УДК 330.115

М.В. БОЙЧУК, Н.М. ШМУРЫГИНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ключевые слова: *запаздывание, межотраслевой баланс, траектория, управление.*

Загрязнение окружающей среды является побочным продуктом каждой экономической деятельности. Борьба с этим требует постоянно увеличивающихся затрат и приводит к созданию новых производств по переработке и уничтожению вредных отходов. В результате расширяется непосредственно сфера общественного производства: она включает не только создание материальных благ, но и различные виды деятельности, связанные с уменьшением загрязнения окружающей среды и возобновлением природных ресурсов.

Одной из основных экономических проблем является прогнозирование последующего развития экологической ситуации, цель которого — поиск оптимального плана развития экономики. Основным средством прогнозирования в этом случае являются модели эколого-экономического взаимодействия. Модели этого класса сохраняют традиционную структуру экономико-математических моделей, а также содержат дополнительные переменные и связи, которые характеризуют экологическую подсистему.

В настоящей статье проводится исследование одной из экономических задач — оптимизации обобщенной модели межотраслевого баланса с запаздыванием с учетом контроля над загрязнением. Процесс описывается моделью экономической динамики, в основу которой положен межотраслевой баланс, а мощности отраслей описываются производственными функциями. Естественное усовершенствование модели — включение запаздывания.

Рассмотрим обобщенную модель межотраслевого баланса с запаздыванием с учетом контроля над загрязнением [1]:

$$\int_{t_0}^{T} e^{-\delta(t-t_0)} \sum_{i=1}^{n} U_i(C_i(t-\tau))\,dt \to \sup,$$

$$X_i^{(1)}(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(11)} X_j^{(1)}(t-\tau) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(12)} X_j^{(2)}(t-\tau) + $$

$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(13)} X_j^{(3)}(t-\tau) + Y_i^{(1)}(t-\tau),$$

$$X_i^{(2)}(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(21)} X_j^{(1)}(t-\tau) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(22)} X_j^{(2)}(t-\tau) + $$

$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(23)} X_j^{(3)}(t-\tau) - Y_i^{(2)}(t-\tau),$$

$$X_i^{(3)}(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(31)} X_j^{(1)}(t-\tau) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(32)} X_j^{(2)}(t-\tau) + $$

$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(33)} X_j^{(3)}(t-\tau) - Y_i^{(3)}(t-\tau), \tag{1}$$

$$Y_i^{(1)}(t-\tau)=\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}I_j(t-\tau)+C_i(t-\tau),\ i\in\{1,\ldots,m\},\\ C_i(t-\tau),\ i\in\{m+1,\ldots,n\}\end{array}\right\},\ \dot{K}_i(t)=I_i(t-\tau)-\mu_i K_i(t),$$

$$0\le\sum_{i=1}^{n}L_i(t-\tau)\le N(t-\tau),\ 0\le X_i^{(1)}(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),L_i(t-\tau)),\ I_i(t-\tau)\ge 0,$$

$$Y^{(1)}(t-\tau),Y^{(2)}(t-\tau),Y^{(3)}(t-\tau)\ge 0,\ C_i(t-\tau)\ge C_i^{\min},$$

$$K_i(t)\ge 0,\ t\in[t_0,T],\ i\in\{1,\ldots,n\},$$

$$K_i(t_0)=K_i^{(0)},\ K_i(T)\ge K_i^{(T)},\quad C_i(\theta)=\sigma_i(\theta),\ L_i(\theta)=\psi_i(\theta),$$

$$I_i(\theta)=\varphi_i(\theta),\ \theta\in[t_0-\tau,t_0].$$

Здесь $X^{(1)}$ — валовой выпуск продукции; $Y^{(1)}$ — конечная продукция; $X^{(2)}$ — созданный рукотворный капитал; $Y^{(2)}$ — запас имеющегося капитала; $X^{(3)}$ — уничтоженные загрязнители; $Y^{(3)}$ — лимиты на выбросы загрязнителей в окружающую среду; A_{11}, A_{12}, A_{13} — неотрицательные матрицы материальных расходов; A_{21}, A_{22}, A_{23} — неотрицательные матрицы использования рукотворного капитала; A_{31}, A_{32}, A_{33} — неотрицательные матрицы выпуска загрязнителей; I — инвестиции; C — непроизводственное потребление; χ — матрица структуры капитальных вложений, $\chi_{ij}=0$ при $i>m$, $\sum_{i=1}^{n}\chi_{ij}=1$ для всех j; K — основные производственные фонды; L — трудовые ресурсы; μ — норма амортизации капитала; τ — запаздывание; m — количество фондообразующих отраслей; $\psi_i(\theta)$, $\sigma_i(\theta)$, $\varphi_i(\theta)$ — кусочно-непрерывные функции на $[t_0-\tau,t_0]$.

В задаче (1) состояние системы представлено вектором капитала, а другие переменные являются компонентами вектора управления. Динамику эколого-экономической системы определяем в условиях экологического равновесия [2]: $Y^{(2)}(t)$, $Y^{(3)}(t)=\mathrm{const}$. Из второго и третьего уравнений системы (1) выразим $X^{(2)}$ и $X^{(3)}$ через $X^{(1)}$, получим

$$X_i^{(1)}(t-\tau)=\sum_{j=1}^{n}w_{ij}X_j^{(1)}(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}Y_j^{(2)}-\sum_{j=1}^{n}s_{ij}Y_j^{(3)}+Y_i^{(1)}(t-\tau),\ i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Матрицы имеют вид

$$M=A_{23}(E-A_{33})^{-1},\ Z=A_{12}(E-A_{22}-MA_{32})^{-1},$$

$$R=A_{13}(E-A_{33})^{-1},\ B=RA_{32}(E-A_{22}-MA_{32})^{-1},$$

$$Q=Z+B,\quad D=Q(A_{21}+MA_{31})+RA_{31},\quad W=A_{11}+D,\quad S=QM+R.$$

Согласно достаточным условиям оптимальности [3] оптимизируем две функции:

$$R(t,K(t),K(t-\tau),I(t-\tau),X^{(1)}(t-\tau),C(t-\tau))=e^{-\delta(t-t_0)}\sum_{i=1}^{n}U_i(C_i(t-\tau))+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\dot{a}_i(t)+\dot{\varphi}_i^{(0)}(t)K_i(t)+\dot{\varphi}_i^{(1)}(t-\tau)K_i(t-\tau)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\varphi_i^{(0)}(t)+\varphi_i^{(1)}(t)]\{I_i(t-\tau)-\mu_i K_i(t)\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t-\tau)\left(X_i^{(1)}(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}w_{ij}X_j^{(1)}(t-\tau)-\right.$$

