УДК 519.71

Л.П. ЛИСОВИК, Т.А. КАРНАУХ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЗАДАНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Ключевые слова: *фрактал, R-преобразователь, R-система.*

ВВЕДЕНИЕ

При задании фрактальных множеств используются различные подходы, большинство из которых основано на итеративных процедурах [1–3]. Например, в результате геометрических преобразований возникают такие фрактальные множества, как салфетка Серпинского и снежинка Кох. Универсальным средством являются системы итерированных функций (*IFS*), определяющие множество как неподвижную точку преобразования: согласно теореме о коллаже [1, с. 96, 97] каждое ограниченное множество можно достаточно хорошо приблизить аттрактором *IFS*.

Кроме того, для задания множеств с регулярной структурой можно использовать различные схемы: иерархические системы итерированных функций (*HIFS*) [2, с. 283–292], управляемые графами конструкции [4], а также взвешенные конечные автоматы [5]. На первый взгляд все эти конструкции близки к понятию конечного автомата, поскольку для их задания можно использовать диаграмму переходов классического конечного автомата. Тем не менее процесс их работы более соответствует конечной дискретной сети, в которой каждый узел сначала суммирует свои входы, а потом обрабатывает полученную сумму, передавая результаты другим узлам. В случае *HIFS* и управляемых графами конструкций результирующее множество определяется с использованием неподвижной точки системы.

С помощью понятия адреса [2, с. 307–320] точки аттрактора *IFS* естественным образом строится сюръекция из $[0;1]$ на аттрактор. Этот подход к заданию множества как образа единичного отрезка можно существенно упростить, исключив из данной схемы промежуточное звено — *IFS*. Так, даже конечные *R*-преобразователи позволяют задавать непрерывные сюръекции единичного отрезка на фрактальные множества [6] и строить алгоритмы непрерывного обхода множества, например, кривая Пеано задается конечным *R*-преобразователем [7]. Указанный тип задач имеет ряд важных приложений. R^*-преобразователь [8], являясь обобщением понятия *R*-преобразователя, еще более расширяет возможности конструктивного задания множества как образа отрезка $[0;1]$.

Предлагаемый в данной работе способ задания фрактальных множеств *R*-системами использует именно концепцию конечного автомата, а не конечной сети параллельно работающих алгоритмических устройств. Функционирование *R*-системы в евклидовом пространстве состоит в том, что, начиная из начала координат, текущая точка последовательно уточняется системой: на каждом шаге осуществляется перенос текущей точки на вектор, определяемый текущим состоянием-нетерминалом и текущими коэффициентами сжатия, а также пересчет самих коэффициентов сжатия. При этом сам процесс уточнения управляется конечным множеством состояний и имеет недетерминированный характер, что позволяет получать различные результирующие точки. Таким образом, конструкция *R*-системы является симбиозом грамматики, которая последовательно порождает слова, т.е. задающие точки последовательности векторов пространства, и R^*-преобразователя, управляющего коэффициентами сжатия. По сравнению с R^*-преобразователями *R*-системы более удобны в тех случаях, когда представляет интерес только задание точек фрактального множества, а не непрерывный обход. Следует также отметить, что при вычислении точки множества, задаваемого *R*-системой, на каждой итерации достаточно проводить вычисления только для одного узла диаграммы переходов, а не для всех одновременно, как того требуют системы, состоящие из конечной сети параллельно работающих устройств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ *R*-СИСТЕМЫ

R-система — это пятерка $G=(n, V, B, P, S_0)$, где n, $n \in N_+$, — размерность системы; V — множество нетерминальных символов (нетерминалов); B, $B \subseteq R^n$, — конечное множество векторов *n*-мерного евклидового пространства (аналог терминалов); P — конечное множество продукций вида $S \to \gamma$, где $S \in V$, $\gamma \in B(V \times (R_+)^n)^+$, $R_+ = (0; +\infty)$ (содержательно, правая часть продукции $S \to$ $\to b(S_1, k_1)\ldots(S_m, k_m)$ состоит из вектора b, который участвует в переносе текущей точки, а также из конечной последовательности пар — нетерминал, вектор сжатия; каждый вектор сжатия k_i состоит из коэффициентов сжатия для каждой из n координатных осей); S_0, $S_0 \in V$, — начальный символ вывода (аксиома).

