

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ НА ИМПУЛЬСНЫХ И ХЕВИСАЙДОВСКИХ КЛАССАХ УПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ¹

Ключевые слова: импульсное управление, функция Хевисайда, кусочно-постоянное управление, градиент функционала.

ВВЕДЕНИЕ

При управлении многими техническими объектами и технологическими процессами практическая реализация с достаточной точностью непрерывных или кусочно-непрерывных во времени заданных управляющих воздействий часто невозможна. Поэтому важное значение имеют задачи оптимального управления в технически легко и достаточно точно реализуемых классах управляющих функций [1–7]. В данной работе исследуются задачи управления на классах функций Дирака и Хевисайда.

В настоящее время теория импульсного управления представляет собой развивающийся раздел оптимизации динамических систем. Полученные в [1–4] необходимые условия оптимальности для различных видов систем и определения импульсных режимов как частных случаев обобщенных функций неудобны для численных расчетов. В данной работе для случая, когда задано число импульсных воздействий, получены необходимые условия оптимальности и конструктивные формулы для градиента функционала как относительно мощностей импульсов, в отличие от многих других работ, так и времени их воздействия на систему, позволяющие для численного решения задач использовать методы оптимизации первого порядка.

В математических моделях многих управляемых процессов в качестве управляющих воздействий используются функции Хевисайда. Ясно, что такие управления являются частным случаем кусочно-постоянных функций, но управления из класса функций Хевисайда представляют самостоятельный интерес с практической точки зрения, так как многие управляемые процессы на практике таковы, что каждое управляющее воздействие принимает постоянное во времени значение и включается только один раз. В работе получены необходимые условия оптимальности как по значениям, так и, что наиболее важно, по времени начала воздействия управлений, содержащие формулы для градиента функционала в пространстве оптимизируемых параметров и позволяющие для решения задач оптимального управления использовать методы конечномерной оптимизации первого порядка. Приведены результаты численных экспериментов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача оптимального управления:

$$J(u) = \alpha_1 \int_0^T f_0(x, t) dt + \alpha_2 \Phi_1(x(T)) + \alpha_3 \Phi_2(u(t)) \rightarrow \min_{u(t)}, \quad (1)$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), t) + \sum_{j=1}^L b_{ij}(t) u_{ij}(t), \quad 0 < t \leq T, \quad x(0) = x_0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при поддержке INTAS (Грант № 06-1000017-8909) в рамках программы сотрудничества INTAS с Южно-Кавказскими Республиками, 2006.

Здесь α_1, α_2, T и начальный вектор x_0 заданы; $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ — фазовый вектор; функционал $\Phi_2(u)$, функции $\Phi_1(x), f_0(x, t), f_1(x, t), \dots, f_n(x, t), b_i(t) = (b_{i1}(t), \dots, b_{iL}(t)), i = \overline{1, n}$, считаются известными и полагается, что они непрерывны вместе с производными по своим аргументам.

Задача (1), (2) исследуется на двух классах управляющих воздействий $u_{ij}(t), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, L}$.

Управляющие воздействия из класса импульсных функций:

$$u_{ij}(t) = q_{ij} \delta(t - \theta_j), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, L}. \quad (3)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ — δ -функция Дирака, q_{ij} — мощность воздействия на i -ю фазовую переменную в момент времени θ_j . Пусть управляющие воздействия, определяемые конечномерным вектором $u = (q, \theta) \in E^{(n+1)L}$, $q_i = (q_{i1}, \dots, q_{iL}), i = \overline{1, n}, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_L)$, удовлетворяют следующим ограничениям, исходя из технических или технологических условий:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^L q_{ij}^2 \leq Q, \quad \underline{q}_j \leq q_{ij} \leq \bar{q}_j, \quad 0 < \xi \leq \theta_j - \theta_{j-1}, \quad (4)$$

$$\theta_j \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, L},$$

где $Q, \underline{q}_j, \bar{q}_j, \xi, L$ — заданные величины.

