УДК: 519.685.3

$\boxed{\text{Н.Ф. КИРИЧЕНКО}}$, А.С. КОРЛЮК, Ю.Г. КРИВОНОС

КОНТЕЙНЕРНЫЕ СРЕДСТВА КЛАСТЕРИЗАЦИИ И КЛАССИФИКАЦИИ СИГНАЛОВ

Ключевые слова: *контейнерная кластеризация, пространство признаков, проекционная матрица.*

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] предложены средства классификации ультразвуковых сигналов, базирующиеся на использовании свойств многомерных сфер в L_p пространствах, которые получили название контейнеров. В данной работе эти идеи построения контейнеров в пространстве признаков развиваются в направлении формирования контейнеров в виде многомерных эллипсоидов, определенных на основе взвешенных проекционных матриц. Известные свойства этих матриц позволили по-новому взглянуть на решение проблемы кластеризации и классификации сигналов в пространстве информационных признаков.

1. ВЗВЕШЕННЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ВОЗМУЩЕНИЯ

Рассмотрим в m-мерном пространстве признаков для сигналов множество точек $x(j) \in R^m$, $j = \overline{1, n}$. Тогда для матрицы имеем

$$\widetilde{X} = (\widetilde{x}(1) \vdots \cdots \vdots \widetilde{x}(n)), \ \widetilde{x}(j) = x(j) - \hat{x}, \ \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x(j). \tag{1}$$

Исследуем некоторые свойства следующей матрицы:

$$R(\widetilde{X}^T) = \widetilde{X}^{+^T} \widetilde{X}^{+}, \tag{2}$$

где $\widetilde{X}^{+}$ — псевдоинверсная матрица, соответствующая матрице $\widetilde{X}$.

Использование сингулярного представления матрицы $\widetilde{X} = \sum_{j=1}^{r} u_j v_j^T \lambda_j$, $r = \operatorname{rank} \widetilde{X}$, где $u_j v_j^T \lambda_j$ — собственные векторы и значения соответственно соотношений

$$\widetilde{X}\widetilde{X}^T u_j = \lambda_j^2 u_j, \ \widetilde{X}^T \widetilde{X} v_j = \lambda_j^2 v_j,$$
$$u_i^T u_j = \delta_{ij}, \ v_i^T v_j = \delta_{ij}, \ i, \ j = \overline{1, r}, \ \lambda_1^2 \ge \lambda_2^2 \ge \cdot s \ge \lambda_r^2,$$

дает возможность установить важные геометрические свойства этих векторов и значений.

Свойство 1. Каждое собственное значение λ_j^2 матрицы $\widetilde{X}\widetilde{X}^T$ является суммой квадратов проекций векторов $\widetilde{x}(j)$ на орт u_j, т.е.

$$\lambda_j^2 = \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{x}^T(j) u(j))^2, \ j = \overline{1, r}. \tag{3}$$

Свойство 2. $R(\widetilde{X}^T)$ — взвешенная проекционная матрица, в которой для произвольного вектора $x \in R^m$ обеспечивает нахождение взвешенной проекции вектора $x - \hat{x}$ на линейную оболочку, натянутую на векторы $\widetilde{x}(j)$, $j = \overline{1, n}$, т.е.

$$R(\widetilde{X}^T)=\sum_{j=1}^{r} u_j u_j^T \lambda_j^{-2}=\sum_{j=1}^{r} u_j u_j^T\left(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}^T(i)u(j)\right)^{-2}, \tag{4}$$

$$(x-\hat{x})^T R(\widetilde{X}^T)(x-\hat{x})=\sum_{j=1}^{r}((x-\hat{x})^T u_j)^2 \lambda_j^{-2}, \tag{5}$$

где λ_j^{-2} — соответствующие весовые коэффициенты, а $\hat{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x(j)$.

