

## РЕШЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ ШАРАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

**Ключевые слова:** оптимальное покрытие, минимальный радиус покрывающих шаров, оптимальное разбиение, метрика, диаграмма Дирихле-Вороного,  $r$ -алгоритм Шора.

### ВВЕДЕНИЕ

Решения многих экономических и технических проблем могут быть получены как решение задачи об оптимальном покрытии множества (о минимальном радиусе покрытия множества, о минимальном количестве шаров заданного радиуса). Примерами могут быть следующие задачи: размещение станций сотовой связи в случае, когда необходимо определить минимально допустимый радиус действия станций связи при их фиксированном количестве; размещение и определение необходимого количества станций сотовой связи с заданным радиусом действия; определение минимально возможного радиуса разброса воды поливальной установкой с размещением заданного количества этих установок на участке полива; построение сети искусственных спутников Земли, предназначенных для контроля диапазона круговых орбит [1]; выбор оптимальной мощности двигательных установок малой тяги [2] и многие другие. Примерами теоретических задач, сводящихся к задачам оптимального покрытия, являются задачи восстановления функций, глобальной оптимизации, построения оптимальных квадратур [3].

В настоящей статье предложен и обоснован метод решения задачи об оптимальном  $c$ -шаровом покрытии выпуклого множества из евклидова пространства  $E_n$  с произвольной метрикой на основе теории оптимального разбиения множеств. Разработан алгоритм решения названной задачи, составной частью которого является одна из модификаций  $r$ -алгоритма Шора [12]. Предложенный алгоритм может использоваться и для решения задач покрытия невыпуклых множеств, дискретных множеств, а также множеств, точки которых имеют различный вес. Приведены результаты численных экспериментов для ряда модельных задач оптимального шарового покрытия.

### 1. ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ

Проведем сравнительный анализ известных методов решения некоторых задач оптимального покрытия, наиболее близких в своих постановках к задачам, изложенным авторами данной статьи. Приведем некоторые понятия, необходимые при рассмотрении непрерывных задач о покрытии множеств.

Пусть  $\Omega$  — ограниченное, замкнутое, измеримое по Лебегу множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ . Будем называть  $c$ -шаром радиуса  $R$  с центром в точке  $\tau_i$  из  $E_n$  множество вида  $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq R\}$ , где  $c(x, \tau_i)$  — некоторая квазиметрика [3]. При этом совокупность центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  задает шаровое покрытие множества  $\Omega$  с радиусом  $R$ , если

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tau_i, R).$$

Ясно, что радиус  $R$  покрытия множества  $\Omega$ , задаваемого центрами  $\tau_1, \dots, \tau_N$  (вектором  $\tau^N$ ), имеет вид

$$R(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (1)$$

где  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N = E_n^N$  (либо, в частном случае,  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$ ).

Очевидно, что покрытие множества  $\Omega$ , задаваемого вектором  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ , с радиусом  $R(\tau^N)$ , определяемым по формуле (1), является минимальным  $c$ -шаровым покрытием, генерируемым вектором  $\tau^N$ , т.е. никакие  $c$ -шары меньшего радиуса с центрами в  $\tau_1, \dots, \tau_N$  не покрывают  $\Omega$  [3, 4]. Покрытие минимального радиуса назовем оптимальным.

Таким образом, для отыскания оптимального покрытия необходимо найти величину

$$R(\tau^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i),$$

называемую радиусом оптимального покрытия, и вектор  $\tau_*^N = (\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N})$ , при которых достигается значение, равное нижней грани.

Рассмотрим некоторые постановки непрерывных задач о  $c$ -шаровом покрытии, следуя [1, 3, 4].

**Задача 1** (центры фиксированы). Для заданной системы центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  из  $E_n^N$  (либо из  $\Omega^N$ ) найти минимальное  $c$ -шаровое покрытие множества  $\Omega$ , т.е. найти величину (1).

Рассмотрим теперь более сложную задачу об оптимальном покрытии, в которой в отличие от задачи 1 центры  $\tau_1, \dots, \tau_N$  не фиксированы, а должны разместиться во множестве  $\Omega$  так, чтобы получить покрытие минимального радиуса (т.е. оптимальное покрытие).

**Задача 2** (об оптимальном ограниченном  $c$ -шаровом покрытии). При заданном числе  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  найти их размещение в области множества  $\Omega$ , осуществляющее покрытие этого множества с минимальным радиусом, т.е. найти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \quad (2)$$

и вектор  $\tau_*^N = (\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}) \in \Omega^N \subset E_n^N$ , при которых в (2) достигается значение, равное нижней грани.

Заметим, что если  $\Omega$  — компактное множество, а квазиметрика  $c(x, \tau_i)$  — непрерывна, то оптимальное покрытие множества  $\Omega$  заданным числом  $N$   $c$ -шаров одинакового радиуса существует [1].

Сформулируем теперь задачу об оптимальном покрытии, отличающуюся от задачи 2 тем, что центры  $\tau_1, \dots, \tau_N$  могут размещаться не во множестве  $\Omega$ , а во всем пространстве  $E_n$ .

**Задача 3** (об оптимальном  $c$ -шаровом покрытии). При заданном числе  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  найти их размещение в  $E_n$ , осуществляющее покрытие множества  $\Omega$  с минимальным радиусом, т.е. найти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N \in E_n^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \quad (3)$$

и вектор  $\tau_*^N = (\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}) \in E_n^N$ , при которых в (3) достигается значение, равное нижней грани.

Заметим, что обобщением задач 2 и 3 является задача об оптимальном покрытии, в которой каждый (или все) из центров  $\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N$  может размещаться в соответствующем множестве  $T_i$  (выпуклом, замкнутом, ограниченном) из  $E_n$ , не обязательно совпадающем с подмножеством  $\Omega_i$ .

И, наконец, сформулируем задачу о покрытии, отличающуюся от первых трех задач тем, что число  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  заранее не задано.

**Задача 4** (об отыскании минимальной по числу совокупности центров покрытия). При заданном радиусе покрытия  $R$  найти минимальную по числу  $N$  совокупность центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , генерирующую покрытие компактного множества  $\Omega$ .

Рассмотренные выше задачи об оптимальном покрытии множества конечной системой подмножеств начали интенсивно изучаться в 60-е годы XX века и до настоящего времени продолжают привлекать внимание с научной и практической точек зрения [1–3, 5–10].

Так, в работе [1] приводятся наиболее распространенные постановки задачи оптимального покрытия множества (задачи 1, 2, 4). Здесь же доказываем, что первые две задачи всегда имеют решение, а задача 4 разрешима не всегда, и в ряде случаев обычно достаточно ограничиться решением задачи 2. Также в этой работе приводится общая схема алгоритма решения задачи 2. Для случая, когда покрывается отрезок числовой оси, а множество центров — замкнутая ограниченная область евклидова пространства, формулируются условия относительного (локально) минимума. Приводятся примеры решения модельных задач, сводящихся к покрытию отрезка числовой оси. В работе [9] сформулированные в [1] основы теории оптимальных покрытий применяются к решению практической задачи выбора установки космического аппарата малой тяги. В [10] решается уже задача выбора двигательной установки малой тяги, оптимальной для двумерного диапазона параметров, где покрываемое множество является прямоугольником.

В работе [2] детально рассматривается алгоритм решения задачи 2 для случая, когда покрываемой областью и областью возможного расположения центров являются две замкнутые, ограниченные области плоскости  $X$  и  $Y$  соответственно. Основная идея предложенного алгоритма заключается в том, что для области  $X$  по начальной системе центров  $y_1^0, \dots, y_n^0$  строится покрытие Дирихле–Вороного. Выбирается улучшаемый центр и заменяется неулучшаемым центром, после чего происходит переход на новую итерацию. Работа алгоритма окончена в том случае, если все центры неулучшаемы. Выбор улучшаемого центра требует определения характерных точек в области Дирихле, при этом возникает необходимость в решении на каждой итерации трех нелинейных уравнений и одной экстремальной задачи. Доказана сходимость предложенного алгоритма. Авторы утверждают, что, несмотря на многоэкстремальность решаемой задачи, предложенный ими алгоритм во многих случаях находит глобальный минимум. Однако в общем случае алгоритм гарантирует получение только локальных минимумов задачи. Результаты решения задачи нахождения оптимального покрытия шарами минимального радиуса представлены лишь для единичного квадрата, и реализация алгоритма существенно зависит от формы покрываемой области.

В работе [6], в отличие от [1, 2, 9, 10], формулируется задача оптимального покрытия точками компактного связного множества из  $E_n$  и предлагаются пути ее решения. Математически целевой функционал задачи оптимального покрытия в данном случае определяется как некоторая штрафная функция, взвешенная с помощью функции статистического распределения. Подробно рассматривается упрощенный вариант задачи, где множеством  $X$  считается отрезок действительной прямой. На примере этой задачи показано, что целевая функция может иметь множество точек локальных минимумов, которые часто сложно отделить от минимумов глобальных. Для решения задачи на плоскости предлагается вариация алгоритма скорейшего спуска, где в качестве направления спуска выбирается разность между текущим вектором точек покрытия и вектором соответствующих им центров тяжести разбиения Дирихле–Вороного. Для избавления от «ловушки локальности» предлагается стохастический алгоритм. Приводится сравнительный анализ стохастического и детерминистического подходов. Автор утверждает, что в ряде случаев первый подход дает лучший результат и его более целесообразно использовать. Однако в других

случаях результаты практически одинаковы, и экономически более выгодно применять детерминистический подход.