$$\left.-\begin{cases}C_i(t-\tau)+\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}I_j(t-\tau), & i\in\{1,\ldots,m\},\\ C_i(t-\tau), & i\in\{m+1,\ldots,n\}\end{cases}+\sum_{j=1}^{n}q_{ij}Y_j^{(2)}+\sum_{j=1}^{n}s_{ij}Y_j^{(3)}\right)+ \qquad (2)$$

$$+\gamma(t-\tau)\left(N(t-\tau)-\sum_{i=1}^{n}L_i(t-\tau)\right)\to \sup_{\substack{K_i(t)\ge 0,\,K_i(t-\tau)\ge 0,\\ I_i(t-\tau)\ge 0,\ C_i(t-\tau)\ge C_i^{(\min)},\ L_i(t-\tau)\ge 0,\\ 0\le X_i^{(1)}(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),\ L(t-\tau)),\ t\in[t_0,T]}},$$

$$\Phi(T,K(T),K(T-\tau))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[a_i(T)+\varphi_i^{(0)}(T)K_i(T)+\varphi_i^{(1)}(T-\tau)K_i(T-\tau)]\to \inf_{\substack{K_i(T)\ge K_i^{(T)},\\ K_i(T-\tau)\ge 0}}.$$

Здесь $\gamma(t-\tau)$, $\lambda_i(t-\tau)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, — соответствующие множители Лагранжа, которые являются кусочно-дифференцированными функциями.

Оптимизация первой функции в (2) разбивается на пять оптимизационных задач:

1) $\dot\varphi_i^{(0)}(t)K_i(t)-\mu_i(\varphi_i^{(0)}(t)+\varphi_i^{(1)}(t))K_i(t)\to \sup\limits_{K_i(t)\ge 0}$;

2) $e^{-\delta(t-t_0)}U_i(C_i(t-\tau))-\lambda_i(t-\tau)C_i(t-\tau)\to \sup\limits_{C_i(t-\tau)\ge C_i^{(\min)}}$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{[\varphi_i^{(0)}(t)+\varphi_i^{(1)}(t)]I_i(t-\tau)-\lambda_i(t-\tau)\sum\limits_{j=1}^{n}\chi_{ij}I_j(t-\tau)\right\}\to \sup\limits_{I_i(t-\tau)\ge 0}$;

4) $$\dot\varphi_i^{(1)}(t-\tau)K_i(t-\tau)+\left[\lambda_i(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t-\tau)w_{ji}\right]X_i^{(1)}(t-\tau)-$$

$$-\gamma(t-\tau)L_i(t-\tau)\to \sup_{\substack{K_i(t-\tau)\ge 0,\ L_i(t-\tau)\ge 0,\\ 0\le X_i^{(1)}(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),L_i(t-\tau))}};$$

5) $$X_i^{(1)}(t-\tau)=\sum_{j=1}^{n}w_{ij}X_j^{(1)}(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}Y_j^{(2)}-\sum_{j=1}^{n}s_{ij}Y_j^{(3)}+$$

$$+\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}I_j(t-\tau)+C_i(t-\tau), & i\in\{1,\ldots,m\},\\ C_i(t-\tau), & i\in\{m+1,\ldots,n\}\end{cases},$$

$$\sum_{i=1}^{n}L_i(t-\tau)=N(t-\tau),\ t\in[t_0,T].$$

Зададим $\lambda_i(t-\tau)=\lambda_{i0}e^{-\delta(t-t_0-\tau)}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Тогда необходимым условием экстремума является $U_i'(C_i(t-\tau))-\lambda_{i0}e^{\delta\tau}=0$, откуда при $\lambda_{i0}>0$ задача 2 имеет магистральное решение $C_i^{(\text{маг})}(t-\tau)=C_i^{(\text{маг})}\equiv\text{const}_i$. Если найденное значение $C_i^{(\text{маг})}\ge C_i^{(\min)}$, то переходим к решению других задач. В противном случае выбором $\lambda_{i0}>0$ необходимо добиться выполнения неравенства $C_i^{(\text{маг})}\ge C_i^{(\min)}$.

Выполним простейшие преобразования над функциями в задачах 1, 3, 4, обозначим $b_i = \lambda_{i0} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j0} w_{ji}$, $\gamma(t-\tau) = \gamma_0 e^{-\delta(t-t_0-\tau)}$, $\gamma_0 > 0$, $k_i(t-\tau) = \dfrac{K_i(t-\tau)}{L_i(t-\tau)}$. Допустим, что матрица W — продуктивная, неотрицательная, неразложимая. Тогда имеем необходимые условия экстремума по L_i и K_i

$$b_i[f_i(k_i) - f_i'(k_i)k_i] = \gamma_0, \ (\delta + \mu_i)\sum_{j=1}^{n} \chi_{ji} \lambda_{j0} = b_i f_i'(k_i),$$

$$\frac{f_i(k_i) - f_i'(k_i)k_i}{f_i'(k_i)} = \frac{\gamma_0}{(\delta + \mu_i)\sum_{j=1}^{n} \chi_{ji} \lambda_{j0}}. \tag{3}$$

Поскольку $b_i > 0$, то $\gamma_0 > 0$ и (3) имеет решение $k_i^{(\text{маг})}(t-\tau) \equiv k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0) = \text{const}_i$.