Управляющие воздействия из класса χ -функций Хевисайда:

$$u_{ij}(t) = q_{ij} \chi(t - \theta_j), \quad \chi(t - \theta_j) = \begin{cases} 0, & t < \theta_j, \\ 1, & t \geq \theta_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, L}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Здесь q_{ij} — мощность воздействия на i -ю фазовую переменную с началом в момент времени θ_j . Пусть управляющие воздействия, определяемые параметрами $u = (q, \theta) \in E^{(L+1)n}$, $q = (q_1, \dots, q_L), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_L), q_i \in E^n$, удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\underline{q}_{ij} \leq q_{ij} \leq \bar{q}_{ij}, \quad 0 \leq \theta_i \leq T, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, L}. \quad (6)$$

Здесь $\underline{q}_{ij}, \bar{q}_{ij}, L$ заданы, таким образом каждая компонента управления $u_{ij}(t)$ — кусочно-постоянная функция [5, 6] и определяется временем включения θ_j и величиной воздействия $q_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, L}$.

Эти задачи, с одной стороны, можно отнести к классу параметрических задач оптимального управления, с другой, они образуют специальный класс задач конечномерной оптимизации, в которых для вычисления целевой функции $J(u) = I(q, \theta)$ требуется решить задачу Коши (2) и вычислить интеграл, участвующий в (1).

2. ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ (1)–(4)

Для применения конечномерных методов оптимизации первого порядка для определения оптимального вектора (q^*, θ^*) ниже получены аналитические формулы градиента целевого функционала $\text{grad} J(u) = (I'_q(q, \theta), I'_\theta(q, \theta))$ в задаче (1)–(4).

Согласно ей рассмотрим следующую функцию Гамильтона–Понтрягина и соответствующую сопряженную систему [6]:

$$H(\psi, x, u, t) = -\alpha_1 f_0(x, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(x, t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^L \psi_i(t) b_{ij}(t) u_{ij}(t),$$

$$\dot{\psi}_i(t) = \alpha_1 \frac{\partial f_0(x(t), t)}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \frac{\partial f_k(x(t), t)}{\partial x_i}, \quad (7)$$

$$\psi_i(T) = -\alpha_2 \frac{\partial \Phi_1(x(T))}{\partial x_i(T)}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\psi(t) \in E^n$. Для класса кусочно-непрерывных допустимых управлений приращение функционала (1) при приращении $\Delta u(t)$ управления $u(t)$ можем записать следующим образом [8]:

$$\Delta J(u) = \Delta I(q, \theta) = J(u + \Delta u) - J(u) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^L \int_0^T \psi_i(t) b_{ij}(t) \Delta u dt +$$

$$+ \alpha_3 (\Phi_2(u + \Delta u) - \Phi_2(u)) + o(\|\Delta u\|). \quad (8)$$

Сначала получим формулы относительно $I'_q(q, \theta)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, L}$. Приращение функционала при приращении управляющего воздействия $\Delta_{q_{ij}} u = (\Delta_{ij} q, 0)$, $\Delta_{ij} q = (0, \dots, \Delta q_{ij}, \dots, 0)$ запишем так:

$$\Delta_{q_{ij}} I(q, \theta) = -\int_0^T \psi_i(t) b_{ij}(t) \Delta q_{ij} \delta(t - \theta_j) dt + \alpha_3 (\Phi_2(q + \Delta q, \theta) - \Phi_2(q, \theta)) +$$

$$+ o(\|\Delta q\|) = -\psi_i(\theta_j) b_{ij}(\theta_j) \Delta q_{ij} + \alpha_3 (\Phi_2(q + \Delta q, \theta) - \Phi_2(q, \theta)) + o(\|\Delta q\|).$$

Разделив обе части на Δq_{ij} и перейдя к пределу при $\Delta q_{ij} \rightarrow 0$, с учетом того, что $o(\|\Delta q\|) / \Delta q_{ij} \rightarrow 0$, будем иметь

$$\frac{\partial I(q, \theta)}{\partial q_{ij}} = -\psi_i(\theta_j) b_{ij}(\theta_j) + \alpha_3 \frac{\partial \Phi_2(q, \theta)}{\partial q_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, L}. \quad (9)$$

Для того чтобы получить формулы для $I'_\theta(q, \theta)$, $j = \overline{1, L}$, используем δ_ε -функцию