Предложенный в [6] алгоритм интересен тем, что он учитывает вес точек исходной области и для него описан метод избавления от «ловушки локальности». Однако такой подход также имеет ряд особенностей:

- решение задачи покрытия приводится развернуто лишь для случая, когда функция штрафа является евклидовой метрикой;
- необходимое условие существования центра тяжести дается лишь для случая, когда функция штрафа — евклидова метрика;
- в задаче не ставится цель минимизировать радиус возможного покрытия, находятся только положения центров тяжести;
- не дается четкого критерия выбора конкретного алгоритма: детерминистического или стохастического; приводятся лишь общие рекомендации.

В работе [4] рассматривается непрерывная задача покрытия множества как задача квазидифференцируемой оптимизации в  $R_n$  и приводится алгоритм ее решения для случая  $R_2$ . Проведены исследования конечного шарового покрытия компактных множеств. Кроме того, показано, что сформулированная выше задача о конечном шаровом покрытии может рассматриваться как задача квазидифференцируемой оптимизации, исследованы свойства этой задачи, а также предлагается алгоритм решения ограниченной задачи о конечном шаровом покрытии на классе компактных подмножеств из  $R_2$ . Следует отметить, что предложенный в [4] алгоритм находит стационарные точки. Как и в [2], круг его действия ограничен формой покрываемого множества, что делает практически невозможным разработку универсального программного обеспечения, предназначенного для решения задач о покрытии произвольного множества.

В работах [5, 11] проведен сравнительный анализ задачи о минимальном радиусе покрытия множества и задачи об оптимальном разбиении множества. Показано, что в общем случае алгоритмы оптимального разбиения множеств не всегда дают глобальное решение задачи об оптимальном покрытии шарами минимального радиуса. Однако, несмотря на это, представляется оправданным и целесообразным использование этих достаточно развитых и универсальных алгоритмов оптимального разбиения для решения задач оптимального покрытия.

В работе [8] предлагается математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами с учетом погрешностей исходных данных в интервальном виде. Для построения математической модели задачи используется класс интервальных функций точечных множеств интервального пространства  $I_s^2 R$ , однако пока не предлагается метод ее решения.

В работе [7] рассмотрен метод решения задачи покрытия многоугольной области  $P$  минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса. От этой задачи авторы переходят к последовательности задач покрытия области заданным количеством кругов минимального радиуса. Для характеристики степени покрытия области шарами заданного радиуса строится функция специального вида

$$\Phi(v, u) = \Phi(x, y, u) = \min \{ \varphi_1(v, u_1), \dots, \varphi_k(v, u_k) \},$$

где  $\varphi_i(v, u_i) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $v, u_i \in P$ ,  $u = (u_1, \dots, u_k)$  — множество точек центров.

Если  $F(v) = \max_{u \in P} \Phi(v, u^*) \leq 0$  для некоторого  $u = u^*$ , то исходная задача решена.

В процессе отыскания локальных максимумов этой функции решается еще одна вспомогательная задача, для которой требуется выбор некоторого параметра, но четких рекомендаций по его выбору не приводится. Дан общий алгоритм решения вспомогательной задачи, на каждом шаге которого по текущим координатам цен-

тров строятся многоугольники Дирихле–Вороного, проверяется условие  $\max_{v \in B} F(v) = 0$ . Полученное в результате работы алгоритма решение может оказаться точкой локального минимума, не строго локального минимума или седловой точкой. Для определения вида точки требуется решить вспомогательную задачу оптимизации, что обуславливает дополнительные вычислительные сложности.

Отметим следующие особенности алгоритма, рассмотренного в [7]:

- предложенный метод покрытия применим лишь для многоугольных областей, принадлежащих  $R_2$ ;
- задача покрытия области шарами заданного радиуса сводится к последовательности задач покрытия области шарами минимального радиуса;
- в ходе работы алгоритма возникает дополнительная задача оптимизации, что увеличивает сложность алгоритма.

Как следует из приведенного выше обзора методов решения непрерывных задач об оптимальном покрытии множеств, представленных в работах [1, 2, 9–14], эти методы не являются универсальными, поскольку каждый из них обладает некоторыми особенностями их использования, а именно:

- реализация существенно зависит от вида множества и пространства, в которых задано это множество [4, 7, 8];
- практически неприменимы для решения задач покрытия множеств из пространства с размерностью выше двух [1, 2, 4, 6–10];
- на промежуточных итерациях требуется решение вспомогательной задачи оптимизации, что обуславливает дополнительные вычислительные трудности [1, 2, 7, 9, 10];
- на каждой итерации улучшается положение только одного центра шара из совокупности покрывающих шаров [1, 2, 9, 10];
- решения тестовых задач (примеров) получены только для евклидовой метрики [1, 2, 4, 6–10].

Таким образом, проведенный выше анализ подтверждает необходимость разработки методов решения непрерывных задач об оптимальном покрытии множеств, применимых для множеств произвольной структуры, принадлежащих пространству  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , с произвольной метрикой.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем непрерывную задачу об оптимальном  $c$ -шаровом покрытии множества из  $E_n$  в следующем виде.

Пусть  $\Omega$  — компактное (ограниченное, замкнутое), измеримое по Лебегу множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ . При заданном числе  $N$  центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  найти их размещение в области множества  $\Omega$ , осуществляющее  $c$ -шаровое покрытие этого множества с минимальным радиусом, т.е. найти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \quad (4)$$

и вектор  $\tau_*^N = (\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}) \in \Omega^N \subset E_n^N$ , при которых в (4) достигается значение, равное нижней грани. Здесь функция  $c(x, \tau_i)$  определяется как одна из метрик:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2} \quad \text{— евклидова,} \quad (5)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j| \quad \text{— манхэттенская,} \quad (6)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{j=1, \dots, N} \{|x^j - \tau_i^j|\} \quad \text{— Чебышева.} \quad (7)$$

Поскольку, как отмечалось в [1], для компактного множества  $\Omega$  из  $E_n$  и непрерывной функции  $c(x, \tau_i)$  оптимальное покрытие множества  $\Omega$  заданным числом  $N$   $c$ -шаров одинакового радиуса существует, то задачу (4) можно переписать следующим образом:

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}. \quad (8)$$

Отметим некоторые свойства функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  для случая евклидовой нормы  $c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_{E_n}$ . Легко показать, что функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  — непрерывна и ограничена на  $\Omega^N$  и эта функция из (8) является липшицевой на  $\Omega^N$ , т.е. выполняется неравенство

$$|\max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) - \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \bar{\tau}_i)| \leq L \|\tau^N - \bar{\tau}^N\|_{E_n^N},$$

где  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ ,  $L > 0$  — константа Липшица, не зависящая от выбора точек  $\tau^N$  и  $\bar{\tau}^N$  из  $\Omega^N$ . Доказательство этого утверждения можно найти в работе [4]. Поскольку функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  удовлетворяет условию Липшица, то она почти всюду дифференцируема [12], поэтому в дальнейшем правомерно говорить о почти или обобщенных градиентах этой функции. Отметим также, что функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (8) не является выпуклой на  $\Omega^N$  [13].

Многоэкстремальная функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  в зависимости от вида множества  $\Omega$  может обладать (с точностью до перенумерации центров) конечным или бесконечным числом глобальных минимумов, а также может иметь локальные минимумы.

Как доказано в [4], для непустого компактного множества  $\Omega \subset E_n$  и  $\tau_i \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, N$ , справедливо равенство

$$R(\tau^N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) = \max_{i=1, \dots, N} \max_{x \in \Omega_i} c(x, \tau_i), \quad (9)$$

где множества  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , составляют диаграмму Дирихле–Вороноя для множества  $\Omega$ , т.е.

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : c(x, \tau_i) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j)\} \text{ и } \Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i,$$

причем множества  $\Omega_i$  — компактны для всех  $i = 1, \dots, N$ . Заметим, что множество  $\Omega_i$  определяется точкой  $\tau_i$ , поэтому  $\Omega_i$  можно записывать как  $\Omega(\tau_i)$ .

Из [4] следует также, что если  $A$  — непустое компактное множество из  $E_n$ , то для любых  $y \in E_n$  имеет место

$$y_0 = \sup_{x \in A} \|y - x\|_{E_n} = \sup_{x \in \text{co}(A)} \|y - x\|_{E_n},$$

где  $\text{co}(A)$  — выпуклая оболочка множества  $A$ .