Запись $S \to \gamma_1 |\gamma_2|\ldots|\gamma_k$ является сокращением записи $S \to \gamma_1$, $S \to \gamma_2, \ldots$ $\ldots, S \to \gamma_k$, как это принято для грамматик. Отношение $\to$ выводимости в *R*-системе G определено на множестве $R^n \times (V \times (R_+)^n)^+$ следующим образом.

Пусть в системе продукций P имеется продукция $p = (S \to b(S_1, k_1)\ldots$ $\ldots(S_m, k_m))$ и $x \in R^n$, тогда выполняется соотношение

$$(x, \xi_1(S, c)\,\xi_2) \to (x + c \cdot b,\ \xi_1(S_1, c \cdot k_1)\ \ldots\ (S_m, c \cdot k_m)\xi_2),$$

где для векторов $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in R^n$ через $v + w$ обозначена их векторная сумма, а $v \cdot w = (v_1 w_1, v_2 w_2, \ldots, v_n w_n)$. Как обычно, выводом называем последовательность элементов множества $R^n \times (V \times (R_+)^n)^+$, последовательно связанных отношением выводимости. Заметим, что далее рассматриваются как конечные, так и бесконечные выводы.

Будем говорить, что бесконечный вывод $(z_0, \gamma_0) \to (z_1, \gamma_1) \to \ldots$ $\ldots \to (z_i, \gamma_i) \to (z_{i+1}, \gamma_{i+1}) \to \ldots$ сходится к точке z, если существует предел (здесь и далее рассматриваются только конечные пределы) последовательности $\{z_i\}_{i \in N}$ и он равен z. Обозначим как $a^{(n)}$ *n*-мерный вектор $(a, a, \ldots, a) \in R^n$. Введем $S(G)$ — множество точек, порождаемых *R*-системой G:

$S(G) = \{z \in R^n \mid$ существует последовательность $\{z_i\}_{i \in N}$ точек множества R^n, сходящаяся к точке z, и последовательность $\{\gamma_i\}_{i \in N}$ такие, что $(z_0, \gamma_0) = (0^{(n)}, (S_0, 1^{(n)}))$ и для всех натуральных i выполнено $(z_i, \gamma_i) \to (z_{i+1}, \gamma_{i+1})\}$.

Если $M = S(G)$, то будем говорить, что *R*-система G порождает, или задает, множество M. Две *R*-системы эквивалентны, если они задают одно и то же множество. *R*-системы, задающие пустое множество, назовем тривиальными. Тривиальные *R*-системы особого интереса не представляют, поэтому в дальнейшем их рассматривать не будем. Нетривиальную *R*-систему G, все продукции которой имеют вид $S \to \gamma$, где $S \in V$, $\gamma \in B(V \times (R_+)^n)$, назовем линейной. Нетривиальные *R*-системы, все коэффициенты сжатия которых меньше 1, назовем ограниченными.

По аналогии с контекстно-свободными грамматиками нетерминалы естественным образом можно классифицировать как тупиковые, недостижимые и продуктивные; соответствующие множества нетерминалов эффективно строятся по *R*-системе. Удалив из множества нетерминалов линейной *R*-системы все непродуктивные нетерминалы (из множества продукций — все продукции, их содержащие), получим эквивалентную линейную *R*-систему. Поскольку указанное преобразование сохраняет свойство ограниченности, без ограничения общности можно считать, что рассматриваемые далее линейные *R*-системы не содержат непродуктивных нетерминалов.

В качестве простейшего примера рассмотрим построение *R*-систем, задающих салфетку Серпинского $S(A_1, A_2, A_3)$, основанную на треугольнике $_\Delta A_1, A_2, A_3$, где $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Множество $S(A_1, A_2, A_3)$ может быть задано следующим образом. Сначала из $_\Delta A_1, A_2, A_3$ удалим внутренний треугольник, образованный серединами сторон; далее аналогичную процедуру применим к каждому из трех образовавшихся треугольников и т.д. Множество $S(A_1, A_2, A_3)$ — это множество точек треугольника $_\Delta A_1, A_2, A_3$, которые не будут удалены указанной процедурой. Существуют различные стратегии построения *R*-системы для $S(A_1, A_2, A_3)$. Например, перейдя на первом шаге вывода в одну из вершин треугольника, далее можно постепенно уточнять координаты, двигаясь к одной из вершин меньших треугольников, или, иначе, в процессе вывода двигаться по центрам масс треугольников. Описанные подходы реализованы в *R*-системах G_1 и G_2, которые задают салфетку $S(A_1, A_2, A_3)$:

$$G_1 = \left(2, \{S_0, S\}, \{b_0, b_1, b_2, b_3\}, P_1, S_0\right),$$

где

$$b_0 = (x_1, y_1), \ \ b_i = (x_i - x_1, y_i - y_1), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$P_1 = \left\{S_0 \to b_0(S, k)\right\} \cup \left\{S \to b_i(S, k) \mid i = 1, 2, 3\right\}, \ \ k = (1/2, 1/2);$$

$$G_2 = (2, \{S_0, S\}, \{b_0, b_1, b_2, b_3\}, P_2, S_0),$$

где

$$b_0 = ((x_1 + x_2 + x_3)/3, \ (y_1 + y_2 + y_3)/3),$$

$$b_i = (x_i - (x_1 + x_2 + x_3)/3, \ y_i - (y_1 + y_2 + y_3)/3), \ \ i = 1, 2, 3,$$

$$P_2 = \left\{S_0 \to b_0(S, k)\right\} \cup \left\{S \to b_i(S, k) \mid i = 1, 2, 3\right\}, \ \ k = (1/2, 1/2).$$

Аналогично могут быть построены *R*-системы для ковра Серпинского и губки Менгера.

Рассмотрим еще один пример, который более полно раскрывает суть и возможности *R*-систем. Предварительно введем преобразования w_3, w_4, w_5 отрезков; преобразование w_i $(i = 3, 4, 5)$ делит отрезок на *i* равных частей и удаляет интервал, состоящий из $(i-2)$ средних частей, т.е. остаются только два крайних отрезка разбиения. Теперь построим множество C_1: сначала к отрезку $[0; 1]$ применим преобразование w_3 (этот шаг аналогичен построению множества Кантора); далее к левому оставшемуся отрезку применим преобразование w_4, а к правому — w_5. На каждом следующем шаге к левому отрезку, полученному в результате преобразования w_i, применяем преобразование $w_{3+((i+1) \bmod 3)}$, а к правому — преобразование $w_{3+((i+2) \bmod 3)}$. Множество C_1 состоит из тех и только тех точек отрезка $[0; 1]$, которые не будут удалены указанной процедурой, и может быть задано *R*-системой G_3:

$$G_3 = (1, \{S_3, S_4, S_5\}, \{b_0, b_3, b_4, b_5\}, P_3, S_3),$$

где

$$b_0 = 0, \ \ b_i = 1/i, \ \ i = 3, 4, 5;$$

$$P_3 = \left\{S_3 \to b_0\,(S_4, 1/3) \mid b_3\,(S_5, 1/3),\right.$$

$$\left.S_4 \to b_0\,(S_5, 1/4) \mid b_4\,(S_3, 1/4), \ \ S_5 \to b_0\,(S_3, 1/5) \mid b_5\,(S_4, 1/5)\right\}.$$

ДЕРЕВО ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ *R*-СИСТЕМЫ

Рассмотрим линейную *R*-систему $G = (n, V, B, P, S_0)$. Пусть $S \to b_i(S_i, k_i)$, $i \in \overline{0, k}$, — все продукции множества *P*, содержащие нетерминал *S* в левой части. Таким образом, пронумерованы все продукции нетерминала *S*. Пусть $p_{S,i}$ — продукция нетерминала *S* с номером *i*. Аналогичную операцию проведем для всех нетерминалов *R*-системы. Пусть *m* — максимальное количество продукций с одинаковой левой частью. Деревом вычислений линейной *R*-системы назовем разметку μ дерева $T_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}^*$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) μ является отображением из T_m в $\{\lambda\} \cup (R^n \times (V \times R^n))$, где символ λ соответствует пустой метке;

2) $\mu(\varepsilon) = (0^{(n)}, (S_0, 1^{(n)}))$;

3) если $\mu(w) = \lambda$, то $\mu(wi) = \lambda$ для всех $i \in \overline{0, m-1}$, $w \in T_m$;

4) если $\mu(w) = (x, (S, k))$ и $p_{S,i}$ — продукция нетерминала S с номером i, то $\mu(wi)$ является результатом применения к $(x, (S, k))$ продукции $p_{S,i}$, т.е. $\mu(w) \underset{p_{S,i}}{\to} \mu(wi)$;

5) если $\mu(w) = (x, (S, k))$ и продукции $p_{S,i}$ с номером $i \in \overline{0, m-1}$ для нетерминала S не существует, то $\mu(wi) = \lambda$, $w \in T_m$.