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & t \in [\theta - \varepsilon, \theta], \\ 0, & t \notin [\theta - \varepsilon, \theta], \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; ясно, что $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$. Дадим θ приращение $\Delta_j \theta = \varepsilon$. Тогда δ_ε -функция получит приращение

$$\Delta_{\theta_j} \delta_\varepsilon(t - \theta_j) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta_j - \varepsilon, \theta_j + \varepsilon], \\ -1/\varepsilon, & t \in [\theta_j - \varepsilon, \theta_j], \\ 1/\varepsilon, & t \in [\theta_j, \theta_j + \varepsilon]. \end{cases}$$

Для приращения функционала при $\Delta_{\theta_j} u = (0, \Delta_j \theta)$, $\Delta_j \theta = (0, \dots, \Delta \theta_j, \dots, 0)$, используя (7), получаем

$$\Delta_{\theta_j} J(u) = -\sum_{i=1}^n \int_0^T \psi_i(t) b_{ij}(t) q_{ij} \Delta_{\theta_j} \delta_\varepsilon(t - \theta_j) dt +$$

$$+ \alpha_3 (\Phi_2(u + \Delta u) - \Phi_2(u)) + o(\|\Delta u\|) =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \frac{q_{ij}}{\varepsilon} \left(\int_{\theta_j - \varepsilon}^{\theta_j} \psi_i(t + \Delta \theta_j) b_{ij}(t + \Delta \theta_j) - \psi_i(t) b_{ij}(t) dt \right) +$$

$$+ \alpha_3 (\Phi_2(q, \theta + \Delta \theta) - \Phi_2(q, \theta)) + o(\|\Delta u\|).$$

Разлагая функции $\psi_i(t)b_{ij}(t)$ в ряд Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j} [\psi_i(t+\Delta\theta_j)b_{ij}(t+\Delta\theta_j) - \psi_i(t)b_{ij}(t)] dt = \\ & \int_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j} [(\psi_i(t)(b_{ij}(t))' \Delta\theta_j + (\psi_i(t)(b_{ij}(t)))'' \frac{\Delta\theta_j^2}{2} + o(\Delta\theta_j^2))] dt = \\ & = \Delta\theta_j \psi_i(t)(b_{ij}(t))' \Big|_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j} + (\psi_i(t)(b_{ij}(t)))'' \frac{\Delta\theta_j^2}{2} \Big|_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j} + o(\Delta\theta_j^2). \end{aligned}$$

Учитывая это в формуле (8), разделив обе части на $\Delta\theta_j$ и перейдя к пределу при $\Delta\theta_j \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, находим

$$\frac{dI(q, \theta)}{d\theta_j} = -\sum_{i=1}^n q_{ij} (\psi_i(\theta_j) b_{ij}(\theta_j))'_{\theta_j} + \alpha_3 \frac{\partial \Phi_2(q, \theta)}{\partial \theta_j}, \quad j = \overline{1, L}. \quad (10)$$

Аналогично можно показать, что при $\varepsilon > \Delta\theta$ и $\varepsilon < \Delta\theta$ выражения компонент градиента $I'_q(q, \theta)$, $j = \overline{1, L}$, совпадают с (9). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Компоненты градиента функционала по параметрам управляющих импульсных воздействий в задаче (1)–(4) определяются формулами (7), (9), (10).

Замечание 1. Если процесс вместо (2) описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$x_i(t) = f_i(x(t), t) + \sum_{j=1}^L f_{ij}(x(t), q_{ij}, t) \delta(t - \theta_j), \quad t \in (0, T], \quad x_i(0) = x_{0i}, \quad i = \overline{1, n},$$

то аналогично (7), (10), (15) несложно получить формулы для градиента функционала по компонентам управляющих импульсных воздействий в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dI(q, \theta)}{dq_{ij}} &= -\frac{\partial f_{ij}(x(\theta_j), q_{ij}, \theta_j)}{\partial q_{ij}} \psi_i(\theta_j) + \alpha_3 \frac{\partial \Phi_2(q, \theta)}{\partial q_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, L}, \\ \frac{dI(q, \theta)}{d\theta_j} &= -\sum_{i=1}^n q_{ij} (f_{ij}(x(\theta_j), q_{ij}, \theta_j) \psi_i(\theta_j))'_{\theta_j} + \alpha_3 \frac{\partial \Phi_2(q, \theta)}{\partial \theta_j}, \quad j = \overline{1, L}. \end{aligned}$$