Обозначим  $T$  фиксированное разбиение непустого компактного множества  $\Omega$  на  $N$  непересекающихся подмножеств  $T_1, \dots, T_N$ , т.е.  $\bigcup_{i=1}^N T_i = \Omega$ ,  $T_i \cap T_j = \emptyset$ ,

$i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $T_i$  — непустые, компактные подмножества. Для каждого  $i = 1, \dots, N$  введем функции

$$\sigma_i(\tau^N) = \max_{x \in T_i} c(x, \tau_i). \quad (10)$$

Поскольку в (10) функции  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , определены на  $T_i \times E_n$ , непрерывны по  $x$  и выпуклы по  $\tau_i$  на  $E_n$  (либо на открытом выпуклом множестве из  $E_n$ ) при любом  $x \in T_i$ , то согласно теореме 1.9 из [14] функции  $\sigma_i(\tau^N)$  из (10)

выпуклы по  $\tau_i$  на  $E_n^N$  и субградиентное множество  $G_{\sigma_i^T}(\tau_0^N)$  в точке  $\tau_0^N$  функции (10) вычисляется по формуле

$$G_{\sigma_i^T}(\tau_0^N) = \overline{\text{co}} \bigcup_{x \in I(\tau_0^N)} G_{c(x, \tau_i)}(\tau_0^N), \quad (11)$$

где  $I(\tau_0^N) = \{x : x \in T_i; c(x, \tau_i) = \sigma_i^T(\tau_0^N)\}$ ,  $G_{c(x, \tau_i)}(\tau_0^N)$  — субдифференциал функции  $c(x, \tau_i)$  по  $\tau_i$  на  $E_n$  при данном  $x \in T_i$ . Субградиентное множество  $G_{\sigma_i^T}(\tau_0^N)$  непустое, выпуклое, компактное.

Таким образом, из выпуклости функций  $\sigma_i(\tau^N)$  на  $E_n^N$  и равенства (9) следует, что значением целевой функции задачи (8) является максимальное значение из решений конечного числа выпуклых оптимизационных задач.

**Замечание 1.** Отметим, что в формуле (11)  $T_i$  —  $i$ -е подмножество фиксированного разбиения множества  $\Omega$ . Однако если разбиение множества  $\Omega$  на подмножества не фиксировано и неизвестно заранее положение точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , генерирующих оптимальное покрытие множества  $\Omega$ , а значит и соответствующее разбиение Дирихле–Вороного, то функция  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (8) не является, как отмечалось выше, выпуклой на  $\Omega^N$  вследствие невыпуклости по  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  на  $\Omega^N$  функции  $r(x, \tau^N) = \min_{j=1, \dots, N} c(x, \tau_j)$ . Но хотя функция  $r(x, \tau^N)$  не является выпуклой по  $\tau^N$  при любом фиксированном  $x \in \Omega$ , она состоит из выпуклых участков, отвечающих локальным минимумам функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ , а, как известно [12], для невыпуклых кусочно-гладких функций почти-градиент совпадает с субградиентом к одному из примыкающих к данной точке выпуклых участков.

Далее приведем лемму, следуя [4], которая дает возможность генерировать монотонно убывающую последовательность значений целевой функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (8) об оптимальном покрытии множества  $\Omega$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\Omega$  — компактное множество из  $E_n$  и

$$R(\tau^N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i). \quad (12)$$

Если центры  $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N$  выбрать из условия

$$\max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tilde{\tau}_i) = \min_{\tau_i \in \text{co}\Omega(\tau_i)} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i=1, \dots, N, \quad (13)$$

то  $R(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N) \leq R(\tau_1, \dots, \tau_N)$ . (Здесь центр  $\tilde{\tau}_i$  задает шар, покрывающий  $\Omega(\tau_i)$  с минимальным радиусом.)

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} R(\tau_1, \dots, \tau_N) &= \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \stackrel{(9)}{=} \max_{i=1, \dots, N} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i) \stackrel{(13)}{\geq} \\ &\stackrel{(13)}{\geq} \max_{i=1, \dots, N} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tilde{\tau}_i) \geq \max_{i=1, \dots, N} \max_{x \in \Omega(\tilde{\tau}_i)} c(x, \tilde{\tau}_i) = \\ &= \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tilde{\tau}_i) = R(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N). \end{aligned} \quad (14)$$

Для проверки выполнения второго неравенства в (14) заметим, что

$$\Omega(\tau_i) \subseteq \text{co}(\Omega_i) \subseteq B(\tilde{\tau}_i, \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tilde{\tau}_i)),$$

где  $B(\tilde{\tau}_i, \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tilde{\tau}_i))$  — шар с центром в  $\tilde{\tau}_i$  и радиусом  $\max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tilde{\tau}_i)$ .

Поэтому

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega(\tau_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tilde{\tau}_i, \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tilde{\tau}_i)).$$

Отсюда следует, что  $B(\tilde{\tau}_i, \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tilde{\tau}_i))_{i=1, \dots, N}$  — шаровое покрытие множества  $\Omega$ , генерируемое вектором  $\tilde{\tau}^N = (\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N)$ , и согласно [4] оно является минимальным шаровым покрытием, которое допускает вектор  $\tilde{\tau}^N = (\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N)$ .

Лемма доказана.

### 3. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ МНОЖЕСТВА ШАРАМИ МИНИМАЛЬНОГО РАДИУСА

Для решения задачи (8) об оптимальном покрытии, т.е. для отыскания координат центров  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$  и значения радиуса покрытия  $R(\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N})$ , минимизирующих целевую функцию

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (15)$$

при условии

$$(\tau_1, \dots, \tau_N) \in (\text{co}\Omega)^N \quad (16)$$

необходимо согласно лемме 1 минимизировать по  $\tau_i, i=1, \dots, N$ , на множестве  $\text{co}\Omega(\tau_i)$  функции

$$R_i(\tau_i) = \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i=1, \dots, N. \quad (17)$$

Минимизация на множестве  $\text{co}\Omega(\tau_i)$  допустима, так как

$$\text{co}\Omega(\tau) = \text{co} \bigcup_{i=1}^N \Omega(\tau_i) \supseteq \bigcup_{i=1}^N \text{co}\Omega(\tau_i).$$

Поскольку функции  $R_i(\tau_i)$  из (17) недифференцируемы, для решения задачи (15), (16) будем использовать один из вариантов метода обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов ( $r$ -алгоритм Шора [12]).

Согласно (11) и замечанию 1  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента

$$g_R(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (18)$$

функции  $R(\tau^N)$  из (8) в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  является элементом субградиентного множества функции  $R_i, i=1, \dots, N$ , из (17) в точке  $\tau_i$ , которое имеет вид

$$G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N) = \text{co} \{g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}_i); \bar{x}_i : \|\bar{x}_i - \tau_i\| = \max_{x \in \Omega(\tau_i)} \|x - \tau_i\|\} \quad (19)$$

где  $g_c^{\tau_i}(\tau^N, \bar{x}_i)$  — обобщенный градиент функции  $c(\bar{x}, \tau_i)$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ , а  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ .

Перейдем от задачи условной минимизации (15), (16) по  $\tau^N$  на множестве  $(\text{co}\Omega)^N$  к задаче безусловной минимизации по  $\tau^N$  на  $E_n^N$  с помощью введения в целевую функцию (15) негладкой штрафной функции множества  $\text{co}\Omega$ .

Если  $\text{co}\Omega = \{x \in E_n : \omega(x) \leq 0\}$ , где  $\omega(x)$  — функция, задающая границу области  $\text{co}\Omega$ , то негладкую штрафную функцию  $H$  для задачи (15), (16) можно ввести следующим образом:

$$H(\tau_1, \dots, \tau_N) = S \sum_{i=1}^N \max\{0, \omega(\tau_i)\}, \quad (20)$$

здесь  $S$  — коэффициент штрафа (достаточно большое положительное число).



Таким образом, от задачи условной минимизации (15), (16) переходим к следующей задаче безусловной минимизации:

$$\bar{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = R(\tau_1, \dots, \tau_N) + H(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in E_n^N}, \quad (21)$$

где  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  имеет вид (15),  $H(\tau_1, \dots, \tau_N)$  имеет вид (20).

Обобщенный градиент функции  $\bar{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$  в точке  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  задается формулой

$$g_{\bar{R}}(\tau_1, \dots, \tau_N) = g_R(\tau_1, \dots, \tau_N) + g_H(\tau_1, \dots, \tau_N). \quad (22)$$

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи (15), (16) об оптимальном покрытии множества  $\Omega$  из  $E_n$ . Для этого область  $\Omega$  заключим в  $n$ -мерный параллелепипед  $\Pi$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, вводя вспомогательную функцию  $\rho(x)$ , определенную на  $\Pi$ , такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда в задаче (15), (16) под функцией  $c(x, \tau_i)$  будем понимать функцию  $c(x, \tau_i) \cdot \rho(x)$ , определенную на  $\Pi$  и совпадающую с  $c(x, \tau_i)$  на  $\Omega$ , что дает возможность применять этот алгоритм для решения задачи о покрытии даже для невыпуклых областей. В алгоритме вектор  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  для упрощения обозначим через  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ .

#### АЛГОРИТМ

**Предварительный этап.** Параллелепипед  $\Pi$  покрываем прямоугольной сеткой с шагом  $\Delta h_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , и задаем начальное положение центров покрытия  $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ . Строим по этим центрам разбиение Дирихле–Вороного  $\{\Omega(\tau_1^{(0)}), \dots, \Omega(\tau_N^{(0)})\}$ , используя алгоритм решения задачи оптимального разбиения множеств (ОРМ) без ограничений с заданным положением центров подмножеств, описанный в [13].