В дальнейшем, говоря о ветвях в дереве вычислений, будем иметь в виду пути в дереве, идущие в направлении удаления от корня и не содержащие вершин с пустыми метками. Таким образом, каждая конечная или бесконечная ветвь задает некоторый вывод. Под корневой ветвью понимаем ветвь, исходящую непосредственно из корня.

Отметим, что между бесконечными корневыми ветвями дерева и бесконечными выводами из начального нетерминала в *R*-системе существует взаимно однозначное соответствие. Поскольку все точки множества $S(G)$ соответствуют бесконечным выводам (но, возможно, не каждый бесконечный вывод соответствует точке!), каждой точке $z \in S(G)$ можно поставить в соответствие некоторую бесконечную корневую ветвь $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots$ такую, что $z = \lim\limits_{i \to \infty} \mathrm{Pr}_1\, \mu(\alpha_i)$. В то же время, если $z = \lim\limits_{i \to \infty} \mathrm{Pr}_1\, \mu(\alpha_i)$, то $z \in S(G)$ по определению. При этом, возможно, различные ветви соответствуют одной и той же точке.

Заметим, что различные порядки на множествах продукций нетерминалов позволяют получать различные, но изоморфные деревья вычислений.

СВОЙСТВА ОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ *R*-СИСТЕМ

Приведенные в данном разделе теоремы являются аналогами теорем об ограниченности и замкнутости аттрактора *IFS* [1]. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Для ограниченной линейной *R*-системы существуют действительные числа c, l_b такие, что для каждой бесконечной корневой ветви $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots$ дерева вычислений существует предел $z = \lim\limits_{i \to \infty} \mathrm{Pr}_1\, \mu(\alpha_i) \in S(G)$, причем $\rho(\mathrm{Pr}_1\, \mu(\alpha_i), z) \le \dfrac{c^i}{1-c} l_b$ для всех $i \in N$.

Доказательство. Пусть c — максимальный коэффициент сжатия *R*-системы, а l_b — максимальная длина векторов множества B. Исходя из конечной определенности и ограниченности *R*-системы, величины c и l_b определены корректно, причем $c \in (0; 1)$.

Перейдем непосредственно к рассмотрению ветви дерева. Пусть $\mu(\alpha_i) = (x_i, (S_i, (k_{i,1}, k_{i,2}, \ldots, k_{i,n})))$, $i \in N$. Сначала оценим вектор коэффициентов $(k_{i,1}, k_{i,2}, \ldots, k_{i,n})$. Поскольку $(k_{0,1}, k_{0,2}, \ldots, k_{0,n}) = 1^{(n)}$ и коэффициенты сжатия не превышают c, для всех коэффициентов $k_{i,j}$, $i \in N$, $j \in \overline{1, n}$, выполнена оценка $0 < k_{i,j} \le c^i$.

Оценим расстояние $\rho(x_i, x_{i+1})$ между точками $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n})$ и $x_{i+1} = (x_{i+1,1}, x_{i+1,2}, \ldots, x_{i+1,n})$. Пусть при переходе от вершины дерева α_i к вершине α_{i+1} применялась продукция $S_i \to (b_1, b_2, \ldots, b_n)(S_{i+1}, (k_1, k_2, \ldots, k_n))$. Согласно введенным определениям выполняется соотношение $x_{i+1,j} = x_{i,j} + k_{i,j} b_j$, $j \in \overline{1,n}$. Тогда расстояние можно оценить следующим образом:

$$\rho(x_i, x_{i+1}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (k_{i,j} b_j)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (c^i b_j)^2} = c^i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_j)^2} \le c^i l_b .$$

С учетом неравенства треугольника для $t \in N$ выполнено

$$\rho(x_i, x_{i+t}) \le \rho(x_i, x_{i+1}) + \rho(x_{i+1}, x_{i+2}) + \ldots + \rho(x_{i+t-1}, x_{i+t}) \le$$
$$\le (c^i + c^{i+1} + \ldots + c^{i+t-1})\, l_b < \frac{c^i}{1-c} l_b . \tag{1}$$