Здесь $\psi(t) \in E^n$ — решение сопряженной задачи, аналогичной (7), но в данном случае она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i(t) &= \alpha_1 \frac{\partial f_0(x(t), t)}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \left[\frac{\partial f_k(x(t), t)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^L \frac{\partial f_{kj}(x(t), q_{kj}, t)}{\partial x_i} \times \delta(t - \theta_j) \right], \\ \psi_i(T) &= -\alpha_2 \frac{\partial \Phi_1(x(T))}{\partial x_i(T)}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

3. УПРАВЛЕНИЯ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ХЕВИСАЙДА

Для получения выражения $I'_q(q, \theta)$ дадим аргументу q_{ij} приращение Δq_{ij} , т.е. $\Delta_{q_{ij}} u = (\Delta_{ij} q, 0)$, $\Delta_{ij} q = (0, \dots, \Delta q_{ij}, \dots, 0)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, L}$. Тогда, используя (8), приращение функционала (1) запишем

$$\Delta_{q_{ij}} I(q, \theta) = - \int_0^T \psi_i(t) b_{ij}(t) \Delta q_{ij} \chi(t - \theta_j) dt + \\ + \alpha_3 (\Phi_2(q + \Delta q, \theta) - \Phi_2(q, \theta)) + o(\|\Delta q\|), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, L}. \quad (11)$$

Разделив обе части на Δq_{ij} и перейдя к пределу при $\Delta q_{ij} \rightarrow 0$, с учетом того, что $o(\|\Delta q\|) / \Delta q_{ij} \rightarrow 0$, будем иметь

$$\frac{dI(q, \theta)}{dq_{ij}} = - \int_{\theta_j}^T \psi_i(t) b_{ij}(t) dt + \alpha_3 \frac{\partial \Phi_2(q, \theta)}{\partial q_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, L}. \quad (12)$$

Для получения выражения $I'_q(q, \theta)$, $j = \overline{1, L}$, дадим θ_j приращение $\Delta \theta_j$, сначала предполагая, что $\Delta \theta_j > 0$. Тогда приращение функции Хевисайда будет равно

$$\Delta \chi(t - \theta_j) = \chi(t - \theta_j + \Delta \theta_j) - \chi(t - \theta_j) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta_j, \theta_j + \Delta \theta_j], \\ -1, & t \in [\theta_j, \theta_j + \Delta \theta_j]. \end{cases}$$

Следовательно, для приращения функционала, получаемого за счет положительного приращения $\Delta \theta_j$ аргумента θ_j , т.е. $\Delta \theta_j u = (0, \Delta_j \theta)$, $\Delta_j \theta = (0, \dots, \Delta \theta_j, \dots, 0)$, имеем

$$\Delta_{\theta_j} I(q, \theta) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^L \int_0^T \psi_i(t) b_{ij}(t) q_{ij} \Delta \chi(t - \theta_j) dt + \\ + \alpha_3 (\Phi_2(q, \theta + \Delta \theta) - \Phi_2(q, \theta)) + o(\|\Delta u\|) = \\ = \sum_{i=1}^n q_{ij} \int_{\theta_j}^{\theta_j + \Delta \theta_j} \psi_i(t) b_{ij}(t) dt + \alpha_3 (\Phi_2(q, \theta + \Delta \theta) - \Phi_2(q, \theta)) + o(\|\Delta u\|). \quad (13)$$

В случае отрицательного значения приращения θ_j , т.е. при $\Delta \theta_j < 0$, приращение функции Хевисайда равно:

$$\Delta \chi(t - \theta_j) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta_j - |\Delta \theta_j|, \theta_j], \\ 1, & t \in [\theta_j - |\Delta \theta_j|, \theta_j], \end{cases}$$

а приращение функционала можно записать

$$\Delta_{\theta_j} I(q, \theta) = - \sum_{i=1}^n q_{ij} \left(\int_{\theta_j - |\Delta \theta_j|}^{\theta_j} \psi_i(t) b_{ij}(t) dt \right) + \\ + \alpha_3 (\Phi_2(q, \theta + \Delta \theta) - \Phi_2(q, \theta)) + o(\|\Delta u\|). \quad (14)$$