Для каждого подмножества  $\Omega(\tau_i^{(0)})$ ,  $i=1, \dots, N$ , находим перебором на сетке все наиболее удаленные точки  $\bar{x}_i^{(0)}$  от соответствующего центра  $\tau_i^{(0)}$ ,  $i=1, \dots, N$ . С помощью этих точек по формуле (22) вычисляем вектор-градиент  $g_{\bar{R}}(\tau_1, \dots, \tau_N)$  в точке  $\tau^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $r$ -алгоритма  $h_0 > 0$ .

**Первый шаг.** Используя формулу

$$\tau^1 = P_{\text{co}\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 g_{\bar{R}}(\tau^{(0)})),$$

где  $P_{\text{co}\Omega}$  — оператор проектирования на  $\text{co}\Omega$ , определим центры покрытия.

Переходим к следующему шагу.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получен вектор  $\tau^{(k)} = (\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)})$ .

**( $k+1$ )-й шаг.** 1. По центрам  $\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_N^{(k)}$  с помощью алгоритма 3.1 из [13] строим разбиение Дирихле–Вороного  $\{\Omega(\tau_i^{(k)}), i=1, \dots, N\}$ . Для каждого множества  $\Omega(\tau_i^{(k)})$ ,  $i=1, \dots, N$ , находим перебором на сетке все наиболее удаленные точки  $\bar{x}_i^{(k)}$  от соответствующего центра  $\tau_i^{(k)}$ .

2. Вычисляем значения  $g_{\bar{R}}(\tau)$  по формуле (22) при  $\tau = \tau^{(k)}$ .

3. Выполняем  $(k+1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма в  $H$ -форме (более подробное его описа-

ние приводится в [12]), итерационная формула которого имеет вид

$$\tau^{(k+1)} = P_{\text{co}\Omega} \left( \tau^{(k)} - h_k \frac{H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}), g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}} \right),$$

где  $H_{k+1}$  — матрица растяжения пространства с коэффициентом  $\alpha$  (его целесообразно брать равным трем) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{k+1} = H_k + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)}, \quad \Delta_k = g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}) - g_{\bar{R}}(\tau^{(k-1)}).$$

Если ввиду округлений счета матрица  $H_{k+1}$  перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг  $h_k$  выбираем из условия минимума по направлению спуска [15]:

$$\min_{h>0} \left[ \bar{R} \left( \tau^{(k)} - h \frac{H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_{\bar{R}}(\tau^{(k)}), g_{\bar{R}}(\tau^{(k)})}} \right) \right].$$

Если условие

$$\|\tau^{k+1} - \tau^k\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (23)$$

не выполняется, переходим к  $(k+2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае — к п. 4.

4. Полагаем  $\tau_* = \tau^{(l)}$ , где  $l$  — номер итерации, на которой выполнилось условие (23) завершения работы алгоритма.

5. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле

$$R(\tau) = \max_{i=1, 2, \dots, N} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i)$$

при  $\tau = \tau_*$ .

Алгоритм описан.

**Замечание 1** (к алгоритму). Описанный алгоритм ввиду невыпуклости целевой функции  $R(\tau_1, \dots, \tau_N)$  задачи (8) приводит в пределе к системе центров  $\tau_*^N = (\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N})$ , являющейся, вообще говоря, точкой локального минимума этой функции.

**Замечание 2** (к алгоритму). Сходство и различие непрерывных задач оптимального  $c$ -покрытия и оптимального разбиения множеств были исследованы в работе [5]. Для покрытия множества  $\Omega$ , генерируемого вектором  $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ , можно использовать оптимальное решение задачи ОРМ с фиксированными центрами  $\tau_1, \dots, \tau_N$  (алгоритм ОРМ с фиксированными центрами), являющееся разбиением Дирихле–Вороного. Поэтому на каждой итерации разработанного алгоритма оптимального покрытия множества  $\Omega$  используется алгоритм 3.1 оптимального разбиения этого множества при заданных координатах центров подмножеств  $\tau_1, \dots, \tau_N$  из [13].

Несмотря на то, что задачи оптимального покрытия и оптимального разбиения различны, имеют место частные случаи, когда центры оптимального покрытия совпадают с центрами оптимального разбиения.

Так, например, если метрика имеет вид

$$c(x, \tau_i) = \max\{|x^{(1)} - \tau_i^{(1)}|, |x^{(2)} - \tau_i^{(2)}|\},$$

то диаграмма Дирихле–Вороного является одновременно глобальным оптимальным решением для обеих задач.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО $c$ -ПОКРЫТИЯ

Для исследования эффективности алгоритма оптимального  $c$ -шарового покрытия были проведены многочисленные вычислительные эксперименты по покрытию  $c$ -шарами выпуклого множества  $\Omega \in E_2$ .

В программной реализации алгоритма в каждой из трех метрик (5)–(7) следующие параметры либо заданы пользователем, либо заданы по умолчанию в алгоритме:

- $\varepsilon$  — точность вычислений (используется в условии останова  $r$ -алгоритма Шора, по умолчанию:  $\varepsilon = 0,0001$ );
- $h_0$  — начальный пробный шаг  $r$ -алгоритма Шора (по умолчанию:  $h_0 = 1$ );
- $M$  — количество узлов сетки, аппроксимирующей множество  $\Omega$ , по каждой координатной оси (по умолчанию:  $M = 100$ );
- $N$  — число покрывающих  $c$ -шаров;
- $\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)}$  — начальное положение оптимальных центров покрытия (по умолчанию: начальное положение для всех центров покрытия — начало координат).

**4.1. Результаты численных экспериментов по  $c$ -покрытию единичного квадрата с евклидовой метрикой.** Опишем и проанализируем результаты экспериментов по покрытию единичного квадрата из  $E_2$  с евклидовой метрикой

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}. \quad (24)$$

В табл. 1 приведены численные значения минимальных радиусов оптимальных решений задачи (8) для соответствующих значений  $N = 2, \dots, 15$ , полученные алгоритмом, и радиусами, полученными геометрически. Результаты, полученные алгоритмом, согласуются с результатами, описанными в работах [1, 2]. Заметим, что авторам этих работ удалось получить решения только для  $N \leq 15$ . На рис. 1 изображено оптимальное покрытие единичного квадрата с радиусом покрытия  $R(\tau_*) = 0,0687$ , полученное предложенным авторами алгоритмом для  $N = 100$  на сетке  $200 \times 200$  с начальным шагом 0,2.

**Таблица 1**

$N$	Численные значения минимального радиуса		$N$	Численные значения минимального радиуса	
	полученного алгоритмом	полученного геометрически		полученного алгоритмом	полученного геометрически
2	0,5599	0,5590	9	0,2339	0,2357
3	0,5033	0,5038	10	0,2186	0,2221
4	0,3536	0,3536	11	0,2125	0,2125
5	0,3266	0,3260	12	0,2068	0,2082
6	0,3001	0,3005	13	0,1956	0,1966
7	0,2596	0,2750	14	0,1859	0,1912
8	0,2596	0,2612	15	0,1807	0,1852

Как правило, в результате экспериментов алгоритм приводил к глобальному оптимальному решению задачи (8) об оптимальном покрытии. Это можно увидеть в табл. 1, сравнивая оптимальные значения радиусов покрытия  $R(\tau_*)$ , полученных алгоритмом, с радиусами  $R_*$ , полученными геометрически, хотя (крайне редко) имели место эксперименты, приводящие к локальному минимуму задачи (8).

Проведенные вычислительные эксперименты позволят также сделать вывод о том, что ввиду высокой точности  $r$ -алгоритма погрешность решения рассматрива-

емой задачи обуславливается в основном погрешностью, получаемой вследствие выбранной величины шага сетки. При этом точное значение минимального радиуса покрытия  $R_*$  находится на отрезке  $[R(\tau_*) - \Delta; R(\tau_*) + \Delta]$ , где  $R(\tau_*)$  — значение минимального радиуса, полученное на заданной сетке;  $\Delta$  — погрешность расчета радиуса, полученная за счет дискретизации множества  $\Omega$  и вычисленная по формуле  $\Delta = \frac{\sqrt{\Delta h_x^2 + \Delta h_y^2}}{2}$ . Здесь  $\Delta h_x$ ,

$\Delta h_y$  — шаги сетки, которая использовалась для получения диаграммы Дирихле–Вороное по осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

**4.2. Результаты численных экспериментов по  $c$ -покрытию единичного квадрата с метрикой Чебышева.** Для метрики Чебышева в работе [3] теоретически установлено, что если множество  $\Omega$  — координатный куб, т.е.  $\Omega = \{x: 0 \leq x^j \leq 1, j=1, \dots, n\}$ , то решение задачи (8) оптимального покрытия в случае метрики Чебышева (2) находится в явном виде:

$$— R_* = \frac{1}{2m}, \text{ где } m = \lceil \sqrt[n]{N} \rceil; \quad (25)$$

—  $m^n$  из центров  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$  оптимального покрытия совпадают с точками

$$\tau_i = \left( \frac{j_1}{2m}, \frac{j_2}{2m}, \dots, \frac{j_n}{2m} \right), \quad j_1, \dots, j_n \in \{1, 3, \dots, 2m-1\}; \quad (26)$$

— остальные  $(N - m^n)$  — произвольные точки.