Из уравнения движения капитала найдем управление по инвестициям I_i:

$$I_i(t-\tau) = k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0)\dot{L}_i(t) + \mu_i k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0)L_i(t), \ i \in \{1,\dots,n\}, \ t \in [t_0, T]. \tag{4}$$

Подставим (4) в первое уравнение задачи 5 и получим начальную задачу для определения L_i

$$f_i(k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0))L_i(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} f_j(k_j^{(\text{маг})}(\gamma_0))L_j(t-\tau) - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} Y_j^{(2)} - \sum_{j=1}^{n} s_{ij} Y_j^{(3)} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} \chi_{ij}[k_j^{(\text{маг})}(\gamma_0)\dot{L}_j(t) + \mu_j k_j^{(\text{маг})}(\gamma_0)L_j(t)] + C_i^{(\text{маг})}, \ i \in \{1,\dots,m\}, \\ C_i^{(\text{маг})}, \ i \in \{m+1,\dots,n\} \end{array} \right\},$$

$$i \in \{1,\dots,n\}, \ t \in [t_0, T],$$

$$L_i(t) = \psi_i(t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0], \ i \in \{1,\dots,m\}. \tag{5}$$

Выразим переменные $L_i(t-\tau)$, $i \in \{m+1,\dots,n\}$, в (5) через переменные $L_i(t-\tau)$, $i \in \{1,\dots,m\}$. Пусть матрица $\widetilde{W}^{(2)} = (w_{ij})_{i,j=m+1}^{n,n}$ является продуктивной, неотрицательной и неразложимой. Тогда система (5) имеет решение в матричной форме

$$L_f^{(2)}(t-\tau) = (E - \widetilde{W}^{(2)})^{-1} W^{(4)} L_f^{(1)}(t-\tau) - (E - \widetilde{W}^{(2)})^{-1}[Q^{(2)}Y^{(2)} + S^{(2)}Y^{(3)}] +$$

$$+ (E - \widetilde{W}^{(2)})^{-1} C^{(2)(\text{маг})}, \tag{6}$$

где верхний индекс 1 отвечает отраслям с номерами $i \in \{1,\dots,m\}$, а индекс 2 — отраслям с номерами $i \in \{m+1,\dots,n\}$; $L_f = Lf(k^{(\text{маг})}(\gamma_0))$, $W^{(4)} = (w_{ij})_{i=m+1, j=1}^{n, m}$.

Подставим (6) в систему (5) и допустим, что матрица $\chi_{kf}^{(1)} + \chi_{kf}^{(2)}(E - \widetilde{W}^{(2)})^{-1} W^{(4)}$ имеет обратную. Тогда начальная задача для определения $L_f^{(1)}$ принимает вид

$$\dot{L}_f^{(1)}(t) + (\chi_{kf}^{(1)} + \chi_{kf}^{(2)}(E - \widetilde{W}^{(2)})^{-1} W^{(4)})^{-1}[\chi_{\mu kf}^{(1)} + \chi_{\mu kf}^{(2)}(E - \widetilde{W}^{(2)})^{-1} W^{(4)}]L_f^{(1)}(t) =$$

$$= (\chi_{kf}^{(1)} + \chi_{kf}^{(2)}(E - \widetilde{W}^{(2)})^{-1} W^{(4)})^{-1} \times$$

$$\times \{[\mathrm{E} - \mathrm{W}^{(1)} - \mathrm{W}^{(3)}(\mathrm{E} - \widetilde{\mathrm{W}}^{(2)})^{-1} \mathrm{W}^{(4)}]\mathrm{L}_\mathrm{f}^{(1)}(\mathrm{t} - \tau) - \widetilde{\mathrm{C}}^{(\text{маг})} + \widetilde{\mathrm{Y}}^{(2,3)}\}, \tag{7}$$

$$L_f^{(1)}(t) = \zeta(t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

$$\zeta(\mathrm{t}) = (\psi_1(\mathrm{t})\mathrm{f}_1(\mathrm{k}_1^{(\text{маг})}(\gamma_0)), \dots, \psi_\mathrm{m}(\mathrm{t})\mathrm{f}_\mathrm{m}(\mathrm{k}_\mathrm{m}^{(\text{маг})}(\gamma_0)))^\mathrm{T},$$

где

$$W^{(1)}=(w_{ij})_{i=1,j=1}^{m,m},\ W^{(3)}=(w_{ij})_{i=1,j=m+1}^{m,n},$$

$$\chi_{kf}=(\chi k/f(k^{(\text{маг})})),\ \chi_{\mu kf}=(\chi\mu k/f(k^{(\text{маг})})),$$

$$\widetilde{C}^{(\text{маг})}=W^{(3)}(E-\widetilde{W}^{(2)})^{-1}C^{(2)(\text{маг})}+\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-\widetilde{W}^{(2)})^{-1}C^{(2)(\text{маг})}+C^{(1)(\text{маг})},$$

$$\widetilde{Y}^{(2,3)}=W^{(3)}(E-\widetilde{W}^{(2)})^{-1}[Q^{(2)}Y^{(2)}+S^{(2)}Y^{(3)}]+Q^{(1)}Y^{(2)}+S^{(1)}Y^{(3)}+$$

$$+\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-\widetilde{W}^{(2)})^{-1}[Q^{(2)}Y^{(2)}+S^{(2)}Y^{(3)}].$$

Задача (7) при кусочно-непрерывной вектор-функции $\zeta(t)$, $t\in[t_0-\tau,t_0]$, имеет решение $L_f^{(1)(\text{маг})}(t)$, $t\in[t_0,T]$, которое является кусочно-дифференцированной функцией [4]. Однако решение $L_f^{(1)(\text{маг})}(t)$, $t\in[t_0,T]$, должно быть неотрицательным, поэтому для межотраслевого баланса получены ограничения на данные задачи (7):

1) начальный вектор $\zeta(t)$, $t\in[t_0-\tau,t_0]$, — положительный;

2) векторы $I(t-\tau)\ge 0$, $\dot{L}_f^{(1)}(t)\ge 0$, $t\in[t_0,T]$, т.е. выполняются неравенства

$$[E-W^{(11)}-W^{(12)}(E-W^{(22)})^{-1}W^{(21)}]L_f^{(1)}(t-\tau)-W^{(12)}(E-W^{(22)})^{-1}\times$$

$$\times[C^{(2)(\text{маг})}-Q^{(2)}Y^{(2)}-S^{(2)}Y^{(3)}]+Q^{(1)}Y^{(2)}+S^{(1)}Y^{(3)}-C^{(1)(\text{маг})}\ge 0,$$

$$-\Omega[\chi_{\mu kf}^{(1)}+\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-W^{(22)})^{-1}W^{(21)}]L_f^{(1)}(t)-\Omega\chi_{\mu kf}^{(2)}(E-W^{(22)})^{-1}\times$$

$$\times[C^{(2)(\text{маг})}-Q^{(2)}Y^{(2)}-S^{(2)}Y^{(3)}]+\Omega[E-W^{(11)}-W^{(12)}(E-W^{(22)})^{-1}W^{(21)}]\times$$

$$\times L_f^{(1)}(t-\tau)-\Omega\{W^{(12)}(E-W^{(22)})^{-1}[C^{(2)(\text{маг})}-Q^{(2)}Y^{(2)}-S^{(2)}Y^{(3)}]-$$

$$-Q^{(1)}Y^{(2)}-S^{(1)}Y^{(3)}+C^{(1)(\text{маг})}\}\ge 0, \tag{8}$$

где $X^{(1)}$, $W^{(11)}$, $W^{(12)}$, $Q^{(1)}$, $S^{(1)}$, I, $C^{(1)}$ соответствуют фондообразующим отраслям, а $X^{(2)}$, $W^{(21)}$, $W^{(22)}$, $Q^{(2)}$, $S^{(2)}$, $C^{(2)}$ — нефондообразующим отраслям, $\Omega=[\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-W^{(22)})^{-1}W^{(21)}]^{-1}$.

