УДК 519.21

**А.В. МАМОНОВА, Ю.Ф. ГРИЗА**

# ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ В СХЕМЕ ДИФФУЗИОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ

**Ключевые слова:** *система обслуживания типа* $[SM|M|\infty]^N$, *схема усреднения и диффузионной аппроксимации, полумарковский процесс, стационарное фазовое укрупнение, компенсирующий оператор, порождающий оператор, задача сингулярного возмущения.*

Система обслуживания (СО) $[SM|M|1|\infty]^N$-типа определяется полумарковским процессом, который задает входящий в систему извне поток требований; время обслуживания в каждом из $N$ узлов системы распределено экспоненциально; в каждом узле системы одновременно может обслуживаться не больше одного требования; очередь требований в каждом узле системы неограниченна [1–3]. В [4] такая система рассмотрена в схеме усреднения, сформулирована и доказана теорема усреднения, которая дает возможность получить предельный процесс $\rho(t)$, $t \geq 0$. Для полноты анализа системы необходимо исследовать флуктуации случайной эволюции относительно усредненной [5]. В данной работе сформулирована и доказана теорема о диффузионной аппроксимации для случая, когда $\rho(t) = \rho = \text{const}$, $\rho$ определяется из условия баланса: $C(\rho) = 0$ [3]. Указанная задача решается путем введения малого параметра серии $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$). К системе обслуживания применяется алгоритм стационарного фазового укрупнения [1, 6–8]. При доказательстве теоремы осуществляется асимптотическое разложение компенсирующего оператора (КО) расширенного процесса марковского восстановления и решается задача сингулярного возмущения для такого КО.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Полумарковский процесс $\kappa(t)$, $t \geq 0$, в измеримом фазовом пространстве $(E, \varepsilon)$ задается полумарковским ядром

$$Q(x,B,t) = G_x(t) P(x,B), \ x \in E, \ B \in \varepsilon, \ t \geq 0. \tag{1}$$

Стохастическое ядро

$$P(x,B) = P\{\kappa_{n+1} \in B \,|\, \kappa_n = x\}, \ x \in E, \ B \in \varepsilon, \tag{2}$$

определяет переходные вероятности вложенной цепи Маркова $\kappa_n$, $n \geq 0$. Семейство функций распределения

$$G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t \,|\, \kappa_n = x\} = P\{\theta_x \leq t\}, \ x \in E, \tag{3}$$

определяет времена пребывания в состояниях $\theta_x, x \in E$.

Считающий процесс

$$\nu(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}, \ t \geq 0, \tag{4}$$

определяет число моментов восстановления

$$\tau_n = \tau_{n+1} + \theta_n, \ n \geq 1, \ \tau_0 = 0. \tag{5}$$

© А.В. Мамонова, Ю.Ф. Гриза, 2009

Математическое ожидание времени обслуживания запишем

$$g(x):=E\theta_x=\int_0^\infty \overline{G}_x(t)dt,\ \overline{G}_x(t):=1-G_x(t), \tag{6}$$

интенсивность обслуживания имеет вид

$$q(x)=1/g(x),\ x\in \mathrm{E}. \tag{7}$$

Марковский процесс восстановления (МПВ) $\kappa_n$, $\tau_n$, $n\geq 0$, определяется переходными вероятностями

$$P(\kappa_{n+1}\in B,\ \theta_{n+1}\leq t|\kappa_n=x)=P(\kappa_{n+1}\in B\,|\kappa_n=x)P(\theta_{n+1}\leq t\,|\kappa_n=x). \tag{8}$$

В частном случае конечного фазового пространства $\hat{E}=\{1,2,\ldots,N\}$ полумарковский процесс $\kappa(t)$, $t\geq 0$, определяется полумарковской матрицей

$$Q(t)=[Q_{kr}(t),\ k,r\in\hat{E}],\ Q_{kr}(t)=P_{kr}G_k(t). \tag{9}$$

Марковский процесс (МП) $\kappa(t)$, $t\geq 0$, определяется стохастическим ядром $P(x,B)$ и функцией интенсивности $q(x)$, $x\in E$, экспоненциально распределенных времен пребывания в состояниях $\theta_x$:

$$P(\theta_{n+1}\leq t|\kappa_n=x)=P(\theta_x\leq t)=1-e^{-q(x)t}. \tag{10}$$

Ассоциированный МП $\kappa^0(t)$, $t\geq 0$, задается генератором

$$Q(x)=q(x)\int_{\mathrm{E}} P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)],\ q(x)=1/g(x). \tag{11}$$

МП $\kappa^0(t)$, $t\geq 0$, предполагается равномерно эргодичным со стационарным распределением $\pi(B)$, $B\in\varepsilon$. Заметим, что имеет место следующее соотношение:

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx),\ q:=\int_{\mathrm{E}}\pi(dx)q(x). \tag{12}$$

Здесь $\rho(B)$, $B\in\varepsilon$, — стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\kappa_n^0=\kappa^0(\tau_n)$, $n\geq 0$ (соответствующего МП $\kappa^0(t)$, $t\geq 0$):

$$\rho(B)=\int_E \rho(dx)P(x,B),\ B\in\varepsilon,\ \rho(E)=1. \tag{13}$$

Эргодичный МП $\kappa(t)$, $t\geq 0$, имеет стационарное распределение $\pi(B)$, $B\in\varepsilon$, которое порождает проектор в $\boldsymbol{B}(E)$, по определению

$$\Pi\varphi(x)\mathrel{\hat{=}}\varphi 1(x),\ \hat{\varphi}:=\int_E\pi(dx)\varphi(x),\ 1(x)=1,\ x\in E. \tag{14}$$