Отсюда следует, что для случая  $N = m^n$  оптимальные координаты всех  $N$  центров покрытия определяются аналитически по формулам (26), а для случая  $m^n < N < (m+1)^n$ , где  $m$  — целое, аналитически можно определить оптимальные координаты только  $m^n$  центров покрытия, остальные остаются неизвестными.

Сравним аналитические результаты из [3] по покрытию единичного квадрата из  $E_2$  в случае метрики Чебышева

$$c(x, \tau_i) = \max_{i=1, 2, \dots, N} \{ |x^{(1)} - \tau_i^{(1)}|, |x^{(2)} - \tau_i^{(2)}| \} \quad (27)$$

с полученными численными результатами.

Заметим, что с помощью алгоритма можно определить координаты оптимальных центров покрытия как для случая  $N = m^2$ , так и (в отличие от теоретических результатов из [3]) для случая  $m^2 < N < (m+1)^2$ .

Опишем и проанализируем сначала результаты численных экспериментов по покрытию единичного квадрата с метрикой (28) для случая  $N = m^2$ ,  $m = 2, 3, 4, 5$ .

На рис. 2 изображены диаграммы Дирихле–Вороное глобальных оптимальных решений задачи оптимального покрытия (8) для случаев  $N = m^2 = 4, 9, 16, 25$ , полученные с точностью  $\varepsilon = 0.0001$ , а в табл. 2 приведены значения соответствующих оптимальных радиусов покрытия  $R(\tau_*)$ , полученных алгоритмом, и оптимальных радиусов, полученных теорети-

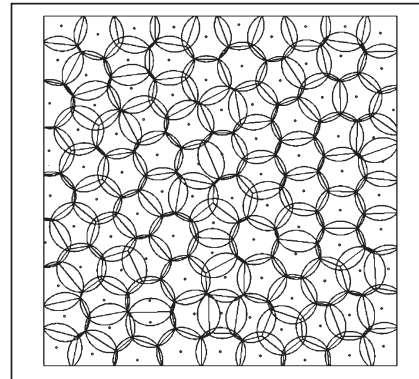


Рис. 1. Оптимальное покрытие единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_2$ ,  $N = 100$

Таблица 2

N	Численные значения минимального радиуса	
	полученного алгоритмом	полученного теоретически, $R_*^T$
4	0,2525	0,25
9	0,1684	0,1667
16	0,1275	0,125
25	0,1023	0,1

чески в [3]. Как видно, все приведенные численные результаты по покрытию единичного квадрата совпадают (с небольшой погрешностью) с теоретическими, приведенными в работе [3].

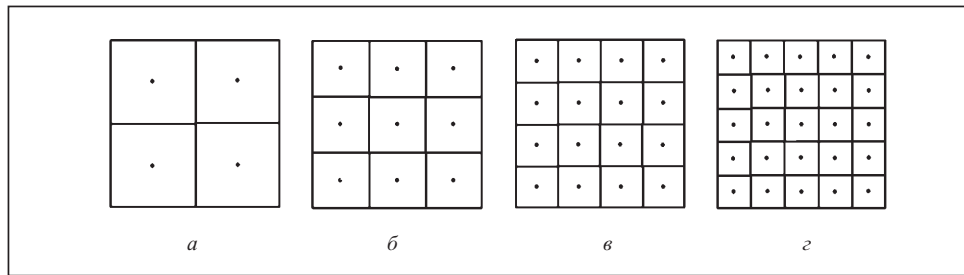


Рис. 2. Оптимальное покрытие единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_0$  при  $N = 4(a)$ ,  $N = 9(b)$ ,  $N = 16(c)$ ,  $N = 25(d)$

Алгоритмом получено также оптимальное покрытие единичного квадрата для случая  $\|x\| = \|x\|_0$ ,  $N = 100$ . Минимальный радиус покрытия  $R(\tau_*) = 0,0563$ .

Перейдем теперь к описанию и анализу результатов численных экспериментов по покрытию единичного квадрата с метрикой Чебышева (28) для случая  $m^2 < N < (m+1)^2$ .

На рис. 3, *a* представлена диаграмма Дирихле–Вороного оптимального решения задачи оптимального покрытия (8) для случая  $N = 3$ . Здесь  $m = \lfloor \sqrt{N} \rfloor = 1$ . Экспериментальный радиус покрытия  $R(\tau_*) = 0,5004$  отличается от теоретического  $R_*^T = 0,5$  на величину 0,0004. Число произвольных центров составляет  $(N - m^2) = 2$ .

Представленные на рис. 3, *b, в, г* диаграммы соответствуют теоретическим результатам из [8]. Во всех трех случаях  $m = \lfloor \sqrt{N} \rfloor = 2$  и полученные оптимальные значения радиусов покрытия для  $N = 5, 6, 7$  совпадают (с некоторыми погрешностями) с теоретическими значениями  $R_*^T = 0,25$ . В случае  $N = 5$  произвольным центром покрытия является  $\tau_5$ , значения координат остальных четырех центров совпадают с теоретическими с некоторой погрешностью, зависящей от заданной точности  $\varepsilon$  и размеров сетки, покрывающей множество  $\Omega$ . Количество произвольных центров, согласно теории, в случае  $N = 6$  должно быть равно  $(N - m^2) = 2$ , а в случае  $N = 7$  равно  $(N - m^2) = 3$ . Из рис. 3 видно, что такими произвольными центрами могут быть при  $N = 6$  точки  $\tau_5$  и  $\tau_6$ , при  $N = 7$  — точки  $\tau_5$ ,  $\tau_6$  и  $\tau_7$ .

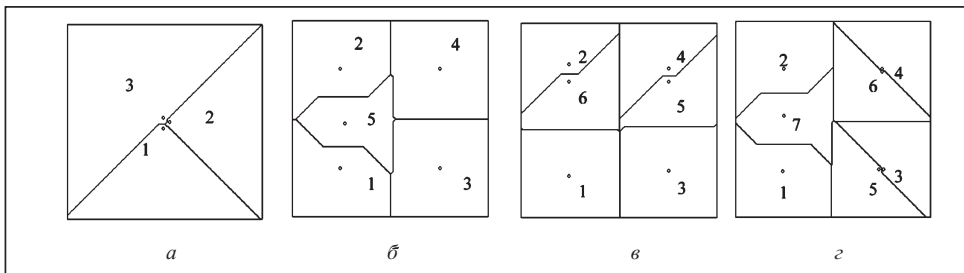


Рис. 3. Оптимальное покрытие единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_0$  при  $N = 3(a)$ ,  $N = 5(b)$ ,  $N = 6(c)$ ,  $N = 7(d)$

**4.3. Результаты численных экспериментов по  $\varepsilon$ -покрытию единичного квадрата с манхэттенской метрикой.** Опишем результаты численного решения задачи оптимального покрытия единичного квадрата из  $E_2$  с манхэттенской метрикой

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = |x^1 - \tau_i^1| + |x^2 - \tau_i^2|, \quad i = 1, \dots, N. \quad (28)$$

Для манхэттенской метрики в работе [3] теоретически установлено, что если множество  $\Omega \subset E_2$  имеет вид  $\Omega = \{x: |x^1| + |x^2| \leq 1\}$  и  $N = m^2$ ,  $m$  — целое, то оптимальные координаты центров покрытия вычисляются по формулам

$$\tau_i^* = \left[ \frac{j_1 - j_2}{2m}, \frac{j_1 + j_2 - 2m}{2m} \right], \quad j_1, j_2 \in \{1, 3, \dots, 2m-1\}.$$

Результаты численных экспериментов по покрытию множества  $\Omega$   $c$ -шарами для  $N = 4, 9$  совпадают с теоретическими с небольшой погрешностью. Покрывающим  $c$ -шаром в этих случаях является ромб. На рис. 4 изображены диаграммы Дирихле–Вороного глобальных оптимальных решений для этой задачи, полученные алгоритмом:

— для  $N = 4$  (за 142 итерации при  $M = 100$ ,  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\tau_i^0 = (0; 0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ):  $\tau_{*1} = (0,5030; 0,7506)$ ,  $\tau_{*2} = (0,5022; 0,2504)$ ,  $\tau_{*3} = (0,2525; 0,5000)$ ,  $\tau_{*4} = (0,7525; 0,5000)$ ,  $R(\tau_*) = 0,2476$ ;

— для  $N = 9$  (за 211 итерации при  $M = 100$ ,  $h_0 = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\tau_i^0$  заданы случайно,  $i = 1, \dots, 9$ ):  $\tau_{*1} = (0,5000; 0,1667)$ ,  $\tau_{*2} = (0,5000; 0,8333)$ ,  $\tau_{*3} = (0,1703; 0,4986)$ ,  $\tau_{*4} = (0,6621; 0,3338)$ ,  $\tau_{*5} = (0,3302; 0,6698)$ ,  $\tau_{*6} = (0,8333; 0,5000)$ ,  $\tau_{*7} = (0,4949; 0,5051)$ ,  $\tau_{*8} = (0,3378; 0,3288)$ ,  $\tau_{*9} = (0,6667; 0,6667)$ ,  $R(\tau_*) = 0,1667$ .