Свойство 3. Сумма квадратов взвешенных проекций векторов $\widetilde{x}(j)$ является рангом матрицы $\widetilde{X}$, т.е. имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}^T(i)R(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(i)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}^T(i)\sum_{j=1}^{r}u_j u_j^T\widetilde{x}(i)(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{x}^T(k)u_j)^{-2}=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}^T(i)u_j)^2\sum_{k=1}^{n}\widetilde{x}^T(k)u_j)^{-2}=r. \tag{6}$$

Свойство 4. При расширении матрицы $\widetilde{X}$ новым вектор-столбцом $x(n+1)$ без изменения $\hat{x}$ имеют место рекуррентные соотношения:

1) при выполнении неравенства $\widetilde{x}^T(n+1)Z(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(n+1)>0$, т.е. для линейно независимого вектора $\widetilde{x}(n+1)$ от вектор-столбцов матрицы $\widetilde{X}$

$$R((\widetilde{X}\vdots\widetilde{x}(n+1))^T=$$

$$=R(\widetilde{X}^T)-\frac{Z(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(n+1)\widetilde{x}^T(n+1)R(\widetilde{X}^T)+R(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(n+1)\widetilde{x}^T(n+1)Z(\widetilde{X}^T)}{\widetilde{x}^T(n+1)Z(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(n+1)}+$$

$$+\frac{1+\widetilde{x}^T(n+1)R(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(n+1)}{\widetilde{x}^T(n+1)Z(\widetilde{x}^T)\widetilde{x}(n+1)}Z(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(n+1)\widetilde{x}^T(n+1)Z(\widetilde{X}^T); \tag{7}$$

2) для линейно-зависимого вектора $\widetilde{x}(n+1)$ от векторов $\widetilde{x}(1),\ldots,\widetilde{x}(n)$, т.е.

$$\widetilde{x}^T(n+1)Z(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(n+1)=0,$$

$$R((\widetilde{X}\vdots\widetilde{x}(n+1)^T)=R(\widetilde{X}^T)-\frac{R(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(n+1)\widetilde{x}^T(n+1)R(\widetilde{X}^T)}{1+\widetilde{x}^T(n+1)R(\widetilde{X}^T\widetilde{x}(n+1)}. \tag{8}$$

Свойство 5. При изъятии из матрицы $\widetilde{X}$ вектор-столбца $\widetilde{x}(i)$ без изменений $\hat{x}$ выполняются следующие рекуррентные соотношения:

1) при понижении ранга матрицы $\widetilde{X}$ после изъятия из нее столбца $\widetilde{x}(i)$, т.е. при выполнении условия $1-\widetilde{x}^T(i)\widetilde{X}^{+^T}e_i=z_{ii}(\widetilde{X})=0$, e_i — единичный орт в R^n, $z_{ii}(\widetilde{X})$ — диагональный элемент матрицы $Z(\widetilde{X})=I_n-\widetilde{Z}^+\widetilde{Z}$

$$R(\widetilde{X}_{(i)})=\left(I_m-\frac{\widetilde{X}^{+^T}e_i e_i^T\widetilde{X}^+}{||\widetilde{X}^{+^T}e_i||^2}\right)R(\widetilde{X}^T)\left(I_m-\frac{\widetilde{X}^{+^T}e_i e_i^T\widetilde{X}^+}{||\widetilde{X}^{+^T}e_i||^2}\right), \tag{9}$$

$$\widetilde{X}_{(i)}=(\widetilde{x}(1)\vdots\cdots\vdots\widetilde{x}(i-1)\vdots\widetilde{x}(i+1)\vdots\cdots\vdots\widetilde{x}(n));$$

2) при сохранении ранга матрицы $\widetilde{X}$ после изъятия из нее столбца $\widetilde{x}(i)$, т.е. при выполнении условия

$$1-\widetilde{x}^T(i)\widetilde{X}^{+^T}e_i=z_{ii}(\widetilde{X})>0,\quad R(\widetilde{X}_{(i)}^T)=R(\widetilde{X}^T)+\frac{\widetilde{X}^{+^T}e_i e_i^T\widetilde{X}^+}{||\widetilde{X}^{+^T}e_i||^2}. \tag{10}$$