Равномерно эргодичный МП с генератором $Q$ порождает расщепление $\boldsymbol{B}(E)=N_Q\oplus R_Q$. Здесь $N_Q:=\{\varphi\colon Q\varphi=0\}$ — подпространство нулей $Q$, или нуль-пространство. Очевидно, что $\dim N_Q=1$; $R_Q:=\{\varphi\colon \exists\psi: Q\psi=\varphi\}$ — подпространство значений $Q$.

Потенциальный оператор (потенциал) $R_0$ МП с генератором $Q$ определяется соотношением $R_0=[Q+\Pi]^{-1}-\Pi$. Потенциальный оператор $R_0$ обратный к оператору $Q$: $QR_0=R_0Q=\mathrm{I}-\Pi$.

Уравнение $Q\varphi = \psi$ при выполнении условия баланса $\Pi\psi = 0$ имеет следующее решение:

$$\varphi = R_0\psi + \varphi_0 , \ \varphi_0 \in N_Q . \tag{15}$$

Стационарный полумарковский процесс $\kappa^{\varepsilon}(t)$, $t \ge 0$, в схеме серий рассматривается в стандартном фазовом пространстве (E $\mathcal{E}$) в схеме серий с малым параметром серии $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$, задается полумарковским ядром

$$Q^{\varepsilon}(x, \boldsymbol{B}, t) = \mathrm{P}^{\varepsilon}(x, \boldsymbol{B}) G_x(t) , \ x \in \mathrm{E} , \ \boldsymbol{B} \in \mathcal{E} , \ t \ge 0 . \tag{16}$$

Стохастическое ядро имеет вид

$$\mathrm{P}^{\varepsilon}(x, \boldsymbol{B}) = \mathrm{P}(x, \boldsymbol{B}) + \varepsilon \mathrm{P}_1(x, \boldsymbol{B}) . \tag{17}$$

Стохастическое ядро $\mathrm{P}(x, \boldsymbol{B})$ согласовано с разбиением фазового пространства

$$\mathrm{E} = \bigcup_{k=1}^{N} \mathrm{E}_k , \ \mathrm{E_k} \bigcap \mathrm{E_{k'}} = \varnothing, \ k \ne k', \tag{18}$$

следующим образом:

$$\mathrm{P}(x, \mathrm{E}_k) = 1_k(x) := \begin{cases} 1, \ x \in \mathrm{E}_k ; \\ 0, x \notin \mathrm{E}_k . \end{cases} \tag{19}$$

Возмущенное ядро $\mathrm{P}_1(x, \boldsymbol{B})$ задает вероятности перехода вложенной цепи Маркова $\kappa_n^{\varepsilon}$, $n \ge 0$, между классами состояний $\mathrm{E}_k$, $1 \le k \le N$, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Соответствующий МП равномерно эргодичен в каждом классе $\mathrm{E}_k$, $k \in \hat{\mathrm{E}}$, со стационарными распределениями $\pi_k(dx)$, $k \in \hat{\mathrm{E}}$. Вложенная цепь маркова $\kappa_n^0 = \kappa^0(\tau_n)$, $n \ge 0$, также равномерно эргодична со стационарными распределениями $\rho_k(dx)$, $k \in \hat{\mathrm{E}}$. Заметим, что имеет место следующее соотношение:

$$\pi_k(dx) q(x) = q_k \rho_k(dx) , \ q_k = \int_{E_k} \pi_k(dx) q(x) . \tag{20}$$

Согласно теореме 4.1 [1, § 4.2.1, с. 108] укрупненный процесс $v(\kappa^{\varepsilon}(t/\varepsilon))$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к МП $\hat{\kappa}(t)$, $t \ge 0$, в укрупненном фазовом пространстве $\hat{E} = \{1, 2, \ldots, N\}$, заданным порождающей матрицей $\hat{Q} = \lfloor \hat{q}_{kr} ; \ k, r \in \hat{E} \rfloor$.

Предполагаем, что укрупненный МП $\hat{\kappa}(t)$, $t \ge 0$, равномерно эргодичен со стационарным распределением $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_k , \ k \in \hat{\mathrm{E}})$.

Эволюция требований системы в $\hat{E} = \{1, \ 2, \ \ldots, N\}$ определяется матрицей маршрутизации $P_0 = \lfloor p_{kr}^0 ; \ k, r \in \hat{\mathrm{E}} \rfloor$, $\hat{\mathrm{E}} = \{1, 2, \ldots, N\}$, и вектором экспоненциально распределенных времен обслуживания требования в узлах системы $\mu = (\mu_k , \ k \in \hat{\mathrm{E}})$.

При этом выполняются следующие условия.

(A1) Система обслуживания является открытой, что задается условием на матрицу маршрутизации $p_{k0}^0 := 1 - \sum_{r=1}^{N} p_{kr}^0$, $\max p_{k0}^0 > 0$.