Подставив $L_f^{(1)(\text{маг})}$ в (6), получим вектор $L_f^{(2)(\text{маг})}(t)$, $t\in[t_0,T]$. Причем компоненты $L_i^{(\text{маг})}(t)f_i(k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0))$, $i\in\{1,\dots,n\}$, являются непрерывными функциями на $[t_0,T]$. При некотором $\widetilde{\gamma}_0$ найденные $L_i^{(\text{маг})}(t-\tau,\widetilde{\gamma}_0)$, $i\in\{1,\dots,n\}$, удовлетворяют равенству задачи 5.

Определим магистральные значения траектории $K_i^{(\text{маг})}(t)=k_i^{(\text{маг})}L_i^{(\text{маг})}(t)$ и магистральное управление $C_i^{(\text{маг})}$, $I_i^{(\text{маг})}(t-\tau)$, $L_i^{(\text{маг})}(t-\tau)$, $X_i^{(1)(\text{маг})}(t-\tau)=$ $=F_i(K_i^{(\text{маг})}(t-\tau),L_i^{(\text{маг})}(t-\tau))$,

$$Y_i^{(1)(\text{маг})}(t-\tau)=\left\{\begin{matrix}\sum\limits_{j=1}^{n}\chi_{ij}I_j^{(\text{маг})}(t-\tau)+C_i^{(\text{маг})},\ i\in\{1,\dots,m\},\\ C_i^{(\text{маг})},\ i\in\{m+1,\dots,n\}\end{matrix}\right\},\ i\in\{1,\dots,n\};$$

$$X^{(2)(\text{маг})}(t-\tau)=(E-A_{22}-MA_{32})^{-1}\{(A_{21}+MA_{31})X^{(1)(\text{маг})}(t-\tau)-MY^{(3)}-Y^{(2)}\},$$

$$X^{(3)(\text{маг})}(t-\tau)=(E-A_{33})^{-1}(A_{31}X^{(1)(\text{маг})}(t-\tau)+A_{32}X^{(2)(\text{маг})}(t-\tau)-Y^{(3)}).$$

Состояние системы $\widetilde{K}_i(t)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $t\in[t_0,T]$, определяется из уравнения

$$\widetilde{K}_i(t)=K_i^{(0)}e^{-\mu_i(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}e^{-\mu_i(t-s)}I_i^{(\text{маг})}(s-\tau)ds,\ i\in\{1,\ldots,n\},\ t\in[t_0,T].$$

Найдем компоненту $a_i(t)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $t\in[t_0,T]$, из (2)

$$\dot{a}_i(t)=-e^{-\delta(t-t_0)}U_i(C_i^{(\text{маг})})+(\delta+\mu_i)e^{-\delta(t-t_0-\tau)}\sum_{j=1}^{n}\chi_{ji}\lambda_{j0}k_i^{(\text{маг})}L_i^{(\text{маг})}(t-\tau)-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j0}\chi_{ji}e^{-\delta(t-t_0-\tau)}I_i^{(\text{маг})}(t-\tau).$$

Тогда согласно достаточным условиям оптимальности [3] при выполнении ограничения $\widetilde{K}_i(T)\ge K_i^{(T)}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, оптимальным процессом является $\pi=\{\widetilde{K}_i(t),\ I_i^{(\text{маг})}(t-\tau),\ C_i^{(\text{маг})},\ L_i^{(\text{маг})}(t-\tau),\ X_i^{(1)(\text{маг})}(t-\tau),\ Y_i^{(1)(\text{маг})}(t-\tau),$ $X_i^{(2)(\text{маг})}(t-\tau),\ X_i^{(3)(\text{маг})}(t-\tau),\ i\in\{1,\ldots,n\},\ t\in[t_0,T]\}$.

Пусть для группы отраслей с номерами $i\in\{m-i_0+1,\ldots,m+i_1\}$ не выполняются неравенства $\widetilde{K}_i(T)\ge K_i^{(T)}$. Тогда из второй задачи оптимизации (2) вытекает $K_i(T)=K_i^{(T)}$, $i\in\{m-i_0+1,\ldots,m+i_1\}$. Для этих отраслей необходимо решить задачу на быстродействие:

$$\min(T-\xi),\ X_i^{(1)}(t-\tau)=\sum_{j=1}^{m-i_0}w_{ij}X_j^{(1)(\text{маг})}(t-\tau)+\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1}w_{ij}X_j^{(1)}(t-\tau)+$$
$$+\sum_{j=m+i_1+1}^{n}w_{ij}X_j^{(1)(\text{маг})}(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}Y_j^{(2)}-\sum_{j=1}^{n}s_{ij}Y_j^{(3)}+Y_i^{(1)}(t-\tau),$$
$$i\in\{m-i_0+1,\ldots,m+i_1\},$$
$$Y_i^{(1)}(t-\tau)=\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{j=m-i_0+1}^{m+i_1}\chi_{ij}I_j(t-\tau)+\sum\limits_{j=1}^{m-i_0}\chi_{ij}I_j^{(\text{маг})}(t-\tau)+\\ +\sum\limits_{j=m+i_1+1}^{n}\chi_{ij}I_j^{(\text{маг})}(t-\tau)+C_i(t-\tau),\ i\in\{m-i_0+1,\ldots,m\},\\ C_i(t-\tau),\ i\in\{m+1,\ldots,m+i_1\}\end{array}\right\},$$
$$\dot{K}_i(t)=I_i(t-\tau)-\mu_iK_i(t),\ K_i(\xi)=\widetilde{K}_i(\xi),$$
$$K_i(T)=K_i^{(T)},\ i\in\{m-i_0+1,\ldots,m+i_1\},\ t\in[\xi,T],$$
$$X_i^{(1)}(t-\tau)=X_i^{(1)(\text{маг})}(t-\tau),\ Y_i^{(1)}(t-\tau)=Y_i^{(1)(\text{маг})}(t-\tau),$$
$$I_i(t-\tau)=I_i^{(\text{маг})}(t-\tau),\ L_i(t-\tau)=L_i^{(\text{маг})}(t-\tau),$$
$$i\in\{1,\ldots,m-i_0\},\ i\in\{m+i_1+1,\ldots,n\},\quad t\in[\xi-\tau,\xi],$$
$$\sum_{i=1}^{m-i_0}L_i^{(\text{маг})}(t-\tau)+\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1}L_i(t-\tau)+\sum_{i=m+i_1+1}^{n}L_i^{(\text{маг})}(t-\tau)\le N(t-\tau),\ t\in[\xi,T],$$
$$C_i(t-\tau)\ge C_i^{\min},\ 0\le X_i^{(1)}(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),\ L_i(t-\tau)),$$
$$\widetilde{K}_i(t-\tau)\le K_i(t-\tau)\le K_i^{(T)},\ t\in[\xi,T],$$
$$I_i(t-\tau)\ge 0,\ L_i(t-\tau)\ge 0,\ Y_i^{(1)}(t-\tau)\ge 0,\ i\in\{m-i_0+1,\ldots,m+i_1\}. \tag{9}$$

Согласно достаточным условиям решим две задачи оптимизации, аналогичные (2):

$$\widetilde{R}(t, K(t), K(t-\tau), I(t-\tau), X^{(1)}(t-\tau), L(t-\tau), C(t-\tau)) \to$$
$$\to \sup_{\substack{\widetilde{K}_i(t)\le K_i(t)\le K_i^{(T)},\ L_i(t)\ge 0,\ i\in\{m-i_0+1,\dots,m+i_1\},\\ 0\le X_i(t-\tau)\le F_i(K_i(t-\tau),\ L_i(t-\tau)),\ t\in[\xi,T],}} \qquad (10)$$
$$\widetilde{\Phi}(\xi, T, K(T), K(T-\tau), K(\xi), K(\xi-\tau)) \to \inf_{t_0\le\xi\le T}.$$

Первая задача из (10) разбивается на пять соответствующих задач оптимизации, в результате чего оптимальным решением является $K_i^{(\text{пр})}(t)=\widetilde{K}_i(t)$, $t\in[\xi,T]$, $i\in\{m-i_0+1,\dots,m+i_1\}$, или $k_i(t)=k_i^{(\text{маг})}$ и $C_i^{(\text{пр})}(t-\tau)=C_i^{(\min)}$, $i\in\{m-i_0+1,\dots,m+i_1\}$.

Найдем управление $I_i(t-\tau)$, $t\in[\xi,T]$, из уравнения движения капитала при условии, что матрица $W^{(i_0,i_1)}=(w_{ij})_{i,j=m-i_0+1}^{m+i_1}$ — продуктивная, неотрицательная, неразложимая,

$$I_i(t-\tau)=k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0)\dot{L}_i(t)+\mu_i k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0)L_i(t),$$
$$t\in[\xi,T],\ i\in\{m-i_0+1,\dots,m+i_1\}. \qquad (11)$$

Подставим (11) в уравнение межотраслевого баланса, получим задачу для определения рабочей силы L_i:

$$L_i(t-\tau)f_i(k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0))=\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1} w_{ij}f_j(k_j^{(\text{маг})}(\gamma_0))L_j(t-\tau)+P_i(t-\tau)+$$
$$+\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1}\chi_{ij}(k_j^{(\text{маг})}(\gamma_0)\dot{L}_j(t)+\mu_j k_j^{(\text{маг})}(\gamma_0)L_j(t))+$$
$$+\sum_{j=1}^{m-i_0}\chi_{ij}I_j^{(\text{маг})}(t-\tau)+\sum_{j=m+i_1+1}^{n}\chi_{ij}I_j^{(\text{маг})}(t-\tau),$$

$$L_i(t)=\psi_i(t),\ t\in[\xi-\tau,\xi],\ i\in\{m-i_0+1,\dots,m\}; \qquad (12)$$

$$L_i(t-\tau)f_i(k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0))=\sum_{j=m-i_0+1}^{m+i_1} w_{ij}f_j(k_j^{(\text{маг})}(\gamma_0))L_j(t-\tau)+P_i(t-\tau), \qquad (13)$$
$$i\in\{m+1,\dots,m+i_1\},$$

где

$$P_i(t-\tau)=\sum_{j=1}^{m-i_0}w_{ij}X_j^{(1)(\text{маг})}(t-\tau)+\sum_{j=m+i_1+1}^{n}w_{ij}X_j^{(1)(\text{маг})}(t-\tau)-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\{q_{ij}Y_j^{(2)}+s_{ij}Y_j^{(3)}\}+C_i^{(\text{пр})}(t-\tau).$$

Пусть в системе (13) матрица $W^{(i_1,i_1)}=(w_{ij})_{i,j=m+1}^{m+i_1}$ является продуктивной, неотрицательной, неразложимой. Из (13) выразим $L_i(t-\tau)$, $i\in\{m+1,\dots,m+i_1\}$, через $L_i(t-\tau)$, $i\in\{m-i_0+1,\dots,m\}$, и подставим в задачу (12). Пусть матрица $\chi_{kf}^{(i_0,i_0)}+\chi_{kf}^{(i_0,i_1)}(E-W^{(i_1,i_1)})^{-1}W^{(i_1,i_0)}$ имеет обратную матрицу Ω. Тогда начальная задача по определению $L_f^{(i_0)}$ принимает вид

$$\dot{L}_f^{(i_0)}(t) = -\Omega[\chi_{\mu kf}^{(i_0,i_0)} + \chi_{\mu kf}^{(i_0,i_1)}(E - W^{(i_1,i_1)})^{-1} W^{(i_1,i_0)}] L_f^{(i_0)}(t) +$$
$$+\Omega[E - W^{(i_0,i_0)} - W^{(i_0,i_1)}(E - W^{(i_1,i_1)})^{-1} W^{(i_1,i_0)}] L_f^{(i_0)}(t-\tau) -$$
$$-\Omega[W^{(i_0,i_1)}(E - W^{(i_1,i_1)})^{-1} P^{(i_1)} + P^{(i_0)} +$$
$$+\chi_{\mu kf}^{(i_0,i_1)}(E - W^{(i_1,i_1)})^{-1} P^{(i_1)} + \chi^{(i_0)} I^{(i_0,\text{маг})} + \chi^{(i_1)} I^{(i_1,\text{маг})}], \quad t \in [\xi, T],$$
$$L_f^{(i_0)}(t) = \zeta^{(i_0)}(t), \ \zeta_i^{(i_0)}(t) = \psi_i(t) f_i(k_i^{(\text{маг})}(\gamma_0)), \ t \in [\xi-\tau, \xi], \tag{14}$$