Поскольку величина $\frac{c^i}{1-c} l_b$ с ростом i стремится к нулю, последовательность $\{x_i\}_{i \in N}$ является фундаментальной, а значит, сходящейся. Следовательно, существует конечный предел $z = \lim_{i \to \infty} \Pr_1 \mu(\alpha_i) \in S(G)$. Переходя в оценке (1) к пределу при $t \to \infty$, получаем $\rho(\Pr_1 \mu(\alpha_i), z) = \rho(x_i, z) \le \frac{c^i}{1-c} l_b$. Лемма доказана.

Теорема 1. Для ограниченной линейной *R*-системы $G = (n, V, B, P, S_0)$ множество $S(G)$ ограничено.

Доказательство. По определению для корня α_0 дерева вычислений $\Pr_1 \mu(\alpha_0) = 0^{(n)}$. Тогда по лемме 1 следует, что существуют действительные числа c, l_b такие, что для каждой точки $z \in S(G)$ выполнено $\rho(0^{(n)}, z) \le \frac{1}{1-c} l_b$, т.е. множество $S(G)$ ограничено.

Теорема доказана.

Следует отметить, что *R*-системы, не являющиеся ограниченными, могут задавать как ограниченные, так и неограниченные множества.

Теорема 2. Для ограниченной линейной *R*-системы $G = (n, V, B, P, S_0)$ множество $S(G)$ замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим произвольную предельную точку z множества $S(G)$. Пусть последовательность точек $\{z_j\}_{j \in N}$, $z_j \in S(G)$, сходится к точке z, т.е. $z = \lim_{j \to \infty} z_j$. Покажем, что в случае ограниченной линейной системы $z \in S(G)$.

Если точка z входит в данную последовательность, то $z \in S(G)$. Рассмотрим тот случай, когда точка z не входит в последовательность.

В дереве вычислений μ данной *R*-системы каждой точке z_j поставим в соответствие бесконечную корневую ветвь $\alpha_{j,0}, \alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,i}, \alpha_{j,i+1}, \ldots$ такую, что $z_j = \lim_{i \to \infty} \Pr_1 \mu(\alpha_{j,i})$. Такие ветви назовем отмеченными. Заметим, что множество отмеченных ветвей бесконечно, поскольку бесконечно множество различных точек последовательности $\{z_j\}_{j \in N}$.

Рассмотрим множество *BR* всех корневых ветвей (конечных и бесконечных), через каждую вершину которых проходит бесконечное множество отмеченных ветвей, и покажем, что оно содержит хотя бы одну бесконечную ветвь.

Отмеченных ветвей бесконечно много, и все они выходят из корня, поэтому ветвь, состоящая из единственной вершины $\alpha_0 = \varepsilon$, принадлежит множеству *BR*. Таким образом, множество *BR* не пусто. Пусть оно содержит некоторую ветвь $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t$. Вершина α_t имеет конечное ветвление и через нее проходит бесконечно много отмеченных ветвей. Поэтому для некоторого $a_{t+1} \in \overline{0, m-1}$ через вершину $\alpha_t a_{t+1}$ также проходит бесконечно много отмеченных ветвей. Последнее означает, что в множестве *BR* для каждой конечной ветви существует более длинная, строго содержащая данную. Следовательно, множество *BR* содержит хотя бы одну бесконечную ветвь, например $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots)$.

Для доказательства того, что $z \in S(G)$, достаточно показать, что $z = \lim_{i\to\infty} \mathrm{Pr}_1\ \mu(\alpha_i)$. Положим $i_0 = 0$. Для вершины α_0 зафиксируем проходящую через нее отмеченную ветвь, отличную от ветви α. Пусть данной ветви соответствует точка z_{j_0}. Далее, для каждой вершины α_{i+1} зафиксируем отмеченную ветвь, которая проходит через α_{i+1} и соответствует точке $z_{j_{i+1}}$, причем $j_i < j_{i+1}$. Поскольку число j_i конечно и через каждую вершину α_{i+1} проходит бесконечно много отмеченных ветвей, данный выбор осуществим. В результате получим бесконечную подпоследовательность $\{z_{j_i}\}_{i\in N}$ исходной сходящейся последовательности, поэтому $\lim_{i\to\infty} z_{j_i} = \lim_{j\to\infty} z_j = z$.