(A2) Процесс обслуживания $\rho^{\varepsilon}(t) = (\rho_k^{\varepsilon}(t) , k \in \hat{\mathrm{E}})$ — это вектор с компонентами $\rho_k^{\varepsilon}(t)$ — число требований в узле $k \in \hat{\mathrm{E}}$ в момент времени *t*. Система рассматривается в нагруженном режиме $\rho_k^{\varepsilon}(0) = u_k^0 / \varepsilon$.

Имеет место теорема усреднения, которая обеспечивает слабую сходимость нормированного процесса обслуживания $U^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^2\rho^{\varepsilon}(t/\varepsilon^2)$, $t\ge 0$, $\varepsilon>0$, к решению дифференциального уравнения

$$dU^0(t)/dt=C(U^0(t)),\ U^0(0)=u_0. \tag{21}$$

Вектор скорости $C(u)=(C_k(u),\ k\in\hat{E})$ определяется компонентами

$$C_k(u)=\gamma_k(u)+\lambda_k, \tag{22}$$

$$\gamma_k(u)=\sum_{r=1}^{N}\mu_r u_r[p_{rk}^0-\delta_{rk}],\ \lambda_k=\hat{\pi}_k q_k. \tag{23}$$

## 2. ФЛУКТУАЦИИ ЭВОЛЮЦИИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Используем такие процессы:

- $v^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^2 v(t/\varepsilon^3)$, $t\ge 0$, определяет число требований в момент времени $t$;
- $\eta(t)$, $t\ge 0$, — МП, описывающий эволюцию требований внутри системы обслуживания;
- $\delta_{\varepsilon}(t)=\sum_{n=1}^{v^{\varepsilon}(t)}\delta(\kappa_n^{\varepsilon})$, $t\ge 0$, описывает поток требований, входящих в систему извне.

Эволюция системы обслуживания представляется в форме

$$v^{\varepsilon}(t)=\eta^{\varepsilon}(t)+\delta^{\varepsilon}(t),\ t\ge 0, \tag{24}$$

где $\eta^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^2\eta/\varepsilon^3$, $\delta^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^2\sum_{n=1}^{v(t/\varepsilon^3)}\delta(\kappa_n^{\varepsilon})$, $t\ge 0$.

Нормированный и центрированный процесс обслуживания рассматривается в следующей форме:

$$\zeta^{\varepsilon}(t)=v^{\varepsilon}(t)-\varepsilon^{-1}\rho. \tag{25}$$

Имеет место условие баланса.

(А3) существует $\rho$ — единственное решение (точка равновесия) усредненной системы

$$C(\rho)=0,\ C(\rho)=\gamma(\rho)+\lambda,\ \gamma(\rho)=\rho^* P_{\mu}, \tag{26}$$

$$P_{\mu}:=\mu^d[P_0-I],\ \lambda=(\lambda_k:=\hat{\pi}_k q_k,\ k\in\hat{E}).$$

**Теорема (диффузионная аппроксимация).** При выполнении условий (А1) – (А3) имеет место слабая сходимость $\zeta^{\varepsilon}(t)\to\zeta^0(t)$ при $\varepsilon\to 0$.

Предельный процесс $\zeta^0(t)$, $t\ge 0$, является процессом типа Орнштейна-Уленбека и определяется генератором

$$L^0\varphi(u)=\gamma(u)\varphi'(u)+\frac{1}{2}B\varphi''(u), \tag{27}$$

где

$$B=\hat{\pi}_k q_k \hat{R}_{kk'}^0 q_{k'}+\hat{\pi}_{k'} q_{k'} R_{k'k}^0 q_k. \tag{28}$$

Здесь $\hat{R}_0=[\hat{R}_{kk'}^0;\ k,k'\in\hat{E}]$ — потенциал укрупненного МП $\hat{\kappa}(t)$, $t\ge 0$, в укрупненном фазовом пространстве $\hat{E}=\{1,2,\ldots,N\}$.

## 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Процесс обслуживания $\mathrm{v}^{\varepsilon}(t)$ задается формулой (1). МП $\eta(t)$, $t \ge 0$, описывающий эволюцию процесса обслуживаний в системе, задается генератором

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \sum_{k,r=1}^{N} \gamma_{kr}(u)[\varphi(u+\varepsilon^2 e_{kr}) - \varphi(u)]. \tag{29}$$

Вектор скачков и интенсивность скачков задаются формулами:

$$e_{kr} := e_r - e_k, \ \mathrm{e}_k := (\delta_k(l), \ l = \overline{1,N}), \ \delta_k(l) = \begin{cases} 1, l = k, \\ 0, l \ne k; \end{cases} \ e_0 := 0, \ k \in \hat{E},$$

$$\gamma_{kr}(u) := u_k \mu_k p_{kr}^0, \ k = \overline{1,N}, \ r = \overline{0,N}, \ k \ne r.$$

Процесс $\delta_{\varepsilon}(t)$, $t \ge 0$, описывает входной полумарковский поток требований.