где индекс i_0 отображает отрасли с номерами $i \in \{m-i_0+1, \ldots, m\}$, а i_1 — с номерами $i \in \{m+1, \ldots, m+i_1\}$, матрицами $\chi^{(i_0)} = (\chi_{ij})_{i=m-i_0+1, j=1}^{m, m-i_0}$, $\chi^{(i_1)} = = (\chi_{ij})_{i=m-i_0+1,\, j=m+i_1+1}^{m,n}$ и векторами $I^{(i_0,\text{маг})} = (I_1^{(\text{маг})}, \ldots, I_{m-i_0}^{(\text{маг})})'$, $I^{(i_1,\text{маг})} = = (I_{m+i_1+1}^{(\text{маг})}, \ldots, I_n^{(\text{маг})})'$.

При кусочно-непрерывном векторе $\zeta^{(i_0)}(t)$, $t \in [\xi-\tau, \xi]$, задача (14) имеет решение $L_f^{(i_0)}(t)$, $t \in [\xi, T]$, которое является кусочно-дифференцированной функцией. Чтобы решения $L_f^{(i_0)}(t)$, $L_f^{(i_1)}(t)$, $t \in [\xi, T]$, были неотрицательными, достаточно выполнения таких условий:

1) начальное условие $\zeta^{(i_0)}(t)$, $t \in [\xi-\tau, \xi]$, — положительное;

2) выполняются неравенства

$$[E - W^{(i_0,i_0)} - W^{(i_0,i_1)}(E - W^{(i_1,i_1)})^{-1} W^{(i_1,i_0)}] L_f^{(i_0)}(t-\tau) -$$
$$- S^{(0)}(t-\tau) \geq 0, \ t \in [\xi, T]; \tag{15}$$

$$-\chi_{kf}^{-1}\chi_{\mu kf} L_f^{(i_0)}(t) + \chi_{kf}^{-1}[E - W^{(i_0,i_0)} - W^{(i_0,i_1)}(E - W^{(i_1,i_1)})^{-1} W^{(i_1,i_0)}] \times$$
$$\times L_f^{(i_0)}(t-\tau) - \chi_{kf}^{-1} S^{(0)}(t-\tau) \geq 0. \tag{16}$$

Здесь

$$S^{(0)}(t-\tau) = W^{(i_0,1)} X^{(i_0,\text{маг})}(t-\tau) + W^{(i_0,n)} X^{(i_1,\text{маг})}(t-\tau) - Q^{(i_0,n)} Y^{(2)} -$$
$$- S^{(i_0,n)} Y^{(3)} + C^{(i_0,\min)} + W^{(i_0,i_1)}(E - W^{(i_1,i_1)})^{-1} S^{(1)}(t-\tau),$$
$$W^{(i_0,1)} = (w_{ij})_{i=m-i_0+1,\, j=1}^{m,\, m-i_0}, \quad W^{(i_0,n)} = (w_{ij})_{i=m-i_0+1,\, j=m+i_1+1}^{m,\, n},$$
$$S^{(1)}(t-\tau) = W^{(i_1,m)} X^{(i_0,\,\text{маг})}(t-\tau) + W^{(i_1,n)} X^{(i_1,\,\text{маг})}(t-\tau) -$$
$$- Q^{(i_1,n)} Y^{(2)} - S^{(i_1,n)} Y^{(3)} + C^{(i_1,\min)},$$

где $W^{(i_1,m)} = (w_{ij})_{i=m+1,\, j=1}^{m+i_1,\, m-i_0}$, $W^{(i_1,n)} = (w_{ij})_{i=m+1,\, j=m+i_1+1}^{m+i_1,\, n}$.

Решив задачу (14), получим правое управление $L_i^{(\text{пр})}(t, \gamma_0)$, $i \in \{m-i_0+1, \ldots, m\}$, $t \in [\xi, T]$, и соответственно $L_i^{(\text{пр})}(t, \gamma_0)$, $i \in \{m+1, \ldots, m+i_1\}$. При этом проверяем выполнение неравенства

$$0 \leq \sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1} L_i^{(\text{пр})}(t-\tau, \gamma_0) \leq$$
$$\leq N(t-\tau) - \sum_{i=1}^{m-i_0} L_i^{(\text{маг})}(t-\tau, \gamma_0) - \sum_{i=m+i_1+1}^{n} L_i^{(\text{маг})}(t-\tau, \gamma_0), \ t \in [\xi, T]. \tag{17}$$

Если выполняется (17), то найдено правое управление $L_i^{(\text{пр})}(t-\tau,\gamma_0)$, $i \in \in \{m-i_0+1,\dots,m+i_1\}$. В противном случае необходимо выбором γ_0 добиться его выполнения.

Из (11) определим компоненты правого управления $I_i^{(\text{пр})}(t-\tau)$, $X_i^{(1)(\text{пр})}(t-\tau)$, $X_i^{(2)(\text{пр})}(t-\tau)$, $X_i^{(3)(\text{пр})}(t-\tau)$, $Y_i^{(1)(\text{пр})}(t-\tau)$, $t\in[\xi,T]$, $i\in\{m-i_0+1,\dots,m+i_1\}$.