Свойство 6. При изменении вектора $\hat{x}$ на $\hat{x}-\Delta\hat{x}$, т.е. для матрицы $\widetilde{X}-\Delta\hat{x}J_n^T$ имеют место соотношения

$$R(\widetilde{X}^T - J_n \Delta x^T) = R(A_1) - \frac{1}{1+b^T A_1^T a}(R(A_1^T)ab^T A_1^+ +$$

$$+A_1^{+^T} ba^T R(A_1^T)) + \frac{a^T R(A_1^T)a}{(1+b^T A_1^+ a)^2} A_1^{+^T} bb^T A_1^+, \tag{11}$$

$$a = -\Delta\hat{x},\ b = \widetilde{X}^+ \widetilde{X} J_n,\ J_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^n,$$

$$R(A_1^T) = R(\widetilde{X}^T) - \frac{R(\widetilde{X}^T)aa^T R(\widetilde{X}^T)}{||k||^2},\ A_1 = \widetilde{X} - \Delta\hat{x}J_n^T Z(\widetilde{X}),$$

$$||k||^2 = a^T R(\widetilde{X}^T)a + \frac{1}{J_n^T Z(\widetilde{X})J_n},\ k = -\widetilde{X}^+ \Delta\hat{x} - \frac{Z(\widetilde{X})J_n}{||Z(\widetilde{X})J_n||^2}.$$

Здесь предполагается выполнение условий общности положения

$$J_n^T \widetilde{X}^+ \Delta\hat{x} + \Delta\hat{x}^T R(\widetilde{X}^T)\Delta\hat{x} J_n^T Z(\widetilde{X})J_n \neq -1. \tag{12}$$

Справедливость свойств 1–6 вытекает из формул Гревиля и их обращения и теоремы об аналитическом представлении возмущений псевдоинверсных матриц [5].

2. ЭЛЛИПСОИДНЫЕ КОНТЕЙНЕРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИЗНАКОВ

В работах [3, 4] рассмотрено средство классификации эхо-сигналов, основанное на формировании специальных множеств в пространстве признаков типа сфер l_p пространства. Эти множества получили название контейнеров. Здесь предлагается развитие идеи контейнерного описания соответствующих множеств в пространстве признаков для точек, принадлежащих к одному и тому же кластеру или классу. При этом форму контейнеров будем выбирать в виде эллипсоидов в многомерном пространстве. Для множества точек (1) рассмотрим эллипсоидальный цилиндр в R, содержащий эти точки:

$$(x-\hat{x})^T R(\widetilde{X}^T)(x-\hat{x}) \le d^2. \tag{13}$$

Здесь величину d^2 можно определить как минимальное положительное число, при котором

$$x(j) \in \{x\colon (x-\hat{x})^T R(\widetilde{X}^T)(x-\hat{x}) \le d^2,$$

т.е.

$$d^2 = \max_{j=\overline{1,n}} \widetilde{x}^T(j) R(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(j). \tag{14}$$

Согласно соотношению (6) эта величина удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{rank}\widetilde{X} \ge d^2 \ge \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}^T(j) R(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(j) = \frac{r}{n},\ r = \operatorname{rank}\widetilde{X},$$

и будет меньше или равно единице в том случае, когда

$$\widetilde{x}^T(j) R(\widetilde{X}^T)\widetilde{x}(j) = d^2,\ j = \overline{1,n}.$$

Если $r = m$, то (13) является эллипсоидом в R^m. Для тех случаев, когда $r < m$, будем использовать эллипсоиды, сконструированные с помощью средства регуляризации, в виде

$$(x-\hat{x})^T R(\widetilde{X}^T)\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d^2\varepsilon^2}Z(\widetilde{X}))(x-\hat{x})\le 1, \tag{15}$$

где $\varepsilon^2 \approx \lambda^2$.

В силу определений матриц $R(\widetilde{X}^T)$ и $Z(\widetilde{X})$ являются справедливыми соотношениями

$$\mathrm{x(j)} \in \{\mathrm{x:(x-\hat{x})^T}\}\mathrm{K}_\varepsilon(\widetilde{\mathrm{X}})(\mathrm{x-\hat{x}})\le 1\},\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}},\ \mathrm{K}_\varepsilon(\widetilde{\mathrm{X}})=\mathrm{R}(\widetilde{\mathrm{X}}^\mathrm{T})\frac{1}{\mathrm{d}^2}+\frac{1}{\mathrm{d}^2\varepsilon^2}\mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{X}}), \tag{16}$$