Приведем пример МПВ:

$$\zeta_n^{\varepsilon} := \zeta^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}), \ \kappa_n^{\varepsilon} := \kappa^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}), \ \tau_n^{\varepsilon} := \varepsilon^3 \tau_n, \ n \ge 0. \tag{30}$$

Он характеризуется КО (см. [1, гл. 1]), действующим на пробных тест-функциях $\varphi(u,x)$, $u \in R^N$, $x \in \mathrm{E}$:

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3} q(x) \mathrm{E} \lfloor \varphi(\zeta_{n+1}^{\varepsilon}, \kappa_{n+1}^{\varepsilon}) - \varphi(u,x) | \zeta_n^{\varepsilon} = u, \ \kappa_n^{\varepsilon} = x \rfloor. \tag{31}$$

**Лемма 1.** КО (8) представляется в форме

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3} q(x) \lfloor G^{\varepsilon}(\rho,x) \mathrm{P}^{\varepsilon} D^{\varepsilon}(x) - \mathrm{I} \rfloor, \tag{32}$$

где

$$G^{\varepsilon}(\rho,x) = \int_0^{\infty} G_x(dt) \Gamma_t^{\varepsilon}(\rho), \tag{33}$$

$\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho)$, $t \ge 0$, — полугруппа, определяющая генератор

$$\Gamma_{\varepsilon}(\rho)\varphi(u) = \sum_{k,r=1}^{N} \gamma_{kr}(\rho + \varepsilon u)[\varphi(u + \varepsilon^2 e_{rk}) - \varphi(u)], \tag{34}$$

$$D^{\varepsilon}(k)\varphi(u) = \varphi(u + \varepsilon^2 e_k), \tag{35}$$

оператор $\mathrm{P}^{\varepsilon}$ опишем следующим образом:

$$\mathrm{P}\varphi(x) = \int_{\mathrm{E}} P(x,dy)\varphi(y), \ \mathrm{P}_1\varphi(x) = \int_{\mathrm{E}} P_1(x,dy)\varphi(y). \tag{36}$$

**Доказательство леммы 1.** Используя определение (1), вычисляем приращение

$$\Delta\nu_n^{\varepsilon} = \mathrm{v}_{n+1}^{\varepsilon} - \mathrm{v}_n^{\varepsilon} = \mathrm{v}^{\varepsilon}(\tau_{n+1}^{\varepsilon}/\varepsilon^3) - \mathrm{v}_n^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}/\varepsilon^3) =$$

$$= \mathrm{v}^{\varepsilon}(\tau_{n+1}) - \mathrm{v}^{\varepsilon}(\tau_n) =: \mathrm{v}^{\varepsilon}(\theta_{n+1}) = \varepsilon^2 \delta\mathrm{v}_{\varepsilon}.$$

Соотношение (2) дает представление

$$\Delta\zeta_n^{\varepsilon} := \zeta_{n+1}^{\varepsilon} - \zeta_n^{\varepsilon} = \Delta\mathrm{v}_n^{\varepsilon} = \varepsilon^2 \Delta\mathrm{v}_{\varepsilon} = \varepsilon^2 \eta^{\varepsilon}(\theta_{n+1}) + \delta_{\varepsilon}(\kappa_{n+1}^{\varepsilon}).$$

Процесс обслуживания запишем $\eta^{\varepsilon}(t)=\rho+\varepsilon\zeta^{\varepsilon}(t)$. Учитывая начальные условия, имеем равенство

$$\eta_n^{\varepsilon}=\rho+\varepsilon u. \tag{37}$$

Вычислим условное математическое ожидание

$$\mathrm{E}[\varphi(\zeta_{n+1}^{\varepsilon},\kappa_{n+1}^{\varepsilon})|\zeta_n^{\varepsilon}=u,\kappa_n^{\varepsilon}=x]=\mathrm{E}[\varphi(u+\Delta\zeta_n^{\varepsilon},\kappa_{n+1}^{\varepsilon})|\eta_n^{\varepsilon}=\rho+\varepsilon u,\kappa_n^{\varepsilon}=x]=$$

$$=\mathrm{E}[\varphi(u+\varepsilon^2\eta^{\varepsilon}(\theta_{n+1})+\varepsilon^2\delta^{\varepsilon}(\kappa_{n+1}^{\varepsilon}),\kappa_{n+1}^{\varepsilon})|\eta_n^{\varepsilon}=\rho+\varepsilon u,\kappa_n^{\varepsilon}=x]=$$

$$=\mathrm{E}\Delta_{\theta_x}^{\varepsilon}(\rho)[\varphi(u+\varepsilon^2\delta^{\varepsilon}(\kappa_{n+1}^{\varepsilon}),\kappa_{n+1}^{\varepsilon})|\kappa_n^{\varepsilon}=x]=\mathrm{E}\Gamma_{\theta_x}^{\varepsilon}(\rho)\mathrm{P}^{\varepsilon}[\varphi(u+\varepsilon^2\delta(x),x)]=$$

$$=\mathrm{E}\Gamma_{\theta_x}^{\varepsilon}(\rho)\mathrm{P}^{\varepsilon}D^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x)=\int_0^{\infty}G_x(dt)\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho)\mathrm{P}^{\varepsilon}D^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x).$$

**Замечание 1.** Генератор $\Gamma_{\varepsilon}(\rho)$ МП $\eta^{\varepsilon}(t), t\ge 0$, имеет вид

$$\Gamma_{\varepsilon}(\rho)\varphi(u)=\Gamma^{\varepsilon}(\rho+\varepsilon u)\varphi(u). \tag{38}$$