На рис. 5 изображены диаграммы Дирихле–Вороного оптимального покрытия единичного квадрата решений задачи (8) для метрики (28), полученного алгоритмом при  $N = 4$ . В обоих случаях  $R(\tau_*) = 0,5000$ . На рис. 5, а изображена диаграмма Дирихле–Вороного оптимального покрытия единичного квадрата четырьмя  $c$ -шарами, полученного алгоритмом за 140 итераций при  $M = 100$ ,  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\tau_i^0 = (0; 0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Оптимальные координаты центров покрытия в этом случае имеют вид  $\tau_{*1} = (0,6768; 0,1717)$ ,  $\tau_{*2} = (0,3232; 0,8283)$ ,  $\tau_{*3} = (0,1717; 0,3232)$ ,  $\tau_{*4} = (0,8283; 0,6768)$ .

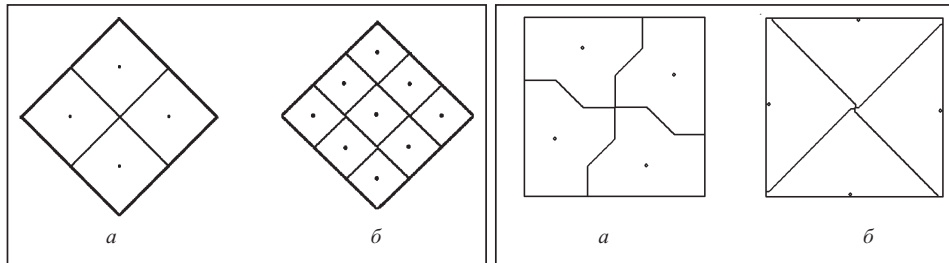


Рис. 4. Диаграмма Дирихле–Вороного оптимального покрытия множества  $\Omega$ , полученного алгоритмом в случае  $\|x\| = \|x\|_0$  при  $N = 4$  (а),  $N = 9$  (б)

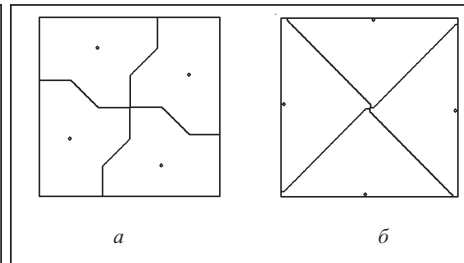


Рис. 5. Диаграммы Дирихле–Вороного оптимального покрытия единичного квадрата, полученного алгоритмом для метрики (28) при  $N = 4$  за 140 итераций (а) и за 115 итераций (б)

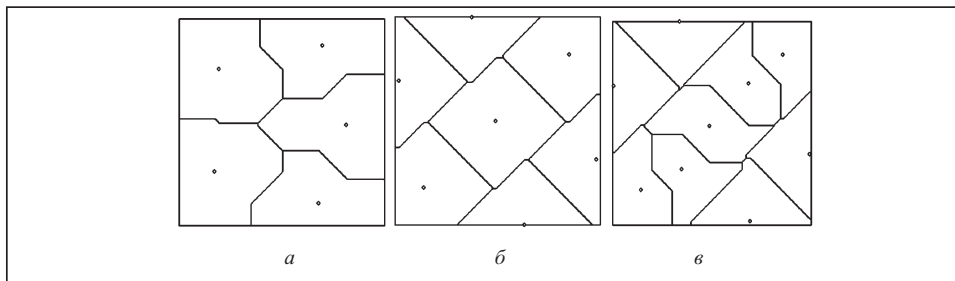


Рис. 6. Диаграммы Дирихле–Вороного задачи (8) оптимального покрытия единичного квадрата в случае  $\|x\| = \|x\|_1$  для  $N = 5$  (а),  $N = 7$  (б),  $N = 9$  (в)

На рис. 5, б изображена диаграмма Дирихле–Вороного другого оптимального решения этой же задачи ( $R(\tau_*) = 0,5000$ ), полученного алгоритмом за 115 итераций при  $M = 101$ ,  $h_0 = 0,2$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\tau_i^0 = (0; 0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Оптимальные координаты центров покрытия в этом случае имеют вид  $\tau_{*1} = (0,9851; 0,4800)$ ,  $\tau_{*2} = (0,5225; 0,9875)$ ,  $\tau_{*3} = (0,0165; 0,5165)$ ,  $\tau_{*4} = (0,4784; 0,0134)$ .

На рис. 6 представлены диаграммы Дирихле–Вороного для задачи оптимального покрытия (8) единичного квадрата с метрикой (28), полученного алгоритмом для  $N = 5, 7, 9$  при начальных данных  $\tau_i^0 = (0; 0)$ ,  $i = 1, \dots, 9$ .

**4.4. Применение алгоритма решения непрерывных задач оптимального  $c$ -покрытия к дискретным задачам покрытия.** Дискретную задачу оптимального покрытия рассмотрим в следующей постановке.

**Задача 5.** Найти координаты центров  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*i}, \dots, \tau_{*N}$ , каждый из которых может принадлежать соответствующему множеству  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , (выпуклому, замкнутому, ограниченному, принадлежащему  $E_n$ ), генерирующих  $c$ -шаровое покрытие дискретного множества  $\Omega$  с минимально возможным радиусом, т.е.

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, 2, \dots, N} c(x, \tau_i) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in T_1 \times \dots \times T_N}. \quad (29)$$

Возможность применения алгоритма решения непрерывной задачи (8) о  $c$ -шаровом покрытии к решению дискретной задачи оптимального покрытия (29) проиллюстрируем на следующих двух тестовых примерах.

**Пример 1.** Множества  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , совпадают с единичным квадратом, т.е.  $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \{[0,1] \times [0,1]\}$ . Метрика  $c(x, \tau_i)$  — евклидова,  $N = 4$ . Множество  $\Omega$  состоит из точек:

$$\Omega = \{(0,0; 0,0), (1/7; 0,0), (0,0; 1/7), (1/7; 1/7), (0,0; 6/7), (1/7; 6/7), (0,0; 1,0), (1/7; 1,0), (3/7; 4/7), (4/7; 4/7), (3/7; 5/7), (4/7; 5/7), (6/7; 6/7), (1,0; 6/7), (6/7; 1,0), (1,0; 1,0)\}.$$

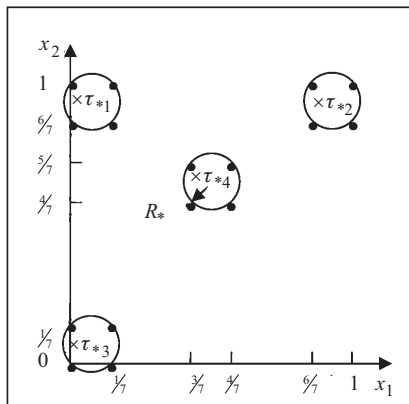


Рис. 7. График оптимального покрытия дискретного множества  $\Omega$  из примера 1

$\Omega = \{ (0,0; 0,0), (0,0; 0,25), (0,0; 0,5), (0,0; 0,75), (0,0; 1,0), (0,25; 0,0), (0,25; 0,25), (0,25; 0,5), (0,25; 0,75), (0,25; 1,0), (0,5; 0,0), (0,5; 0,25), (0,5; 0,5), (0,5; 0,75), (0,5; 1,0), (0,75; 0,0), (0,75; 0,25), (0,75; 0,5), (0,75; 0,75), (0,75; 1,0), (1,0; 0,0), (1,0; 0,25), (1,0; 0,5), (1,0; 0,75), (1,0; 1,0) \}$ ,

Метрика  $c(x, \tau_i)$  — евклидова,  $N = 2$ . Заданы множества  $T_1 = \{[0,0; 0,25] \times [0,0; 0,25]\}$ ,  $T_2 = \{[0,75; 1,0] \times [0,0; 0,25]\}$ .

Результаты численного эксперимента, полученные алгоритмом за одну итерацию при  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $M = 41$ ,  $\tau_i^0 = (0; 0)$ ,  $i = 1, 2$ , имеют вид

$$\tau_{*1} = (0,0200; 0,2500), \tau_{*2} = (0,7500; 0,2500), \quad R(\tau_*) = 0,7906.$$

На рис. 7 представлено оптимальное решение этой задачи, полученное алгоритмом за 254 итерации при следующих параметрах:  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $M = 71$ ,  $\tau_i^0 = (0; 0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Здесь центры  $\tau_{*i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , отмечены знаком  $\times$ . Полученные численные результаты подтверждаются геометрическими построениями:

$$\tau_{*1} = (0,0714; 0,0714), \tau_{*2} = (0,9286; 0,9286), \\ \tau_{*3} = (0,0714; 0,9286), \\ \tau_{*4} = (0,5000; 0,6429), \quad R(\tau_*) = 0,1010.$$

**Пример 2.** Покрывалось множество  $\Omega$ , состоящее из точек (рис. 8):

На рис. 8 изображено оптимальное покрытие множества  $\Omega$ , оптимальные центры покрытия отмечены знаком  $\times$ . Результаты численных экспериментов полностью подтверждаются геометрическими построениями.