Из леммы 1 следует, что существует конечный предел $\lim_{i\to\infty} \mathrm{Pr}_1\ \mu(\alpha_i)$ и действительные числа $c \in (0;1)$, l_b такие, что $\rho(\mathrm{Pr}_1\ \mu(\alpha_i), z_{j_i}) \le \dfrac{c^i}{1-c} l_b$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i \to \infty$, получаем, что $\lim_{i\to\infty} \mathrm{Pr}_1\ \mu(\alpha_i) = \lim_{i\to\infty} z_{j_i} = z$ и $z \in S(G)$ по определению.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что множество двоично-рациональных чисел отрезка $[0;1]$ и множество рациональных чисел отрезка $[0;1]$ не могут быть заданы ограниченными линейными *R*-системами, поскольку содержат не все свои предельные точки.

Множество, задаваемое *R*-системой, может быть конечным, счетным или континуальным. В общем случае множество, задаваемое *R*-системой, может не быть ограниченным и/или связным.

R-СИСТЕМЫ И R^*-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Наряду с *R*-преобразователями в [8] рассмотрены R^*-преобразователи, являющиеся обобщением первых. Основное отличие R^*-преобразователя заключается в том, что, получив на вход запись числа в позиционной системе счисления, где вес каждой цифры определяется ее расположением относительно точки, на выход он выдает некоторую «запись» числа, в которой каждой «цифре» соответствует собственный «вес». При этом в качестве цифр и весов разрешается использовать не только целые и рациональные, но и все действительные числа. Единственное ограничение — все веса должны быть положительны.

Напомним, что на вход $R^{(n)^*}$-преобразователь получает ω-слово $w = a_m a_{m-1} \ldots a_0 \nabla a_{-1} a_{-2} \ldots$ из множества $D = (\{0\} \cup 1\{0,1\}^*)\nabla\{0,1\}^\omega \cup (\{0\} \cup \cup \bar{1}\{0,\bar{1}\}^*)\nabla\{0,\bar{1}\}^\omega$, представляющее собой двоичную запись числа $\|a_m a_{m-1} \ldots a_0 \nabla a_{-1} a_{-2} \ldots\| = \sum_{i=-\infty}^{m} \|a_i\| \cdot 2^i$. $R^{(n)^*}$-преобразователь A задает функцию f_A типа $D \to R^n$, которой ставится в соответствие функция действительного аргумента $\tilde{f}_A$ типа $R \to R^n$, где $\tilde{f}_A(x) = f_A(w_x)$ при $w_x \in D \setminus (\{\nabla, 0, 1, \bar{1}\}^*(\{1\}^\omega \cup \{\bar{1}\}^\omega))$, $\|w_x\| = x$. Для чисел из $[0;1]$ одновременно с представлениями из множества D рассмотрим представления из множества $\nabla\{0,1\}^\omega$ и естественным образом продолжим функцию f_A на множество $\nabla\{0,1\}^\omega$. Функции f_A дополнительно поставим в соответствие функцию $\breve{f}_A$ типа $[0;1] \to R^n$, где $\breve{f}_A(x) = f_A(w_x)$ при $w_x \in \nabla\{1\}^\omega \cup \cup (\nabla\{0,1\}^\omega \setminus (\nabla\{0,1\}^*\{1\}^\omega))$, $\|w_x\| = x$. Назовем $R^{(n)^*}$-преобразователь A тривиальным, если на $\nabla\{0,1\}^\omega$ функция f_A всюду не определена.

Как будет доказано в следующей теореме, каждое множество, задаваемое линейной R-системой, совпадает со множеством действительных векторов, которые являются элементами из области значений функции f_A при аргументах из множества $\nabla\{0,1\}^{\omega}$ для некоторого нетривиального $R^{(n)^*}$-преобразователя A.

Теорема 3. По линейной R-системе $G=(n,V,B,P,S_0)$ можно построить конечный нетривиальный $R^{(n)^*}$-преобразователь $A=(K,H,q_0)$ такой, что $S(G)=f_A(\nabla\{0,1\}^{\omega})=\breve{f}_A([0;1])$ и функция f_A всюду определена на $\nabla\{0,1\}^{\omega}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что все нетерминалы R-системы G продуктивны и $q_0\notin V$. Пусть $S\to b_i(S_i,k_i)$, $i\in\overline{0,k}$, — все продукции множества P, содержащие нетерминал S в левой части, и $p_{S,i}$ — продукция нетерминала S с номером i.