Асимптотический генератор запишем

$$\Gamma_{\varepsilon}(\rho)\varphi(u)=\varepsilon^2\Gamma(\rho)\varphi(u)+\varepsilon^3\Gamma(u)\varphi(u)+\varepsilon^2\theta_{\gamma}^{\varepsilon}\varphi(u). \tag{39}$$

Здесь оператор $\Gamma$ определяется так:

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)=\varepsilon^2\Gamma\varphi(u)+\varepsilon^2\theta_{\gamma}^{\varepsilon}\varphi(u),\ \Gamma\varphi(u)=\gamma(u)\varphi'(u)+\sum_{\kappa=1}^{\mathrm{N}}\gamma_{\kappa}(u)\varphi'_{\kappa}(u). \tag{40$'$}$$

Используя свойство линейности генератора $\Gamma^{\varepsilon}(u)$ и доказательство аналогичной леммы 2 в [6], имеем

$$\Gamma_{\varepsilon}(\rho)\varphi(u)=\Gamma^{\varepsilon}(\rho+\varepsilon u)\varphi(u)=\Gamma^{\varepsilon}(\rho)\varphi(u)+\varepsilon\Gamma^{\varepsilon}(u)\varphi(u)=$$

$$=\varepsilon^2\Gamma(\rho)\varphi(u)+\varepsilon^3\Gamma(u)\varphi(u)+\varepsilon^2\theta_{\gamma}^{\varepsilon}\varphi(u).$$

Ключевым шагом в асимптотическом анализе флуктуаций (2) является построение асимптотического разложения КО (9), действующего на тест-функции $\varphi(u,x)$.

**Лемма 2.** КО (9) допускает асимптотическое представление на тест-функциях $\varphi(u,\mathrm{x})\in C^3(R^N)$ равномерно по $x\in E$ в следующей форме:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u,x)=\lfloor\varepsilon^{-3}Q+\varepsilon^{-2}Q_1+\varepsilon^{-1}C_1(\rho,x)+C_0(u,x)+\theta_L^{\varepsilon}(\rho,x)\rfloor\varphi(u,x), \tag{41}$$

где

$$Q\varphi(x)=q(x)\int_E P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)];\ Q_1\varphi(x)=q(x)\int_E P_1(x,dy)\varphi(y); \tag{42}$$

$$C_1(\rho,x)\varphi(u)=[\gamma(\rho)+q(x)\delta(x)]\varphi'(u);\ C_0(u,x)\varphi(u)=[\gamma(u)+q(x)P_1\delta(x)]\varphi'(u). \tag{43}$$

**Доказательство леммы 2.** Вначале трансформируем КО (9):

$$\mathrm{L}^{\varepsilon}\varphi(u,x)=\varepsilon^{-3}Q^{\varepsilon}\varphi(u,x)+\mathbf{L}_{\mathrm{P}}^{\varepsilon}\varphi(u,x), \tag{44}$$

где $Q^{\varepsilon}=P^{\varepsilon}-\mathrm{I}$ и

$$\mathbf{L}_{\mathrm{P}}^{\varepsilon}\varphi(u,x)=\varepsilon^{-3}q(x)\lfloor G^{\varepsilon}(\rho,x)P^{\varepsilon}D^{\varepsilon}(x)-P^{\varepsilon}\rfloor\varphi(u,x). \tag{45}$$

Затем используем алгебраическое тождество

$$acb - c = (a-1)c + c(b-1) + (a-1)c(b-1). \tag{46}$$

Положим в алгебраическом соотношении

$$G^{\varepsilon}(\rho, x) = a, \ D^{\varepsilon}(x) = b, \ \mathrm{P}^{\varepsilon} = c. \tag{47}$$

$$[G^{\varepsilon}(\rho,x)\mathrm{P}^{\varepsilon} D^{\varepsilon}(x) - \mathrm{P}^{\varepsilon}] =$$

$$= [G^{\varepsilon}(\rho,x) - \mathrm{I}]\mathrm{P}^{\varepsilon} + \mathrm{P}^{\varepsilon}[D^{\varepsilon}(x) - \mathrm{I}] + [G^{\varepsilon}(\rho,x) - \mathrm{I}]\mathrm{P}^{\varepsilon}[D^{\varepsilon}(x) - \mathrm{I}]. \tag{48}$$

Используя известное соотношение для полугрупп $\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho) - \mathrm{I} = \Gamma^{\varepsilon}(\rho)\int_0^t \Gamma_s^{\varepsilon}(\rho) ds$,

получим
$$G^{\varepsilon}(\rho,x) - \mathrm{I} = \int_0^{\infty} G_x(dt)[\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho) - \mathrm{I}] = \Gamma^{\varepsilon}(\rho)\int_0^{\infty} G_x(dt)\int_0^t \Gamma_s^{\varepsilon}(\rho) ds =$$

$$= \Gamma^{\varepsilon}(\rho)[-\overline{G}_x(t)\int_0^t \Gamma_s^{\varepsilon}(\rho)\, ds \,\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \overline{G}_x(t)\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho)\, dt] = \Gamma^{\varepsilon}(\rho) G_1^{\varepsilon}(\rho,x),$$

где $G_1^{\varepsilon}(\rho,x) := \int_0^{\infty} \overline{G}_x(t)\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho)\, dt$.