**4.5. Результаты численных экспериментов по  $s$ -покрытию невыпуклых областей.** Возможность применения алгоритма решения непрерывной задачи (8) о  $s$ -шаровом покрытии к покрытию невыпуклых областей проиллюстрируем следующими примерами.

**Пример 3.** Проводилось покрытие невыпуклого множества  $\Omega$  (мозаики, набранной из семи правильных шестиугольников) семью правильными шарами. Центры покрытия  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , размещались в соответствующих множествах  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , где  $T_i = \{[0,1] \times [0,0; 10,3923]\}$ . Начальные значения координат центров покрытия выбирались нулевыми, т.е.  $\tau_i^0 = (0; 0)$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Оптимальное решение, полученное алгоритмом за 224 итерации при  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $M = 151$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{*1} &= (0,4968; 0,1677), \quad \tau_{*2} = (0,5034; 0,5125), \\ \tau_{*3} &= (0,1967; 0,3461), \quad \tau_{*4} = (0,4993; 0,8666), \\ \tau_{*5} &= (0,8029; 0,3408), \quad \tau_{*6} = (0,1991; 0,6920), \\ \tau_{*7} &= (0,8003; 0,6930), \quad R(\tau_*) = 0,2010. \end{aligned}$$

Оптимальные центры покрытия  $\tau_{*i}$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , отмечены на рис. 9 знаком  $\times$ . Результаты численных экспериментов полностью подтверждаются геометрическими построениями.

**Пример 4.** Данный тестовый пример взят из работы [4]. Тремя шарами покрывалось невыпуклое множество  $\Omega$ , изображенное на рис. 10. Центры покрытия  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , размещались в соответствующих множествах  $T_i = \{[0; 8,5] \times [0; 6]\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Оптимальное решение, полученное алгоритмом за 860 итераций при  $h_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{*1} &= (2,5000; 5,0000), \quad \tau_{*2} = (6,1003; 0,9992), \\ \tau_{*3} &= (1,7961; 1,9464). \end{aligned}$$

При этом  $R(\tau_*) = 2,6926$ . На рис. 10 оптимальные центры отмечены точками. Результаты, полученные алгоритмом для данного тестового примера, согласуются с результатами из работы [4].

**4.6. Использование алгоритма оптимального  $s$ -покрытия для решения задачи покрытия множеств, точки которых имеют различный вес.** В ряде практических задач покрытия области, например при оптимизации программ работы систем дистанционного зондирования Земли, возникает ситуация, когда на отдельных участках области потребность в спутниковой связи выше, чем на других. Так, в задаче покрытия для определения оптимального размещения супермаркетов плотность населения не везде одинакова. В задаче планирования в

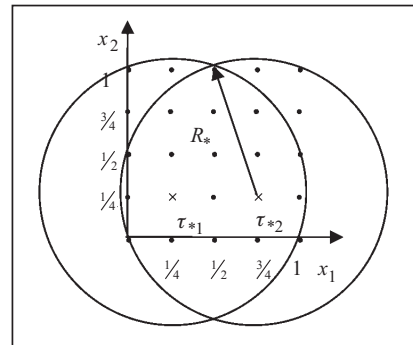


Рис. 8. График оптимального покрытия дискретного множества  $\Omega$  из примера 2

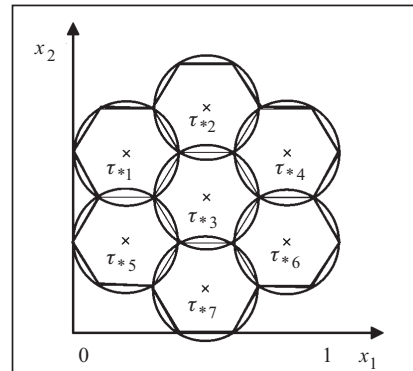


Рис. 9. График оптимального покрытия мозаики семью шарами

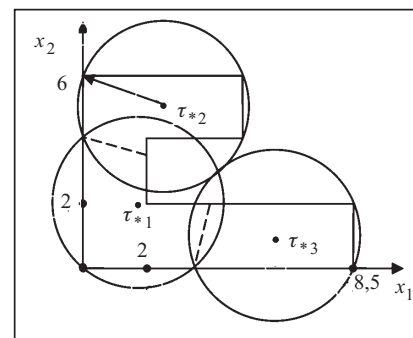


Рис. 10. График оптимального покрытия невыпуклого множества  $\Omega$  тремя шарами



некотором регионе размещения станций сотовой связи стандарта CDMA радиус действия этих станций зависит от количества потребителей. При увеличении нагрузки радиус действия станции уменьшается, и соответственно, когда абоненты покидают зону действия станции, ее радиус действия увеличивается. Известна предполагаемая плотность распределения абонентов в часы максимально возможной нагрузки. Необходимо определить минимально возможный радиус действия станций сотовой связи. Соответственно во всех этих случаях «вес» каждой точки в покрываемом множестве может быть различным. Для учета плотности можно модифицировать исходный целевой функционал так, чтобы при решении задачи учитывался вес каждой точки области.

Для решения задачи (8) об оптимальном  $c$ -покрытии, т.е. для отыскания координат центров  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$  и величины радиуса покрытия  $R(\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N})$ , минимизирующей целевую функцию

$$R(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} \rho(x) c(x, \tau_i), \quad (30)$$

при условии

$$(\tau_1, \dots, \tau_N) \in (\text{co}\Omega)^N \quad (31)$$

необходимо минимизировать по  $\tau_i, i=1, \dots, N$ , на множестве  $\text{co}\Omega(\tau_i)$  функции

$$R_i(\tau_i) = \max_{x \in \Omega(\tau_i)} \rho(x) c(x, \tau_i), \quad i=1, \dots, N. \quad (32)$$

Будем считать, что плотность распределения является непрерывной функцией почти всюду и  $\rho(x) > 0$ , тогда модификация целевого функционала не меняет его свойств и все доказанные выше утверждения остаются в силе.

Проиллюстрируем это утверждение на примере части алгоритма, связанной с разбиением множества  $\Omega$  на подмножества  $\{\Omega(\tau_i), i=1, \dots, N\} = \{\Omega(\tau_1), \dots, \Omega(\tau_N)\}$  при заданных центрах  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ . Справедлива следующая лемма, доказательство которой достаточно очевидно.

**Лемма 2.** Разбиение множества  $\Omega$  на подмножества  $\{\Omega(\tau_1), \dots, \Omega(\tau_N)\}$  при заданных центрах  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  и переменной плотности распределения совпадает с разбиением Дирихле–Вороного. Следовательно, указанная модификация целе-

вого функционала не приводит к изменению алгоритма поиска оптимального решения.

**Пример 5.** В качестве покрываемого множества рассматривался единичный квадрат, веса точек которого задавались функцией  $\rho(x, y) = e^{-(x-0,7)^2 - (y-0,5)^2 + 1}$ .

В табл. 3 приведены взвешенный радиус шаров покрытия, координаты их центров. На рис. 11 представлены оптимальные покрытия единичного квадрата с неравномерно распределенной плотностью для  $N = 2 \div 7$  при начальных данных  $\tau_i^0 = (0; 0), i=2, \dots, 7$ , оптимальные центры покрытия множества отме-

**Таблица 3**

N	Численные результаты, полученные алгоритмом	
	$R(\tau_*)$	$(\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N})$
2	0,6482	$\tau_1 = (0,7525; 0,4010)$ $\tau_2 = (0,2474; 0,4010)$
3	0,6215	$\tau_1 = (0,7266; 0,240934)$ $\tau_2 = (0,1768; 0,404144)$ $\tau_3 = (0,7341; 0,586252)$
4	0,5356	$\tau_1 = (0,7549; 0,5237)$ $\tau_2 = (0,7500; 0,2797)$ $\tau_3 = (0,2428; 0,2879)$ $\tau_4 = (0,2523; 0,5290)$
5	0,4897	$\tau_1 = (0,7531; 0,5837)$ $\tau_2 = (0,8754; 0,2964)$ $\tau_3 = (0,5050; 0,2767)$ $\tau_4 = (0,2444; 0,5778)$ $\tau_5 = (0,1293; 0,2916)$
6	0,4531	$\tau_1 = (0,8088; 0,5958)$ $\tau_2 = (0,5629; 0,2400)$ $\tau_3 = (0,8979; 0,2724)$ $\tau_4 = (0,4421; 0,5783)$ $\tau_5 = (0,0963; 0,5825)$ $\tau_6 = (0,1807; 0,2450)$
7	0,4389	$\tau_1 = (0,3619; 0,7920)$ $\tau_2 = (0,8326; 0,5942)$ $\tau_3 = (0,8833; 0,2711)$ $\tau_4 = (0,1377; 0,5820)$ $\tau_5 = (0,5034; 0,4484)$ $\tau_6 = (0,1487; 0,2564)$ $\tau_7 = (0,5327; 0,1485)$

чены точками. Сравнивая результаты, полученные для покрытия единичного квадрата, с результатами, полученными алгоритмом для данного тестового примера, можно сделать вывод, что радиус покрытия значительно больше в случае неравномерной плотности множества, а сами центры шаров смещены в область с большей плотностью. Поскольку в данном примере плотность множества задана неизменной во времени (в действительности плотность может изменяться динамически), то очевидно, что решение задачи покрытия будет приближенным. Для решения динамической задачи потребуется доработка предложенного алгоритма.