так как имеют место формулы для обратных матриц

$$R^{-1}(\widetilde{X}^T)=\widetilde{X}\widetilde{X}^T \quad \text{при } r=m; \tag{17}$$

$$K_\varepsilon^{-1}(\widetilde{X})=d^2 X\widetilde{X}^T+d^2\varepsilon^2 Z(\widetilde{X}) \text{ при } r<m, \tag{18}$$

в справедливости которых легко убедится с помощью SVD-представления матриц. Несложно вычислить максимум линейных операций такого типа эллипсоидных множеств при $r=m$:

$$\max c^T(x-\hat{x})=(d^2c^T R^{-1}(\widetilde{X}^T)c)^{\frac{1}{2}}=(d^2c^T\widetilde{X}\widetilde{X}^T c)^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

$$x\in\{x:(x-\hat{x})R(\widetilde{X}^T)(x-\hat{x})\le d^2\},$$

при $r<m$

$$\max c^T(x-\hat{x})=(d^2c^T\widetilde{X}\widetilde{X}^T+d^2\varepsilon Z(\widetilde{X})c)^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

$$x\in\{x:(x-\hat{x})K_\varepsilon(\widetilde{X})(x-\hat{x})\le 1\}.$$

Для двух эллипсоидных контейнеров

$$\{x:\ d_1^{-2}(x-\hat{x}(1))R(\widetilde{X}^T(1))(x-\hat{x}(1))\le 1\},\quad \operatorname{rank}\widetilde{X}(1)=m, \tag{21}$$

$$\{x:\ d_2^{-2}(x-\hat{x}(2))R(\widetilde{X}^T(2))(x-\hat{x}(2))\le 1\},\ \operatorname{rank}\widetilde{X}(2)=m, \tag{22}$$

сформированных соответственно точками $x(i_1),\dots,x(i_{n1})$ и $x(j_1),\dots,x(j_{n2})$, условия существования разделяющей их линейной полосы сводится к условию существования такого вектора $c\in R^m$, $||c||=1$, для которого имеет место неравенство

$$c^T(\hat{x}(2)-\hat{x}(1))-d_1(c^T\widetilde{X}(1)\widetilde{X}^T(1)c)^{\frac{1}{2}}-d_2(c^T\widetilde{X}(2)\widetilde{X}^T(2)c)^{\frac{1}{2}}>0, \tag{23}$$

а максимальная ширина разделяющей полосы для этих контейнеров достигается при c выбранного согласно условию оптимальности

$$c_{\text{opt}}=\max_{||c||=1}\{c^T(\hat{X}(2)-\hat{X}(1))-d_1(c^T\widetilde{X}(1)\widetilde{X}^T(1)c)^{\frac{1}{2}}-d_2(c^T\widetilde{X}(2)\widetilde{X}^T(2)c)^{\frac{1}{2}}\}. \tag{24}$$

Аналогично представляются свойства разделимости эллипсоидальных контейнеров и при более «обедненных» данных, для которых $\operatorname{rank}\widetilde{X}(j)$, $j=\overline{1,2}$, меньше m, с использованием матриц $K_\varepsilon(\widetilde{X}(j))$, $j=\overline{1,2}$, т.е. условию (23) соответствует неравенство

$$c^T(\hat{X}(2)-\hat{X}(1))-d_1(c^T(\widetilde{X}(1)\widetilde{X}^T(1)+\varepsilon_1^2Z(\widetilde{X}(1))c)^{\frac{1}{2}}-$$

$$-d_2(c^T(\widetilde{X}(2)\widetilde{X}^T(2)+\varepsilon_2^2Z(\widetilde{X}(2))c)^{\frac{1}{2}}>0, \tag{25}$$

а условию оптимальности (24) — условие

$$c_{\text{opt}}=\arg\max_{||c||=1}\{c^T(\hat{X}(2)-\hat{X}(1))-d_1(c^T(\widetilde{X}(1)\widetilde{X}^T(1)+\varepsilon_1^2Z(\widetilde{X}(1))c)^{\frac{1}{2}}-$$

$$-d_2 (c^T (\widetilde{X}(2)\widetilde{X}^T (2)+\varepsilon_2^2 Z(\widetilde{X}(2))c)^{\frac{1}{2}}\}. \tag{26}$$

3. КОНТЕЙНЕРНАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ И ФОРМИРОВАНИЕ ДЕРЕВА КЛАСТЕРОВ

Пусть $x(1),\dots,x(m)$ — точки (векторы $x(j)\in R^m$) в пространстве признаков, соответствующие различным объектам или процессам, которые необходимо кластеризовать. Например, $x(1)$ соответствует изображению буквы А, $x(2)$ — Б, $x(n)$ — Я. Необходимо по некоторому принципу подобия объединить часть этих векторов в одну совокупность (кластер), а оставшуюся — во второй кластер, затем последовательно осуществлять эти же разбиения для кластеров, организовав, таким образом, дихотомное дерево кластеризации исходных данных. Наиболее простое средство такой кластеризации представляет собой известный алгоритм K-средних [5, 6], использующий идею объединения точек по минимальному евклидову расстоянию от точек до центров кластеров. Этот алгоритм имеет следующий вид:

1) определить первоначальные центроиды кластеров $x(1),\dots,x(k)$;

2) найти ближайшие по евклидову расстоянию точки к каждому центроиду;

3) пересчитать центроиды;

4) если все точки отнесены к кластерам и центроиды не изменились — на выход, иначе — на шаг 2.

Здесь предлагается развитие идеи K-средних с учетом вычисления расстояния по специальной мере, которую формируют сами точки или другие совокупности, возникающие в процессе выполнения алгоритма. Эта мера учитывает плотность и факторную структуру соответствующего подмножества точек, что далее положительно проявляется на качестве как кластеризации, так и распознавания сигналов. Итак, опишем подход формирования кластеров. Пусть изначально рассматриваемые точки $x(j)$, $j=\overline{1,n}$, в пространстве признаков уже разбиты на два кластера (например, с помощью алгоритма 2-сердних): $D_1=\{x\colon x(i_k), k=\overline{1,n_1}\}$ и $D_2=\{x\colon x(i_k),\ k=\overline{1,n_2}\}$. Для этих подмножеств D_1 и D_2 определим соответственно матрицы $\widetilde{X}(1)$, $\widetilde{X}(2)$ согласно операциям, введенным в предыдущем разделе, т.е.

$$\widetilde{X}(1)=(\widetilde{x}(i_1)\vdots\dots\vdots\widetilde{x}(i_{n_1})),\ \ \widetilde{X}(2)=(\widetilde{x}(j_1)\vdots\dots\vdots\widetilde{x}(j_{n_2})),$$

$$\widetilde{x}(i_k)=x(i_k)-\hat{x}(1),\ \ \widetilde{x}(j_s)=x(j_s)-x(2),\ \ k=\overline{1,n_1},\ \ s=\overline{1,n_2},$$

$$\hat{x}(1)=\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}x(i_k),\quad \hat{x}(2)=\frac{1}{n_2}\sum_{s=1}^{n_2}x(j_s).$$

Будем предполагать, что n_1 и n_2 имеют настолько большие значения, что векторы $\widetilde{x}(i_k)$, $k=\overline{1,n_1}$, и соответственно $\widetilde{x}(j_s)$, $s=\overline{1,n_2}$, обладают свойством

$$\operatorname{rank}\widetilde{X}(1)=m,\ \ \operatorname{rank}\widetilde{X}(2)=m. \tag{27}$$

Тогда согласно свойствам взвешенных проекционных матриц [7] имеют место соотношения

$$\begin{gathered} x(i_k)\in\left\{x\colon \frac{1}{d_1^2}(x-\hat{x}(1))^T R(\widetilde{X}^T(1))(x-\hat{x}(1))\le 1\right\},\ \ k=\overline{1,n_1},\\ x(j_s)\in\left\{x\colon \frac{1}{d_2^2}(x-\hat{x}(2))^T R(\widetilde{X}^T(2))(x-\hat{x}(2))\le 1\right\},\ \ s=\overline{1,n_2}. \end{gathered} \tag{28}$$