Используя теорему о среднем значении, приращение функционала (13), (14) запишем в следующем виде:

$$\Delta J_{\theta_j}(u) = \pm \sum_{i=1}^n q_{ij} \psi_i(t) b_{ij}(t) \Big|_{t=\theta_j} |\Delta \theta_j| + \\ + \alpha_3 (\Phi_2(q, \theta + \Delta \theta) - \Phi_2(q, \theta)) + o(\|\Delta u\|),$$

где $+$ соответствует случаю $\Delta \theta_j > 0$, а $-$ при $\Delta \theta_j < 0$. Разделив обе части на $\Delta \theta_j$ и перейдя к пределу при $\Delta \theta_j \rightarrow 0$, независимо от знака $\Delta \theta_j$ получим

$$\frac{dI(q, \theta)}{d\theta_j} = \sum_{i=1}^n q_{ij} \psi_i(\theta_j) b_{ij}(\theta_j) + \alpha_3 \frac{\partial \Phi_2(q, \theta)}{\partial \theta_j}, \quad j = \overline{1, L}. \quad (15)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Градиент функционала задачи (1), (2), (5), (6) в пространстве управляющих параметров $(q, \theta) \in E^{(n+1)L}$ при выполнении наложенных выше условий на функции, участвующих в задаче, определяется формулами (21), (27).

Замечание 2. Если процесс описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), u(t), t), \quad t \in (0, T], \quad x_i(0) = x_{0i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где компоненты управляющего воздействия $u(t)$ из класса функций Хевисайда (5), то аналогично (12), (15) несложно получить следующие формулы для компонент градиента функционала:

$$\frac{dI(q, \theta)}{dq_{ij}} = - \int_{\theta_j}^T \frac{\partial f_i(x(t), u_1(t), t)}{\partial q_{ij}} \psi_i(t) dt + \alpha_3 \frac{\partial \Phi_2(q, \theta)}{\partial q_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, L},$$

$$\frac{dI(q, \theta)}{d\theta_j} = \sum_{i=1}^n q_{ij} \left[\frac{\partial f_i(x(t), u_1(t), t)}{\partial q_{ij}} \psi_i(t) \right]_{t=\theta_j} + \alpha_3 \frac{\partial \Phi_2(q, \theta)}{\partial \theta_j}, \quad j = \overline{1, L},$$

где $\psi(t) \in E^n$ — решение следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i(t) &= \alpha_1 \frac{\partial f_0(x(t), t)}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \frac{\partial f_k(x(t), u_1(t), t)}{\partial x_i}, \\ \psi_i(T) &= -\alpha_2 \frac{\partial \Phi_1(x(T))}{\partial x_i(T)}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

С помощью формул градиента используем следующий итерационный алгоритм для определения оптимальных значений управляющих воздействий и моментов их включения, основанный на методах конечномерной минимизации первого порядка.

Шаг 1. Для начального значения вектора $u^0 = (q^0, \theta^0)$ каким-либо численным методом решается задача Коши и определяется $x^0(t)$.

Шаг 2. Для соответствующего решения $x^0(t)$ численным методом находится решение сопряженной задачи Коши $\psi^0(t)$.

Шаг 3. С помощью полученных в работе формул вычисляются компоненты вектора градиента функционала.

Шаг 4. Применяя, например, метод проекции градиента на ограничения (4) (или соответственно на (6)), вычисляется новое приближение

$$u^1 = (q, \theta)^1 \in E^{(n+1)L}; \quad (q, \theta)^1 = \text{Pr}_{(4), (6)}[(q, \theta)^0 - \alpha_0 \nabla_{q, \theta} J((q, \theta)^0)],$$

где $\text{Pr}_{(4), (6)}$ — оператор проектирования в $(n+1)L$ пространстве на соответствующие ограничения (4) или (6), α_0 — шаг одномерной минимизации. При невыполнении условий оптимальности для значений u^1 при $u^0 = u^1$ шаги 1–4 выполняются повторно.

Приведем численные результаты применения полученных формул в следующих тестовых задачах.