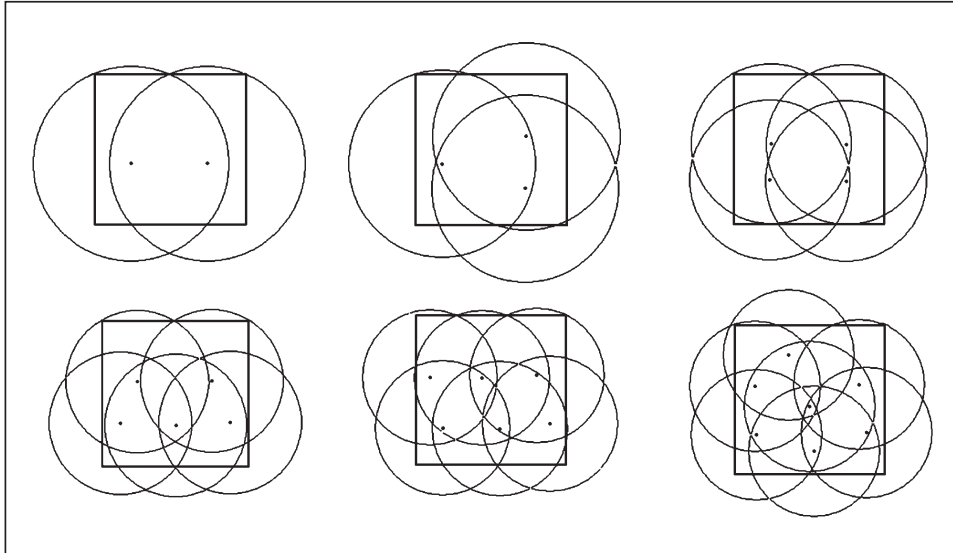


Рис. 11. Оптимальное покрытие единичного квадрата, точки которого имеют различный вес

##### 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО С-ПОКРЫТИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ МНОЖЕСТВА МИНИМАЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ШАРОВ ЗАДАННОГО РАДИУСА

Описанный выше алгоритм можно использовать для решения задачи покрытия множества минимальным количеством шаров заданного радиуса. Для этого определяем оценочное значение  $N_0$  количества шаров заданного радиуса  $R$  по формуле  $N = S / S_{\text{шара}}$  ( $S$  — площадь заданного множества  $\Omega \in E_n$ ,  $S_{\text{шара}}$  — площадь шара заданного радиуса  $R$ ). Затем решаем задачу об оптимальном  $s$ -шаровом покрытии заданным количеством шаров  $N$ . В результате получаем минимальный радиус покрытия  $\bar{R}$ . Если полученный радиус  $\bar{R}$  больше заданного  $R$ , то увеличиваем значение  $N$  на единицу и снова решаем задачу об оптимальном  $s$ -шаровом покрытии компактного множества заданным количеством шаров. Процедуру повторяем до тех пор, пока полученный радиус покрытия не станет меньше заданного. Программное обеспечение, реализующее данный подход, разработано и протестировано на модельных примерах.

**Пример 6.** Покрываемое множество для данного тестового примера взято из работы [7], где невыпуклое множество  $\Omega$  последовательно покрывалось шарами заданного радиуса  $R_*^T$ .

В результате были определены минимальное количество шаров, необходимое для покрытия множества  $N$ , а также минимально возможный радиус, требуемый для покрытия этого множества шарами. Центры шаров покрытия  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , размещались в соответствующих множествах  $T_i = \text{co} \Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Численные результаты, полученные алгоритмом для данного текстового примера и представленные в табл. 4, согласуются с результатами из работы [7].

Таблица 4

$N$	Значение оптимального радиуса из [7]	Значение радиуса, полученного алгоритмом	$N$	Значение оптимального радиуса из [7]	Значение радиуса, полученного алгоритмом
1	106,06602	106,0668	11	28,53897	28,4122
2	83,85255	81,4968	12	27,38858	27,6912
3	70,27146	70,146	13	25,86670	26,2953
4	51,08375	50,3442	14	25,11455	25,5798
5	47,27901	47,2688	15	24,23172	24,8292
6	40,67141	39,8952	16	22,96237	23,3793
7	38,14401	38,0997	17	22,44569	22,7394
8	34,02622	33,9957	18	21,62820	21,5163
9	31,82953	31,2228	19	21,01274	20,8467
10	29,32231	29,3273	20	19,98385	20,5308

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для непрерывной задачи оптимального  $s$ -шарового покрытия компактного множества  $\Omega$  из  $E_n$  заданным количеством шаров минимального радиуса предложен и обоснован алгоритм, основанный на использовании теории оптимального разбиения множеств и  $r$ -алгоритма Шора.

Предложенный алгоритм имеет следующие характеристики:

- на каждой итерации улучшается положение всех центров оптимального покрытия;
- может быть использован для покрытия множеств из  $n$ -мерного евклидова пространства произвольной размерности;
- его реализация не связана с геометрическими особенностями покрываемого множества;
- может быть использован для покрытия как выпуклых, так и невыпуклых множеств, для решения дискретных задач оптимального покрытия, а также для решения задачи покрытия множества минимальным количеством шаров заданного радиуса;
- может быть использован для покрытия множеств, точки которых имеют различный вес.

Алгоритм находит локальное оптимальное решение задачи об оптимальном  $s$ -шаровом покрытии. Хотя, как правило, в результате численных экспериментов, проведенных для метрик (5)–(7), алгоритм приводил к глобальному оптимальному решению.

Разработанный алгоритм позволяет получить результаты для произвольного количества шаров покрытия. Однако, как установлено в результате численных экспериментов, с увеличением количества шаров покрытия может увеличиваться и относительная погрешность, с учетом которой получены оптимальные решения.

Алгоритм реализован на языке C++ в среде Visual\_C 6.0. В результате численных экспериментов подтверждена сравнительная простота задания начальных данных и высокая эффективность алгоритма, а также установлено, что алгоритм хорошо работает из любого начального приближения для центров покрытия. Поэтому для удобства пользователя почти во всех тестовых примерах в качестве начального приближения для центров покрытия выбиралось начало координат. Однако при покрытии множества большим количеством шаров, например 100, более эффективным оказался случайный выбор начальных центров покрытия.

Достоверность полученных численных приближений оптимальных решений задач подтверждена либо совпадением с уже известными экспериментальными или теоретическими результатами из [1–4], если таковые имелись, либо геометрическими построениями для новых модельных задач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пиявский С.А. Об оптимизации сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 68–80.
2. Брусов В.С., Пиявский С.А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1971. — **11**, № 2. — С. 304–312.
3. Сухарев А.Г. Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа. — М.: Наука, 1989. — 300 с.
4. Jandl H., Wieder K. A continuous set covering problem as a quasidifferentiable optimization problem // Optimization. — 1988. — **19**, № 6. — P. 781–802.
5. Киселева Е.М., Шор Н.З. О сходстве и различии некоторых непрерывных задач о покрытии и разбиении / Вопр. прикладной математики и мат. моделирования. — Днепропетровск: ДГУ, 1997. — С. 68–77.
6. Friedman M. On the analysis and solution of certain geographical optimal covering problems // Comput. and Oper. Res. — 1976. — **17**. — P. 848–856.
7. Стоян Ю.Г., Пацук В.Н. Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса // Доп. НАН України. — 2006. — № 3. — С. 74–77.
8. Антошкин А.А., Романова Т.Е. Математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами с учетом погрешностей исходных данных // Пробл. машиностроения. — 2002. — **5**, № 1. — С. 56–60.
9. Брусов В.С., Пиявский С.А. Применение теории оптимальных покрытий к выбору двигательной установки космического аппарата малой тяги // Механика твердого тела. — 1968. — № 5. — С. 3–10.
10. Брусов В.С., Пиявский С.А. Двигательная установка малой тяги, универсальная для двумерного диапазона параметров // Космические исследования. — 1970. — **8**, № 4. — С. 542–546.
11. Киселева Е.М., Шафиро В.Г. О связи задач оптимального покрытия и оптимального разбиения множеств / Вопр. прикладной математики и мат. моделирования. — Днепропетровск: ДГУ, 1991. — С. 23–27.
12. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. — К.: Наук. думка, 1979. — 199 с.
13. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. — К.: Наук. думка, 2005. — 564 с.
14. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации  $r$ -алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 4. — С. 28–49.
15. Задачі оптимального проектування надійних мереж / За загальною ред. академіка НАН України Н.З. Шора. — К.: Наук. думка, 2005. — 230 с.

*Поступила 23.06.2008*