Геометрическая интерпретация для $m=2$ этих соотношений приведена на рис 1. Здесь

$$d_1=\max_{k=1,n_1}(x(i_k)-\hat{x}(1))^T\times$$

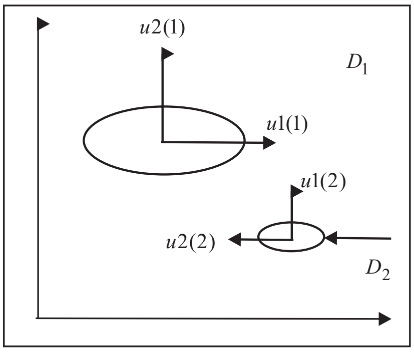

Рис. 1

$$\times R(\widetilde{X}^T(1))(x(i_k)-x(1)),$$

$$d_2 = \max_{s=1,\, n_2} (x(j_s)-\hat{x}(2))^T \times$$

$$\times R(\widetilde{X}^T(2))(x(j_s)-x(2)),$$

$$R(\widetilde{X}^T(1)) = \widetilde{X}^{+^T}(1)\widetilde{X}^+(1),$$

$$R(\widetilde{X}^T(2)) = \widetilde{X}^{+^T}(2)\widetilde{X}^+(2).$$

Тогда в качестве меры расстояния от некоторой точки $x \in R^m$ до множества Ω_j, $j=1,2$, будем рассматривать вместо евклидового расстояния величину

$$\rho(x,\Omega_j) = \frac{1}{d_j}((x-\hat{x}(j))^T R(\widetilde{X}^T(j))(x-\hat{x}(j))^{\frac{1}{2}}. \qquad (29)$$

Это позволяет реорганизовать принадлежность точек $x(j)$, $j=\overline{1,n}$, множествам D_1 и D_2, т.е. если некоторая точка $x(j)$ удовлетворяет условию

$$\rho(x(j),\,\Omega_1) \le \rho(x(j),\,\Omega_2), \qquad (30)$$

будем ее относить к множеству точек D_1, и если

$$\rho(x(j),\,\Omega_1) > \rho(x(j),\,\Omega_2), \qquad (31)$$

то $x(j)$ отсылаем в множество D_2. Таким образом, алгоритм формирования кластеров на основании использования множеств-контейнеров имеет следующее представление:

1) сформировать кластеры D_1 и D_2;

2) пересчитать центроиды согласно (29);

3) перейти на шаг 2, пока есть непересчитанные точки, иначе — на выход, если условия $\rho(x(j),\,\Omega_1) \le \rho(x(j),\,\Omega_2)$, $\rho(x(j),\,\Omega_1) > \rho(x(j),\,\Omega_2)$ выполнились.

Матрицы $R(\widetilde{X}^T(1))$, $R(\widetilde{X}^T(2))$ приобретают рекуррентную форму трансформации согласно формулам (7)–(11) при перемещении некоторой точки $x(j)$ из множества D_1 в D_2 или из D_2 в D_1 за счет изъятия или пополнения из матриц $\widetilde{X}(1)$, $\widetilde{X}(2)$ соответствующего вектора и изменения векторов $\hat{x}(1)$ и $\hat{x}(2)$.

Если условия (27) не выполняются, что бывает весьма редко при решении корректных прикладных задач, то в этом случае вместо матрицы $R(\widetilde{X}^T(j))$, $j=1,2$, следует использовать матрицу $K_\varepsilon(\widetilde{X}^T(j))$, $j=1,2$, определения которых приведено в предыдущем разделе статьи. Следует заметить, что формулы рекуррентного представления трансформации матриц $Z(\widetilde{X}^T(j))$, $j=1,2$, тоже несложно получить на основании формул возмущения псевдообратных матриц.

4. КОНТЕЙНЕРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ И РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБУЧЕНИЯ ПРАВИЛ КЛАССИФИКАЦИИ

Описанные выше свойства эллипсоидальных контейнеров позволяют сформировать удобные для использования правила классификации сигналов в системах распознавания образов. Рассмотрим описания таких правил на примере двух классов, не ограничивая общность подобных рассуждений для других классов. Пусть в пространстве R^m признаков задана обучающая последовательность $x(j)$, $j=\overline{1,n}$, где $x(i_k)$, $k=\overline{1,n_1}$, являющаяся представителями 1-го класса и $x(j_s)$; $s=\overline{1,n_2}$, — представителями 2-го класса. Образовав для 1- и 2-го классов эллипсоидальные контейнеры

$$V_1(x) = d_1^{-2}(x-x(1))^T R(\widetilde{X}^T(1))(x-x(1)) \le 1, \qquad (32)$$

$$V_2(x) = d_2^{-2}(x - x(2))^T R(\widetilde{X}^T(2))(x - x(2)) \le 1, \tag{33}$$

необходимо провести анализ непересекаемости этих контейнеров. Это можно осуществить согласно условию (23) или в процессе проверки выполнения условий

$$x(i_k) \,\overline{\in}\, \{x : V_2(x) \le 1\},\ k = \overline{1, n_1}, \tag{34}$$

$$x(j_s) \,\overline{\in}\, \{x : V_1(x) \le 1\},\ s = \overline{1, n_2}. \tag{35}$$

Естественно, соотношения (34) и (35) выступают лишь необходимыми условиями непересекаемости эллипсоидальных контейнеров (32) и (33), однако если

$$V_1(x(j_s)) > \Delta,\ \ s = \overline{1, n_2}, \tag{36}$$

$$V_2(x(i_k)) > \Delta,\ \ k = \overline{1, n_1}, \tag{37}$$

где Δ существенно больше единицы, то эти условия практически обеспечат непересекаемость контейнеров. Здесь для простоты изложения предполагается полнота данных в обучающей последовательности, т.е. $\det R(\widetilde{X}^T(j)) > 0,\ j = 1, 2$. В противном случае при определении функций $V_1(x), V_2(x)$ вместо матриц $R(\widetilde{X}^T(j))$ необходимо применить регуляризованные матрицы $K_\varepsilon(\widetilde{X}(j))$. Если эллипсоидальные контейнеры пересекаются, то можно воспользоваться средством последовательной фильтрации наиболее неразличимых объектов $x(j)$ из первого и второго контейнеров, реорганизовав контейнеры с помощью рекуррентных соотношений, предложенных во втором разделе этой статьи. В свою очередь, для изъятых элементов предлагается осуществить свою систему двухконтейнерной классификации. Алгоритм можно представить последовательностью таких шагов:

1) сформировать контейнеры V_1 и V_2;

2) проверить непересекаемость контейнеров согласно (36), (37);

3) применить рекуррентые формулы и перейти на 2 с новыми значениями точек, если контейнеры пересекаются, иначе — на выход.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе описаны контейнерные средства кластеризации и классификации сигналов, которые могут использоваться для решения задач кластеризации и классификации массива текстовых печатных документов, ультразвуковых сигналов, графических образов и т.д. Выведены правила классификации сигналов в системах распознавания образов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириченко М.Ф. Куц Роман (США), Лепеха М.П. Множини приналежності в задачах класифікації сигналів // П'ята Всеукр. міжнар. конф. УкрОБРАЗ'2000. Ін-т кібернетики НАНУ. — Київ. — 2000. — С. 83–87.
2. Кириченко Н.Ф., Куц Роман (США), Лепеха Н.П. Распознавание трехмерных объектов по ультразвуковым эхо-сигналам // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 5. — С. 110–122.
3. Кириченко М.Ф., Куц Роман (США), Лепеха М.П. Алгоритми розпізнавання об'єктів ультразвуковими сонарами // Теорія обчислень: Зб. наук. праць. — Київ: Ін-т кібернетики НАНУ. — 1999. — С. 196–200.
4. Котов А., Красильников Н. Кластеризация данных. [Электрон. ресурс] — 2006. http://logic.pdmi.ras.ru/~yura/internet/02ia-seminar.ppt
5. Кириченко Н.Ф., Донченко В.С. Множества и расстояния соответствия в задачах кластеризаии: гиперплоскости // Intern. Book Series "Inform. Sci. and Comput." — 2001. — С. 155–164.
6. Кириченко Н.Ф., Донченко В.С. Псевдообращения в задачах кластеризации // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 73–92.
7. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Применение псевдообратных и проекционных матриц в применении к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации // Там же. — 2002. — № 4. — С. 107–124.

Поступила 11.03.2009