Продолжаем интегрировать

$$G_1^{\varepsilon}(\rho,x) := \int_0^{\infty} \overline{G}_x(t)\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho) dt =$$

$$= -\overline{G}_x^{(2)}(t)\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho)\Big|_0^{\infty} + \Gamma^{\varepsilon}(\rho) G_2^{\varepsilon}(\rho,x) = g(x) + \Gamma^{\varepsilon}(\rho) G_2^{\varepsilon}(\rho,x),$$

где $G_2^{\varepsilon}(\rho,x) := \int_0^{\infty} \overline{G}_x^{(2)}(t)\Gamma_t^{\varepsilon}(\rho) dt$, $\overline{G}_x^{(2)}(t) := \int_0^{\infty} \overline{G}_x(s) ds$.

В результате имеем
$$G^{\varepsilon}(\rho,x) - \mathrm{I} = g(x)\Gamma^{\varepsilon}(\rho) + (\Gamma^{\varepsilon}(\rho))^2 G_2^{\varepsilon}(\rho,x). \tag{49}$$

Используя (40) и (40′), получаем

$$[G^{\varepsilon}(\rho,x) - \mathrm{I}]\varphi(u,x) = g(x)[\varepsilon^2\Gamma(\rho) + \varepsilon^3\Gamma(u)]\varphi(u) + \{[\varepsilon^2\Gamma(\rho) + \varepsilon^3\Gamma(u)]\varphi(u)\}^2 G_2^{\varepsilon} =$$

$$= g(x)[\varepsilon^2\gamma(\rho) + \varepsilon^3\gamma(u)\varphi'(u)] + \varepsilon^4\theta_g^{\varepsilon}\,\varphi(u,x).$$

Тогда
$$\varepsilon^{-3} q(x)[G^{\varepsilon}(\rho,x) - \mathrm{I}]P^{\varepsilon}\varphi(u,x) =$$

$$= \varepsilon^{-3} q(x)\cdot g(x)[\varepsilon^2\gamma(\rho) + \varepsilon^3\gamma(u)\varphi'(u) + \varepsilon^4\theta_g^{\varepsilon}\,\varphi(u,x)](P + \varepsilon P_1) =$$

$$= \varepsilon^{-1}\gamma(\rho)P\varphi'(u) + [\gamma(u)P + \gamma(\rho)P_1]\varphi'(u) + \theta_{GP}^{\varepsilon}\,\varphi(u).$$

Используя соотношения $\gamma(u)P\varphi'(u) = \gamma(u)\varphi'(u)$, $\gamma(\rho)P_1\varphi'(u) = 0$, получаем асимптотическое представление для тест-функции $\varphi(u,x) \in C^3(R^N)$ для первого слагаемого суммы (23):

$$\varepsilon^{-3} q(x)[G^{\varepsilon}(\rho,x) - \mathrm{I}]P^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\gamma(\rho)\varphi'(u) + \gamma(u)\varphi'(u) + \theta_{GP}^{\varepsilon}(\rho,x)\varphi(u). \tag{50}$$

Входящий извне поток требований $\delta^{\varepsilon}(t)$ определяется генератором

$$D^{\varepsilon}(x)\varphi(u)=\varphi(u+\varepsilon^2\delta(x)), \quad \delta(x)=(\delta_k(x),\ k\in\hat{E}),\ x\in E,\ \delta_k(x)=\begin{cases}1, & x\in E_k,\\ 0, & x\notin E_k.\end{cases}$$

Здесь $[D^{\varepsilon}(x)-\mathrm{I}]\varphi(u)=\varphi(u+\varepsilon^2\delta(x))-\varphi(u)=\varepsilon^2\varphi'(u)+\dfrac{\varepsilon^4}{2}\varphi''(u)=\varepsilon^2\delta(x)\varphi'(u)+$ $+\varepsilon^2\theta_D^{\varepsilon}$, где $\delta(x)\varphi'(u)=\sum\limits_{k=1}^{N}\delta_k(x)\varphi_k'(u)$.

Используя (13), имеем

$$P^{\varepsilon}[D^{\varepsilon}(x)-\mathrm{I}]\varphi(u)=\varepsilon^2P\delta(x)\varphi'(u)+\varepsilon^3P_1\delta(x)\varphi'(u)+\theta_d^{\varepsilon}(x)\varphi(u) \qquad (51)$$

со слагаемым, не принимаемым в расчет $|\theta_d^{\varepsilon}(x)\varphi(u)|\to 0$, $\varepsilon\to 0$, $\varphi(u)\in C^3(R^N)$.

Тогда

$$\varepsilon^{-3}q(x)P^{\varepsilon}[D^{\varepsilon}(x)-\mathrm{I}]\varphi(u)=\varepsilon^{-1}q(x)P\delta(x)\varphi'(u)+q(x)P_1\delta(x)\varphi'(u)+\theta_d^{\varepsilon}(x)\varphi(u).$$

Оператор $P$, определенный в (13), и стохастическое ядро $P(x,\boldsymbol{B})$ скоординированы с разбиением фазового пространства, поэтому $P\delta(x)\varphi'(u)=\delta(x)\varphi'(u)$.