Пусть m — максимальное количество продукций с одинаковой левой частью и число $t\in N$ таково, что $t\geq 2$ и $m\leq 2^t-2$.

Множество команд H_S преобразователя определим так, чтобы в состоянии S преобразователь сначала считывал t символов дробной части, пусть это слово $\alpha\in\{0,1\}^t$, а затем моделировал применение продукции $p_{S,\|\alpha\|}$ (если количество продукций с нетерминалом S в левой части меньше $\|\alpha\|+1$, примем $p_{S,\|\alpha\|}=p_{S,0}$):

$$H_S=\left\{(S,\alpha)a\to 0^n(S,\alpha a)1^{(n)}\mid S\in V,\ a\in\{0,1\},\ \alpha\in\{0,1\}^{\leq t-2}\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(S,\alpha)a\to\xi\mid a\in\{0,1\},\ \alpha\in\{0,1\}^{t-1},\ p_{\|\alpha a\|}=(S\to\xi)\right\},$$

$$K=\{q_0\}\cup(V\times\{0,1\}^{\leq t-1}),$$

$$H=\{q_0\nabla\to\nabla^{(n)}S_0 1^{(n)}\}\cup\bigcup_{S\in V}H_S,$$

где $\Sigma^{\leq t}$ обозначает множество слов в алфавите Σ длины не более t.

Исходя из способа построения, каждый бесконечный вывод точки $z\in S(G)$ соответствует работе построенного $R^{(n)^*}$-преобразователя на некотором ω-слове из $\nabla\{0,1\}^{\omega}$, которое однозначно восстанавливается по последовательности применяемых продукций. Кроме того, каждому бесконечному вычислению $R^{(n)^*}$-преобразователя над ω-словом из $\nabla\{0,1\}^{\omega}$ соответствует некоторый бесконечный вывод в R-системе, причем если результат работы преобразователя является представлением действительного вектора z (имеется в виду, что все координаты вектора конечны), то этот же вектор является результатом вывода в R-системе. Таким образом, указанные в формулировке теоремы множества совпадают. Поскольку все нетерминалы продуктивны, каждый конечный вывод в R-системе может быть продолжен до бесконечного, а значит, функция f_A всюду определена на $\nabla\{0,1\}^{\omega}$.

Теорема доказана.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 4. По конечному нетривиальному $R^{(n)^*}$-преобразователю $A=(K,H,q_0)$, единственной командой перехода которого из состояния q_0 является команда $q_0\nabla\to\nabla^{(n)}q_1k_0$, можно построить линейную R-систему $G=(n,V,B,P,S_0)$ такую, что $S(G)=f_A(\nabla\{0,1\}^{\omega})$.

Доказательство. Множество бесконечных выводов искомой R-системы должно соответствовать множеству бесконечных вычислений преобразователя над

ω-словами из $\nabla\{0,1\}^{\omega}$. Поэтому построим множество продукций так, чтобы в R-системе могло быть промоделировано каждое бесконечное вычисление. Положим

$$V = K,\ S_0 = q_0,$$

$$B = \{0^{(n)}\} \cup \{b \mid (qa \to bpk) \in H\},$$

$$P = \{q \to b(p,k) \mid (qa \to bpk) \in H,\ a \in \{0,1\}\} \cup \{q_0 \to 0^{(n)}(q_1, k_0)\}.$$

Из способа построения следует, что указанная R-система является искомой.

По определению $R^{(n)^*}$-преобразователь понимается как детерминированный. Недетерминированный аналог этого устройства назовем $V^{(n)^*}$-преобразователем, если дополнительно выполнено условие: отображение f_A является однозначным. Из доказательства теоремы 4 получаем следствие.

Следствие 1. По конечному нетривиальному недетерминированному $V^{(n)^*}$-преобразователю ($V^{(n)^*}$-преобразователю) $A = (K, H, q_0)$, единственной командой перехода которого из состояния q_0 является команда $q_0\nabla \to \nabla^{(n)} q_1 k_0$, можно построить линейную R-систему $G = (n, V, B, P, S_0)$ такую, что $S(G) = f_A(\nabla\{0,1\}^{\omega})$.