Задача 1.

$$\dot{x}(t) = tx(t) + (t-1)q\delta(t-\theta), \quad 0 < t \leq 1, \quad x(0) = 1,$$

$$J(u) = I(q, \theta) = \int_0^1 x^2(t) dt + 0,4(q-8)^2 + 0,1(\theta-0,2)^2, \quad 0 \leq q \leq 10.$$

Точное решение данной задачи неизвестно. Для решения задачи Коши использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка при $h = 0,002$.

В произвольно взятой точке $(q, \theta) = (6; 0,7)$ вектор градиента, рассчитанный по формулам (9), (10), равен: $\text{grad } I(q, \theta) = (-1,4794; -4,6961)$.

Для сравнения использовались также центральная, правая и левая схемы разностных аппроксимаций производных:

$$F'(x) = (F(x+h) - F(x-h)) / (2h) + O(h^2), \quad (16)$$

$$F'(x) = (F(x+h) - F(x)) / h + O(h), \quad (17)$$

$$F'(x) = (F(x) - F(x-h)) / h + O(h). \quad (18)$$

Значения компонент градиента: $I'_q(q, \theta)$ при различных значениях h_q почти не менялись и равны $-1,4785$, а значения компоненты $I'_q(q, \theta)$, как видно из табл. 1, существенно зависят от h_θ и наилучшее значение получено с помощью центральной схемы при $h_\theta = 0,2$, т.е. оно близко к значению, рассчитанному по формуле (10).

В табл. 2 приведены сравнительные значения производных $I'_q(q, \theta)$ для различных значений управляющих параметров.

Из табл. 1, 2 следует, что в задачах импульсного управления получение производных функционала по управляющим воздействиям методами разностной аппроксимации связано со сложностями (нет устойчивости, достаточной точности). В табл. 3 приведены результаты численных экспериментов, полученные с помощью метода проекции сопряженных градиентов при различных начальных значениях управляющего вектора с точностью оптимизации $\varepsilon = 0,001$.

Таблица 1. Значения $I'_\theta(q, \theta)$, вычисленные по разностным схемам

h_θ	Центральная (16)	Левая (17)	Правая (18)
0,2	-4,2493	-10,4552	1,9566
0,1	-2,1838	-5,2553	0,8877
0,02	-1,5092	-2,1213	-0,8970
0,01	-1,4879	-1,7940	-1,1819
0,002	-1,4812	-1,5424	-1,4199
0,001	-1,4618	-2,3447	-0,5788

Таблица 2. Значения компонент градиента функционала по θ

(q, θ)	Центральная, $h_\theta = 0,2$	Аналитическая (15)
(2; 8)	1,8711	1,9870
(1; 0,5)	1,9818	1,8246
(3; 0,7)	1,9389	1,8394
(1,5; 0,8)	1,5979	1,6634

Таблица 3. Численные результаты решения задачи 1

(q^0, θ^0)	(q^*, θ^*)	J^0	J^*	Число итераций
(6; 0,7)	(8,000; 0,7779)	2,5639	1,0499	9
(4; 0,6)	(8,000; 0,7799)	7,1852	1,0493	6
(2; 0,9)	(7,959; 0,7839)	15,8539	1,0478	3
(2; 0,8)	(8,000; 0,7799)	15,6761	1,0492	7
(8; 0,2)	(7,968; 0,7779)	35,3643	1,0487	2
(4; 0,5)	(8,000; 0,7819)	7,4929	1,0489	5

Задача 2 [10].

$$\dot{x}_1 = tx_1 - (t+2)^2 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 - 4tx_1 + (t+1)q\chi(\theta), \quad 0 < t \leq 1,$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0,$$

$$J(u) = I(q, \theta) = (x_2(1) + 1)^2 + 0,01(q - 5)^2 + 0,01(\theta - 0,5)^2, \quad q \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Точное оптимальное управление для данной задачи неизвестно. В табл. 4 представлены значения градиента функционала задачи, рассчитанные по центральной схеме разностной аппроксимации производных и формулам (12), (15).

В табл. 5 приведены результаты численного решения задачи для различных начальных значений параметров управляющих воздействий.