В итоге имеем следующий результат:

$$\varepsilon^{-3}q(x)P^{\varepsilon}[D^{\varepsilon}(x)-\mathrm{I}]\varphi(u)=\varepsilon^{-1}q(x)\delta(x)\varphi'(u)+q(x)P_1\delta(x)\varphi'(u)+\theta_d^{\varepsilon}(x)\varphi(u). \qquad (52)$$

Далее, для третьего слагаемого в (23) имеем

$$(G^{\varepsilon}(\rho,x)-\mathrm{I})\,P^{\varepsilon}(D^{\varepsilon}(k)-\mathrm{I})\varphi(u)=\theta_{gd}^{\varepsilon}(\rho,x)\varphi(u), \qquad (53)$$

где $|\theta_{gd}^{\varepsilon}(\rho,x)\varphi(u)|\to 0$, $\varepsilon\to 0$, $\varphi(u)\in C^3(R^N)$.

Подставляя выражения (25), (27)–(28) в (21), получаем

$$\varepsilon^{-3}q(x)[G^{\varepsilon}(\rho,x)P^{\varepsilon}D^{\varepsilon}(x)-P^{\varepsilon}]\varphi(u,x)=$$

$$=\varepsilon^{-3}q(x)[G^{\varepsilon}(\rho,x)-\mathrm{I}]\mathrm{P}^{\varepsilon}+\varepsilon^{-3}q(x)P^{\varepsilon}[D^{\varepsilon}(x)-\mathrm{I}]+$$

$$+\varepsilon^{-3}q(x)[G^{\varepsilon}(\rho,x)-\mathrm{I}]P^{\varepsilon}[D^{\varepsilon}(x)-\mathrm{I}]\varphi(u,x)=\varepsilon^{-1}[\gamma(\rho)P+q(x)\delta(x)]\varphi'(u)+$$

$$+[\gamma(u)+q(x)P_1\delta(x)]\varphi'(u)+\theta_P^{\varepsilon}(x)\varphi(u).$$

Для второго слагаемого в (20) имеем

$$\varepsilon^{-3}q(x)\lfloor G^{\varepsilon}(\rho,x)P^{\varepsilon}D^{\varepsilon}(x)-P^{\varepsilon}\rfloor\varphi(u,x)=\varepsilon^{-1}[\gamma(\rho)P+q(x)\delta(x)]\varphi'(u)+ \qquad (54)$$

$$+[\gamma(u)+q(x)P_1\delta(x)]\varphi'(u)+\theta_P^{\varepsilon}(x)\varphi(u)=[\varepsilon^{-1}C_1(\rho,x)+C_0(u,x)+\theta_P^{\varepsilon}]\varphi(u,x),$$

здесь $C_1(\rho,x)=\gamma(\rho)+q(x)\delta(x)$, $C_0(u,x)=\gamma(\rho)+q(x)P_1\delta(x)$.

Для первого слагаемого в (20) имеем

$$\varepsilon^{-3}q(x)Q^{\varepsilon}\varphi(u,x)=\varepsilon^{-3}q(x)(P^{\varepsilon}-I)\varphi(u,x)=\varepsilon^{-3}q(x)(P+\varepsilon P_1-I)\varphi(u,x)= \qquad (55)$$

$$=\varepsilon^{-3}q(x)(P_1-I)\varphi(u,x)+\varepsilon^{-2}q(x)P_1\varphi(u,x)=\varepsilon^{-3}Q\varphi(x)+\varepsilon^{-2}Q_1\varphi(x).$$

Здесь использовано определение (18).

Подставив соотношения (29), (30) в (20), получим утверждение леммы 2.

**Лемма 3.** Решение задачи сингулярного возмущения для возмущенного оператора

$$\mathrm{L}_0^{\varepsilon}=\varepsilon^{-3}Q+\varepsilon^{-2}Q_1+\varepsilon^{-1}C_1(\rho,x)+C_0(u,x) \tag{56}$$

реализуется на возмущенной тест-функции

$$\varphi^{\varepsilon}(u,x)=\varphi(u)+\varepsilon\varphi_1(u,x)+\varepsilon^2\varphi_2(u,x)+\varepsilon^3\varphi_3(u,x) \tag{57}$$

и представляется соотношением

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u,x)=\mathbf{L}\varphi(u)+\theta_L^{\varepsilon}(x)\varphi(u). \tag{58}$$

Предельный оператор $\mathbf{L}$ определяется формулами

$$\mathbf{L}=\hat{\Pi}\hat{C}_1(r)R_0\hat{C}_1(r)\hat{\Pi}+\hat{\Pi}\hat{C}_0(u)\hat{\Pi}, \tag{59}$$

$$\hat{C}_1(r)=\Pi C_1(\rho,x)\Pi,\ \hat{C}_0(u)=\Pi C_0(u,x)\Pi. \tag{60}$$

**Доказательство леммы 3.** Использовав соотношение (31), получим

$$\mathrm{L}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u,x)=[\varepsilon^{-3}Q+\varepsilon^{-2}Q_1+\varepsilon^{-1}C_1(\rho,x)+C_0(u,x)](\varphi(u)+\varepsilon\varphi_1(u,x)+$$

$$+\varepsilon^2\varphi_2(u,x)+\varepsilon^3\varphi_3(u,x))=$$

$$=\varepsilon^{-3}Q\varphi(u)+\varepsilon^{-2}[Q\varphi_1(u,x)+Q_1\varphi(u)]+\varepsilon^{-1}[Q\varphi_2(u,x)+Q_1\varphi_1(u,x)+C_1(\rho,x)\varphi(u)]+$$

$$+[Q\varphi_3(u,x)+Q_1\varphi_2(u,x)+C_1\varphi_1(u,x)+C_0(u,x)\varphi(u)]+\theta_L^{\varepsilon}.$$