Правое состояние системы определяется из уравнения движения капитала задачи (9):

$$K_i^{(\text{пр})}(t)=\widetilde{K}_i(t)e^{-\mu_i(t-\xi)}+\int_{\xi}^{t} I_i^{(\text{пр})}(s-\tau)e^{-\mu_i(t-s)}ds,$$

$$t\in[\xi,T],\ i\in\{m-i_0+1,\dots,m+i_1\}.$$

Найдем

$$\dot{\widetilde{a}}_i(t)=-\dot{\widetilde{\varphi}}_i^{(0)}(t)k_i^{(\text{маг})}L_i^{(\text{пр})}(t)-\dot{\widetilde{\varphi}}_i^{(1)}(t-\tau)k_i^{(\text{маг})}L_i^{(\text{пр})}(t-\tau)-$$

$$-[\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(t)+\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(t)][-\mu_i k_i^{(\text{маг})}L_i^{(\text{пр})}(t-\tau)+I_i^{(\text{пр})}(t-\tau)]+$$

$$+\widetilde{\lambda}_i(t-\tau)C_i^{(\min)},\ t\in[\xi,T],\ i\in\{m-i_0+1,\dots,m+i_1\}.$$

Точка ξ момента переключения управлений находится из решения задачи

$$\widetilde{\Phi}(\xi)=-\xi-\sum_{i=m-i_0+1}^{m+i_1}\Big[\widetilde{a}_i(\xi)+\widetilde{\varphi}_i^{(0)}(\xi)\widetilde{K}_i(\xi)+$$

$$+\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(\xi-\tau)\widetilde{K}_i(\xi-\tau)-\int_{\xi-\tau}^{\xi}\widetilde{\varphi}_i^{(1)}(t)\dot{\widetilde{K}}_i(t-\tau)dt\Big]\to\inf_{t_0\le\xi\le T}.$$

Функция $\widetilde{\Phi}$ — непрерывная по ξ на $[t_0,T]$, поэтому достигает своей точной границы. Следовательно, точка ξ существует. Тогда оптимальным решением задачи (1) является процесс

$$\pi=\{K^{(\text{opt})}(t),I^{(\text{opt})}(t-\tau),C^{(\text{opt})}(t-\tau),X^{(1)(\text{opt})}(t-\tau),X^{(2)(\text{opt})}(t-\tau),$$
$$X^{(3)(\text{opt})}(t-\tau),Y^{(1)(\text{opt})}(t-\tau),L^{(\text{opt})}(t-\tau),t\in[t_0,T]\}$$

с компонентами

$$K_i^{(\text{opt})}(t)=\begin{cases}\widetilde{K}_i(t), & t\in[t_0,\xi],\\ K_i^{(\text{пр})}(t), & t\in[\xi,T],\end{cases}\quad I_i^{(\text{opt})}(t-\tau)=\begin{cases}I_i^{(\text{маг})}(t-\tau), & t\in[t_0,\xi),\\ I_i^{(\text{пр})}(t-\tau), & t\in[\xi,T].\end{cases}$$

Аналогичный вид имеют компоненты $C_i^{(\text{opt})}(t-\tau)$, $X_i^{(1)(\text{opt})}(t-\tau)$, $X_i^{(2)(\text{opt})}(t-\tau)$, $X_i^{(3)(\text{opt})}(t-\tau)$, $Y_i^{(1)(\text{opt})}(t-\tau)$, $L_i^{(\text{opt})}(t-\tau)$, $i\in\{1,\dots,n\}$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть производственные функции $F_i(K_i,L_i)$, $i\in\{1,\dots,n\}$, — дважды непрерывно дифференцируемые, выпуклые и монотонно возрастающие; функции полезности $U_i(C_i)$, $i\in\{1,\dots,n\}$, — непрерывные, монотонно возрастающие и выпуклые по C_i. Матрицы A_{33}, $A_{22}+MA_{32}$, W, $\widetilde{W}^{(2)}$, $W^{(22)}$, $W^{(i_0,i_1)}$, $W^{(i_1,i_1)}$ — продуктивные, неотрицательные и неразложимые, а матрицы $\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-\widetilde{W}^{(2)})^{-1}W^{(4)}$, χ_{kf}, $\chi_{kf}^{(1)}+\chi_{kf}^{(2)}(E-\widetilde{W}^{(22)})^{-1}W^{(21)}$, $\chi_{kf}^{(i_0,i_0)}+\chi_{kf}^{(i_0,i_1)}(E-W^{(i_1,i_1)})^{-1}W^{(i_1,i_0)}$ имеют обратные матрицы. Выполняются неравенства (8), (15), (16). Тогда оптимальная траектория $K^{(\text{opt})}(t)$, $t\in[t_0,T]$, — кусочно-дифференцируемая функция, оптимальное управление $C^{(\text{opt})}(t)$, $X^{(1)(\text{opt})}(t)$, $X^{(2)(\text{opt})}(t)$, $X^{(3)(\text{opt})}(t)$, $L^{(\text{opt})}(t)$ — кусочно-дифференцируемые на $[t_0, T]$, а $I^{(\text{opt})}(t)$, $Y^{(1)(\text{opt})}(t)$ — кусочно-непрерывные на $[t_0, T]$.

Проведено исследование модели (1) при таких данных: $t_0 = 0$, $T = 10$, $n = 3$, $m = 1$, $\gamma_0 = 2$, $\delta = 0.05$, $\tau = 0.25$, $\mu = (0.07; 0.08; 0.09)$, $\psi(\theta) = (0.3; 0.136; 0.16)$, $\varphi(\theta) = (0.117; 0.084; 0.051)$, $\lambda_0 = (1; 1.5; 2)$, $K^{(0)} = (2; 1; 1)$, $K^{(T)} = (6; 7; 4.5)$, $C^{(\min)} = (0.1; 0.2; 0.3)$; $U_1(C_1) = C_1^{1/2}$, $U_2(C_2) = 2C_2^{1/2}$, $U_3(C_3) = 3C_3^{1/2}$; $F_1(K_1, L) = 10K_1^{1/4}L^{3/4}$, $F_2(K_2, L) = 12K_2^{1/3}L^{2/3}$, $F_3(K_3, L) = 15K_3^{1/5}L^{4/5}$;