Таблица 4. Значения градиента функционала задачи 2

(q^0, θ^0)	По разностной схеме	По формулам (11), (12)
(2; 0,8)	(- 14,263; 200,354)	(- 14,054; 201,146)
(3; 0,4)	- 12,339; 149,822)	(- 12,194; 149,701)
(8; 0,1)	(2535,570; - 62548,154)	(2504,266; - 62236,170)
(8; 0,8)	(- 9,751; 617,934)	(- 9,589; 620,389)
(5; 0,3)	(255,901; - 4994,199)	(252,711; - 4981,822)

Таблица 5. Результаты численного решения задачи 2

№	(q^0, θ^0)	(q^*, θ^*)	J^0	J^*	Число итераций
1	(2; 0,8)	(4,998; 0,490)	186,174	$1,335 \cdot 10^{-6}$	24
2	(3; 0,4)	(4,997; 0,490)	2,472	$1,796 \cdot 10^{-5}$	7
3	(8; 0,1)	(5,000; 0,490)	8764,857	$9,291 \cdot 10^{-6}$	8
4	(8; 0,8)	(5,00; 0,490)	112,429	$2,132 \cdot 10^{-5}$	7
5	(5; 0,3)	(4,990; 0,490)	360,846	$1,935 \cdot 10^{-6}$	2

На рис. 1 изображена траектория системы, соответствующая оптимальному управлению. После включения управления в момент θ^* траектория (характер) процесса заметно меняется [10].

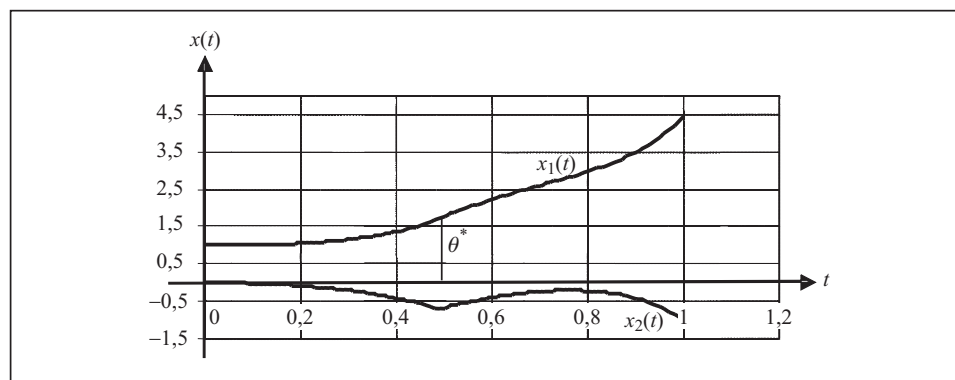


Рис. 1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получены формулы для градиента функционала в задаче оптимального управления объектами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, где управления определяются импульсными функциями и функциями Хевисайда. Полученные формулы для градиента целевого функционала задачи позволяют применить методы оптимизации первого порядка для численного решения этих задач.

Учитывая простоту реализации рассмотренных управляющих воздействий и их широкое использование в технике, предлагаемый подход к решению соответствующих задач оптимального управления может найти широкое применение в системах управления этими объектами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bensoussan A., Lions J.L. Controle impulsional et inequations quasivariationelles. — Paris: Dunod, 1987. — 600 p.
2. Lions J.L. Controle des systemes distributes singuliers. — Paris: Gauthier Willars, 1987. — 364 p.
3. Миллер Б.М. Условия оптимальности в задачах обобщенного управления. I. Необходимые условия оптимальности. II. Достаточные условия оптимальности // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 3. — С. 50–58; № 4. — С. 39–48.
4. Колокольникова Г.А. Необходимые условия второго порядка оптимальности особых и импульсных режимов // Там же. — 1990. — № 6. — С. 48–57.
5. The control handbook / Ed. W.S. Levine. — New York: CDC Press. IEEE Press, 1996. — 470 p.
6. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 135 с.
7. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука. — 1980. — 382 с.
8. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. О решении задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций // Автоматика и вычисл. техника. — 2000. — № 1. — С. 27–36.
9. Айда-заде К.Р. К решению задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 153–162.
10. Дыхта В.А. Оптимизация динамических систем с разрывными траекториями и импульсными управлениями // Соросовский образовательный журнал. — 1999. — № 8. — С. 110–115.

Поступила 04.12.2008