В результате имеем следующую теорему.

Теорема 5. Для конечного нетривиального недетерминированного $R^{(n)^*}$-преобразователя ($V^{(n)^*}$-преобразователя) $A = (K, H, q_0)$, единственной командой перехода которого из состояния q_0 является команда $q_0\nabla \to \nabla^{(n)} q_1 k_0$, существует конечный нетривиальный $R^{(n)^*}$-преобразователь B такой, что $f_A(\nabla\{0,1\}^{\omega}) = f_B(\nabla\{0,1\}^{\omega})$.

Для доказательства теоремы достаточно по преобразователю A с помощью следствия 1 построить R-систему, а затем, воспользовавшись теоремой 4, по R-системе построить $R^{(n)^*}$-преобразователь B.

В общем случае для R^*-преобразователя A имеет место лишь включение $\breve{f}_A([0,1]) \subseteq f_A(\nabla\{0,1\}^{\omega})$, поэтому при выполнении условия $S(G) = f_A(\nabla\{0,1\}^{\omega})$ равенство $S(G) = \breve{f}_A([0;1])$ может не иметь места. В качестве примера рассмотрим R-систему G и R^*-преобразователь A:

$$G = \big(1, \{S_0, S_1\}, \{0,1,2\}, \{S_0 \to 0(S_1, 1/2), S_0 \to 2(S_1, 1/2),\ S_1 \to 1(S_1, 1/2)\}, S_0\big),$$

$$A = \big(\{q_0, q_1, q_2\}, H, q_0\big),$$

где

$$H = \{q_0\nabla \to \nabla q_1 1,\ q_0 0 \to 0 q_2 1/2,\ q_1 1 \to 2 q_2 1/2,\ q_2 0 \to 0 q_2 1/2,\ q_2 1 \to 1 q_2 1/2\}.$$

Нетрудно видеть, что $S(G) = f_A(\nabla\{0,1\}^{\omega}) = [0;1] \cup [2;3]$, а функция $\breve{f}_A$ значение 1 не принимает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [9] показано, что существует непрерывная нигде не дифференцируемая на отрезке $[0;1]$ функция, задаваемая конечным R-преобразователем. Поскольку R-преобразователь является частным случаем R^*-преобразователя, из доказанных теорем следует, что ее график может быть задан линейной R-системой. Кроме того, с помощью R-систем можно задать множество Кантора, снежинку Кох, а также целый ряд геометрических фракталов.

С программистской точки зрения R-системы представляют удобный аппарат программирования приближений фрактальных множеств. Однако, несмотря на внешнюю простоту, даже линейные R-системы оставляют ряд нерешенных вопросов, например: 1) является ли множество, задаваемое линейной R-системой, связным; 2) каков коэффициент перекрытия задаваемого множества? Также представляет интерес исследование нелинейных R-систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barnsley M. Fractals everywhere. — Boston: Acad. Press, 1988. — 394 p.
2. Peitgen H.-J., Jurgens H., Saupe D. Chaos and fractals: New frontiers of science. — New York: Springer-Verlag, 1997. — 900 p.
3. Mauldin D., Urbanski M. Dimensions and measures in infinite iterated function systems // Proc. London Math. Soc. — 1996. — **73**, N 3. — P. 105–154.
4. Mauldin R. D., Williams S. C. Hausdorff dimension in graph directed constructions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1988. — **309**, N 2. — P. 811–829.
5. Culik II K., Karhumaki J. Finite automata, computing real functions // Siam J. Comput. — 1994. — **23**, N 4. — P. 789–814.
6. Лисовик Л.П. Применения конечных преобразователей для задания фрактальных кривых // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 3. — С. 11–22.
7. Лисовик Л.П., Шкаравская О.Ю. О вещественных функциях, задаваемых преобразователями // Там же. — 1998. — № 1. — С. 82–93.
8. Лисовик Л.П., Коваль Д.А., Мартинес С.В. R-преобразователи и фрактальные кривые // Там же. — 1999. — № 3. — С. 95–105.
9. Лисовик Л.П. Операции над реальными числами // Кибернетика. — 1990. — № 2. — С. 1–7, 25.

Поступила 05.04.2007