следует, что первый и четвертый пути (или второй и третий) равноправны. Если же выполняется равенство типа (8), то это же справедливо и относительно ребра $p_i p_j$, где $i \equiv 4(\mathrm{mod}\, 6)$, а $j \equiv 5(\mathrm{mod}\, 6)$, и тогда первый и третий пути (или второй и четвертый) равноправны. Особый случай возникает при $\lambda_x = 1$. Если $\alpha_1 \ne 1$, то возможны только первые два гамильтоновы пути. Если $\alpha_1 = 1$, то тогда все четыре пути равноправны, так как указанные две пары вершин можно объединить и получить две вершины, а гамильтоновы пути запишутся в общем виде $[1, (2, 3), (4, 5), 6]\,(\mathrm{mod}\, 6)$. Во избежание подобных неопределенностей значения α_1, равные какому-либо параметру λ_x (или $1/\lambda_x$), будем приписывать к левому интервалу. Тем самым добьемся, что в произвольном случае для каждого подграфа A, B, C, D будет выбран один (из четырех возможных) гамильтонов путь. Означает ли это, что для построения гамильтонова пути в графе $G(P_4)$ придется рассматривать 4^4 варианта различных сочетаний этих путей? Рассмотрим этот вопрос с учетом следующего утверждения.

Лемма 3. Для структурних коэффициентов подграфов A, B, C, D справедливы соотношения:

$$
\text{(а) } \lambda_A > \lambda_B;\ \lambda_C > \lambda_B;\ \lambda_C > \lambda_D;
$$

$$
\text{(б) } 1/\lambda_A < 1/\lambda_B;\ 1/\lambda_C < 1/\lambda_B;\ 1/\lambda_C < 1/\lambda_D.
$$

Очевидно, что (б) вытекает из (а), поэтому достаточно доказать справедливость (а). Первое неравенство следует из того, что у двух величин числители одинаковы, а знаменатель больше у λ_B, так как $i_4 > i_3$. Второе неравенство справедливо потому, что у λ_C числитель больше, а знаменатель меньше, чем у λ_B. Третье неравенство вытекает из того, что у двух величин знаменатели одинаковые, а числитель у λ_C больше, так как $i_3 - i_1$ больше $i_2 - i_1$.

Теорема 2. Существует не больше девяти совместных вариантов построения гамильтоновых путей в подграфах A, B, C, D графа перестановок $G(P_4)$.

Лемма 2 позволяет установить частичную упорядоченность для значений λ_x и $1/\lambda_x$, где $X \in \{A, B, C, D\}$. Эта зависимость отражена на рис. 3.

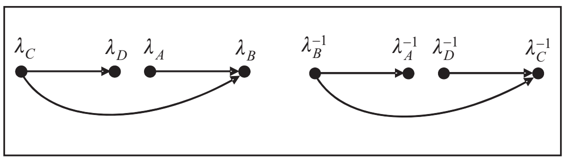

Рис. 3

Если никакие два из этих восьми параметров не равны между собой, то при различных их значениях на числовой оси они образуют девять интервалов, в один из которых попадает конкретное значение α_1. Если некоторые из этих параметров совпадают, то число интервалов уменьшается. Это и доказывает теорему. Рассмотрим пример.

Пример. Пусть $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 4$, $i_4 = 9$. Получаем значения $\lambda_A = 1/2$, $\lambda_B = 1/7$, $\lambda_C = 3/5$, $\lambda_D = 2/5$, $1/\lambda_A = 2$, $1/\lambda_B = 7$, $1/\lambda_C = 5/3$, $1/\lambda_D = 5/2$. После упорядочения имеем возрастающую последовательность точек на числовой оси $(1/7, 2/5, 1/2, 3/5, 5/3, 5/2, 2, 7)$. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения α_1	Результаты расчетов гамильтоновых путей в подграфах по вершинам			
	A	B	C	D
$\alpha_1 < 1/7$	1, 3, 2, 5, 4, 6	7, 9, 8, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	19, 21, 20, 23, 22, 24
$1/7 < \alpha_1 < 2/5$	1, 3, 2, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	19, 21, 20, 23, 22, 24
$2/5 < \alpha_1 < 1/2$	1, 3, 2, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	19, 20, 21, 23, 22, 24
$1/2 < \alpha_1 < 3/5$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	9, 20, 21, 23, 22, 24
$3/5 < \alpha_1 < 5/3$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 15, 14, 17, 16, 18	9, 20, 21, 23, 22, 24
$5/3 < \alpha_1 < 5/2$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 14, 15, 17, 16, 18	9, 20, 21, 23, 22, 24
$5/2 < \alpha_1 < 2$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 14, 15, 16, 17, 18	9, 20, 21, 23, 22, 24
$2 < \alpha_1 < 7$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 14, 15, 16, 17, 18	9, 20, 21, 23, 22, 24
$7 < \alpha_1$	1, 2, 3, 5, 4, 6	7, 8, 9, 11, 10, 12	13, 14, 15, 16, 17, 18	9, 20, 21, 23, 22, 24

Нетрудно видеть, что все гамильтоновы пути в подграфах определяются однозначно, если известен только один параметр — α_1. Для построения гамильтонова пути на всем графе $G(P_4)$ необходимо использовать второй параметр — α_2. В зависимости от сочетаний этого параметра со значениями структурных коэффициентов подграфов получатся различные варианты гамильтонова пути в графе $G(P_4)$. Если эти варианты известны, то тогда задачи на перестановках для $n > 4$ можно сводить к подзадачам на подграфах с числом вершин $n = 4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуется область допустимых значений некоторой комбинаторной задачи оптимизации с использованием теории графов. Строится гамильтонов путь для произвольного многогранника перестановок, который является подграфом графа $G(P_4)$. Обосновываются возможности использования данных результатов для построения эффективного метода решения сложных комбинаторных задач на множестве перестановок. Дальнейшее развитие данной работы направлено на разработку новых методов решения комбинаторных оптимизационных задач с учетом входных данных и других комбинаторных множеств, а также их многогранников и графов многогранников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Донец Г.А., Шулинок И.Э. О сложности алгоритмов поиска в глубину на модульных графах // Теорія оптимальних рішень. — 2002. — № 1. — С. 105–110.
2. Донец Г.А. Алгоритмы раскраски плоских графов // Там же. — 2006. — № 5. — С. 134–143.
3. Донец Г.А., Самер И.М. Альшаламе Решение задачи о построении линейной мозаики // Там же. — 2005. — № 4. — С. 15–24.
4. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2009 — № 2. — С. 50–61.
5. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах // Управляющие системы и машины. — 2009 — № 3. — С. 34–42.
6. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. — М:. Изд-во Москов. ун-та, 1985. — 308 с.
7. Романовский И.В. Дискретный анализ. — М:. Физматлит, 2001. — 240 с.
8. Липский В. Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988. — 213 с.
9. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 287 с.
10. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
11. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения и исследования. — Киев: Наук, думка. 2003 — 260 с.
12. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 265 с.
13. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. — М.: Физматлит., 2004. — 238 с.

Поступила 15.09.2009