Для выполнения равенства (58) необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$Q\varphi(u)=0; \tag{61}$$

$$Q\varphi_1(u,x)+Q_1\varphi(u)=0; \tag{62}$$

$$Q\varphi_2(u,x)+Q_1\varphi_1(u,x)+C_1(\rho,x)\varphi(u)=0; \tag{63}$$

$$Q\varphi_3(u,x)+Q_1\varphi_2(u,x)+C_1\varphi_1(u,x)+C_0(u,x)\varphi(u)=\mathbf{L}. \tag{64}$$

Из соотношения (61) следует, что $\varphi(u)\in N_Q$. Очевидно, что $Q_1\varphi(u)=0$, т.е. $\varphi(u)\in N_{Q_1}$, тогда из соотношения (59) имеем $Q\varphi_1(u,x)=0$ и соответственно $\varphi_1(u,x)\in N_Q$. Используя тождество $P\varphi(u)=\varphi(u)$, из равенства (38) получим $Q\varphi_2(u,x)+Q_1\varphi_1(u,x)+C_1(\rho,x)P\varphi(u)=0$. Из свойства проектора $\Pi$ имеем равенство

$$\Pi[Q_1\varphi_1(u,x)+C_1(\rho,x)P\varphi(u)]=0, \tag{65}$$

получаем уравнение для определения $\varphi_1(u,x)$:

$$\hat{Q}_1\varphi_1(u,x)+\hat{C}_1(\rho,r)\varphi(u)=0. \tag{66}$$

Решением уравнения (41) является функция

$$\varphi_1(u,x)=R_0\hat{C}_1(\rho,r)\varphi(u). \tag{67}$$

Из равенства (39), используя полученные результаты, имеем утверждение леммы.

Последний шаг в доказательстве теоремы — это вычисление предельного оператора диффузионного процесса $\zeta^0(t)$ по формуле (34):

$$\hat{C}_1(r)\varphi(u) = \hat{C}^*(r)\varphi'(u),\ \hat{C}_0(u)\varphi(u) = \gamma^*(u)\varphi'(u),$$

$$\hat{C}(r) = \gamma(\rho) + \hat{\Lambda}(r),\ \Lambda = (\Lambda_k(r), k \in \hat{E}),\ \Lambda_k(r) = q_k\delta_k(r).$$

Используя формулу (34), имеем

$$\hat{B} = \hat{\Pi}\hat{C}(r)\hat{R}_0\hat{C}(r)\hat{\Pi} = \hat{\Pi}(\hat{\Lambda}(r)\hat{R}_0\hat{\Lambda}(r))\hat{\Pi} =$$

$$= \hat{\Pi}(q_k\delta_k(r)\hat{R}^0_{rr'}q_{k'}\delta_{k'}(r'))\hat{\Pi} = \hat{\Pi}q_k\ \hat{R}^0_{kk'}\ q_{k'}\hat{\Pi} =$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{\pi}_k q_{\hat{k}} R^0_{kk'} q_{k'} + \hat{\pi}_{k'} q_{k'} \hat{R}^0_{k'k} q_k].$$

Легко получить следующий результат:

$$\Pi C_1(\rho, x) = \gamma(\rho) + \Pi q(x)\delta(x) = \gamma(x) + \Lambda(r), \quad \Lambda(r) = (q_k\delta_k(r),\ k \in \hat{E}),\ r \in \hat{E}.$$

И окончательно $\hat{\Pi}\Lambda(r) = \left(\sum_{r=1}^{N} \pi_r q_k \delta_k(r),\ k \in \hat{E}\right) = (\hat{\pi}_k q_k, k \in \hat{E}) = \lambda.$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. — Singapur: World Scientific., 2005. — 331 p.
2. Анисимов В.В., Лебедев Е.О. Стохастические системы обслуживания. Марковские модели. — Киев: Либідь,1992. — 208 с.
3. Лебєдєв Е.О., Чечельницький А.А. Одна гранична теорема для мереж типу $[SM|M|\infty]^r$ // Доп. НАН України. — 1993. — № 10. — С. 31–33.
4. Mamonova G., Griza J. Queuing system evolution in phase merging scheme // Бюллетень АН Республики Молдова. — 2008. — № 3(58). — С. 83–88.
5. Мамонова Г.В. Експлуатаційна система обслуговування у схемі дифузійної апроксимації // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2005. — № 3. — С. 333–337.
6. Korolyuk V.S. Stochastic models of systems. — Dordrecht: Kluwer, 1999. — 197 p.
7. Мамонова А.В. Суперпозиция процессов марковского восстановления в стационарном фазовом укрупнении // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 5. — С. 119–135.
8. Лебедев Е.А. Сети обслуживания с многоканальными узлами и рекуррентным входным потоком // Там же. — 2001. — № 4. — С. 48–52.


*Поступила 19.08.2008*