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.003 & 0.05 & 0.099 \\ 0.07 & 0.003 & 0.09 \\ 0.03 & 0.07 & 0.0056 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.02 & 0.01 \\ 0.09 & 0.025 & 0.03 \\ 0.06 & 0.059 & 0.06 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.05 \\ 0.02 & 0.085 & 0.073 \\ 0.18 & 0.045 & 0.025 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0.0004 & 0.00043 \\ 0.0002 & 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0003 & 0.0007 & 0.00076 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.1 & 0.06 \\ 0.08 & 0.05 & 0.45 \\ 0.07 & 0.087 & 0.004 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.13 \\ 0.2 & 0.3 & 0.06 \\ 0.46 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.00048 & 0.0009 \\ 0.00057 & 0.0008 & 0.0007 \\ 0.00073 & 0.00027 & 0.00064 \end{pmatrix}, \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 0.002 & 0.034 & 0.012 \\ 0.08 & 0.045 & 0.023 \\ 0.048 & 0.075 & 0.003 \end{pmatrix}, \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 0.13 & 0.02 & 0.05 \\ 0.67 & 0.5 & 0.03 \\ 0.08 & 0.9 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.005 \\ 0.004 \\ 0.003 \end{pmatrix}, \quad Y^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.002 \\ 0.006 \end{pmatrix}.$$

В результате расчета получены следующие результаты:

— оптимальные траектория и управление (некоторые из них приведены в табл.1): $C_1^{(\text{opt})}(t) = 0.244$, $C_2^{(\text{opt})}(t) = Y_2^{(\text{opt})}(t) = 0.433$, $t \in [0, 10]$; $C_3^{(\text{opt})}(t) = Y_3^{(\text{opt})}(t) = \begin{cases} 0.549, & t \in [0, 9.5), \\ 0.3, & t \in [9.5, 10]; \end{cases}$

— момент переключения управлений $\xi = 9.5$.

Таблица 1. Зависимость оптимальной траектории и управления от времени

t, год	$K_2^{(\text{opt})}(t)$	$X_1^{(1)(\text{opt})}$	$I_3^{(\text{opt})}$	$L_1^{(\text{opt})}$	$X_2^{(2)(\text{opt})}$	$X_3^{(3)(\text{opt})}$	$Y_1^{(\text{opt})}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	4.606	0.051	0.3	8.303	9.885	0.496
0.25	1.001	5.25	0.06	0.34	10.87	12.94	0.54
0.5	1.002	5.89	0.07	0.38	13.41	15.97	0.59
0.75	1.008	6.56	0.09	0.42	16.1	19.17	0.64
1	1.019	7.27	0.1	0.47	18.93	22.54	0.7
1.25	1.035	8.01	0.11	0.52	21.91	26.09	0.75
1.5	1.056	8.79	0.13	0.57	25.04	29.82	0.81
1.75	1.083	9.62	0.14	0.62	28.34	33.74	0.88
2	1.116	10.49	0.16	0.68	31.81	37.87	0.94
2.25	1.15	11.4	0.18	0.74	35.46	42.21	1.01
2.5	1.19	12.36	0.2	0.8	39.3	46.79	1.09
2.75	1.25	13.37	0.22	0.87	43.34	51.6	1.16
3	1.31	14.43	0.24	0.94	47.59	56.66	1.25
3.25	1.37	15.55	0.26	1.01	52.06	61.99	1.33
3.5	1.44	16.73	0.28	1.09	56.77	67.59	1.42
3.75	1.52	17.97	0.31	1.17	61.72	73.49	1.52

(*Продолжение табл. 1*)

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1.61	19.27	0.33	1.25	66.94	79.69	1.62
4.25	1.7	20.64	0.36	1.34	72.42	86.22	1.72
4.5	1.81	22.08	0.39	1.43	78.19	93.09	1.83
4.75	1.92	23.6	0.42	1.53	84.26	100.32	1.95
5	2.04	25.2	0.45	1.64	90.65	107.93	2.07
5.25	2.17	26.88	0.48	1.75	97.37	115.93	2.2
5.5	2.31	28.65	0.52	1.86	104.45	124.35	2.34
5.75	2.46	30.51	0.55	1.98	118.9	133.22	2.48
6	2.63	32.47	0.59	2.11	119.72	142.54	2.63
6.25	2.8	34.53	0.63	2.24	127.97	152.35	2.79
6.5	2.99	36.7	0.67	2.39	136.64	162.68	2.95
6.75	3.19	38.98	0.72	2.53	145.76	173.54	3.13
7	3.4	41.38	0.76	2.69	155.36	184.97	3.31
7.25	3.63	43.91	0.81	2.86	165.47	197	3.51
7.5	3.87	46.56	0.87	3.03	176.1	209.65	3.71
7.75	4.13	49.36	0.92	3.21	187.28	222.97	3.93
8	4.4	52.3	0.98	3.4	199.05	236.98	4.15
8.25	4.69	55.4	1.04	3.6	211.44	251.73	4.39
8.5	5	58.66	1.1	3.82	224.47	267.24	4.64
8.75	5.32	62.09	1.17	4.04	238.18	283.57	4.9
9	5.67	65.69	1.24	4.27	252.61	300.74	5.18
9.25	6.03	69.49	1.31	4.52	267.79	318.82	5.47
9.5	6.42	73.48	1.39	4.78	256.51	305.39	5.78
9.75	6.83	77.69	1.47	5.06	271.82	323.62	6.1
10	7.27	82.11	1.55	5.34	287.93	342.8	6.44

Экономическое обоснование полученных результатов: первая и вторая отрасли на всем промежутке времени $t \in [0, 10]$ движутся по магистрали; третья отрасль до момента переключения управлений $t \in [0, 9.5]$ движется по магистрали, а после $t \in [9.5, 10]$ — по правой траектории, при этом потребление минимальное, происходит накопление капитала.

Таким образом, исследована динамика обобщенной модели межотраслевого баланса с запаздыванием, определены возможные сценарии ее развития и возрастания, предложен алгоритм вычисления момента переключения управлений. Эта методика используется для принятия управленческих решений экономическими процессами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляшенко І.М. Деякі узагальнення моделі Леонтьєва «Витрати-випуск» // International Conference: Dynamical system modelling and stability investigation (May 27–30, 2003).— Kyiv, 2003. — С. 200.
2. Богаєнко І.М., Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. Оптимізація узагальненої моделі міжгалузевого балансу з врахуванням контролю над забрудненням з лагами // Автоматизація виробничих процесів. — 2006. — № 2. — С. 53–61.
3. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
4. Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння / В.І. Фодчук, Я.Й. Бігун, І.І. Клевчук , І.М. Черевко, І.В. Якімов. — К.: Ін-т математики НАН України, 1996. — 210 с.

Поступила 26.05.2008
После доработки 18.03.2009