УДК 517.95

М.Ш. МАМАТОВ, М. ТУХТАСИНОВ

О ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ

Ключевые слова: *преследование, преследующий, убегающий, терминальное множество, управление преследования, управление убегания.*

Рассматривается управляемая распределенная система, описываемая параболическими уравнениями

$$z_t - Az = -u + v, \quad z\big|_{t=0} = f(x), \quad z\big|_{S_T} = 0, \tag{1}$$

где $z = z(x,t)$ — неизвестная функция; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n$, $n \geq 1$, $\Omega =$ $= \{x \in R^n\colon\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1,\ \dots,\ 0 \leq x_n \leq 1\}$ — n-мерный единичный куб с гранями, параллельными координатным плоскостям, $t \in [0,T]$, T — произвольная положительная константа;

$$Az = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(a_\alpha(x) \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} \right),$$

$a_\alpha(x)$ — непрерывная ограниченная функция в Ω. Предполагается, что существует положительная константа ν такая, что для произвольных $x \in \Omega$ выполнено неравенство $a_\alpha(x) \geq \nu$, $\alpha = 1,2,\dots,n$, $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ — управляющие функции из класса $L_2(Q_T)$, $Q_T = \{(x,t) | x \in \Omega, t \in (0,T)\}$ — открытый цилиндр в R^{n+1}; $f(x) \in L_2(\Omega)$, $S_T = \{(x,t) | x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)\}$ — боковая поверхность цилиндра Q_T, $\partial\Omega$ — граница области Ω, она считается кусочно-гладкой. Функцией $u(x,t)$ распоряжается первый (преследующий) игрок, функцией $v(x,t)$ — второй (преследуемый или убегающий), $u \in \overline{P}$, $v \in \overline{Q}$, $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ — непустые компакты в R^1. Выделено терминальное множество $\overline{M}_1 \subset R^1$.

Далее напомним, что $W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из элементов $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые по Ω обобщенные производные первого порядка; $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ — подпространство $W_2^1(\Omega)$, в котором множество всех гладких финитных функций плотное; $W_2^{1,0}(Q_T)$ — гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства $L_2(Q_T)$, имеющих квадратично-суммируемые по Q_T обобщенные производные z_{x_α}, $\alpha = 1,2,\dots,n$; $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ — подпространство $W_2^{1,0}(Q_T)$, в котором гладкие функции, равные нулю вблизи S_T, составляют плотное множество.

Известно [1, 2], что при выполнении перечисленных выше условий задача (1) имеет единственное обобщенное решение $z = z(x,t)$ в классе $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ при любых $u(x,t)$, $v(x,t) \in L_2(Q_T)$ и $f(x) \in L_2(\Omega)$.

В большинстве случаев получить достаточные условия для завершения преследования для задачи (1) невозможно. В связи с этим важное значение приобретают приближенные методы ее решения. Наиболее используемый метод численного решения задачи (1) — метод конечных разностей. В данной работе конечно-разностный метод применяется к решению задачи преследования, описываемого уравнением с распределенными параметрами вида (1).

Настоящая статья примыкает к работам [3–9]. Некоторые ее результаты анонсированы в [10, 11].

Определение 1. В задаче (1) возможно завершение $\varepsilon > 0$ — преследование из начального положения $f(\cdot)$, если существует число $T = T(f(\cdot))$ и функция $u(v, x, t) \in \overline{P}$, $v \in \overline{Q}$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, такие, что для произвольной функции $v_0(x, t) \in \overline{Q}$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, решение $z_0(x, t)$ задачи (1), где $u = u(v_0(x, t), x, t)$, $v = v_0(x, t)$, попадает на множество $\varepsilon I + \overline{M}_1$, т.е. при некотором $(\widetilde{x}, \widetilde{t})$, $\widetilde{x} \in \Omega$, $\widetilde{t} \in [0, T]$: $z_0(\widetilde{x}, \widetilde{t}) \in \in \varepsilon I + \overline{M}_1$, здесь $I = (-1, 1)$.

Разобьем евклидово пространство R^{n+1} переменных (x, t) плоскостями $x_{i_\alpha} = i_\alpha h$, $h = \frac{1}{r}$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \ldots$, и $t_k = kl$, $l = \frac{T}{\theta}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, на параллелепипеды $Q_{(i_\alpha, k)} = \omega_{(hl)} \times (kl(k+1)l) = \{(x, t): i_\alpha h < x_{i_\alpha} < (i_\alpha + 1)h,\ kl < t < (k+1)l\}$, r, θ — некоторые натуральные числа. Точки (x_i, t_k), которые принадлежат множеству Q_T, образуют сетку Q_{Thl}, являясь ее узлами. У каждого узла имеются соседние узлы. Если все они также принадлежат сетке Q_{Thl}, то узел $(x_i, t_k) = (i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h, kl)$ называется внутренним, в противном случае — граничным.

В качестве аппроксимации уравнения (1) примем сеточное уравнение

$$\frac{z_{i,k+1} - z_{i,k}}{l} = \tag{2}$$
$$= \frac{1}{h^2} \sum_{\alpha=1}^{n} \left[a_{\alpha(i_\alpha - \frac{1}{2})} z_{i_\alpha - 1, k} - \left(a_{\alpha(i_\alpha - \frac{1}{2})} + a_{\alpha(i_\alpha + \frac{1}{2})} \right) z_{i,k} + a_{\alpha(i_\alpha + \frac{1}{2})} z_{i_\alpha + 1, k} \right] - u_{i,k} + v_{i,k},$$

где h и l — значения шагов соответственно по x и t, $i_\alpha = 1, 2, \ldots, r-1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, \theta - 1$:

$$z_{i,k} = z_{i_1, i_2, \ldots, i_n, k} = z(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h, kl),$$

$$z_{i_\alpha - 1, k} = z(i_1 h, i_2 h, \ldots,\ i_{\alpha-1} h, (i_\alpha - 1)h, i_{\alpha+1} h, \ldots, i_n h, kl),$$

$$z_{i_\alpha + 1, k} = z(i_1 h, i_2 h, \ldots,\ i_{\alpha-1} h, (i_\alpha + 1)h, i_{\alpha+1} h, \ldots,\ i_n h, kl),$$

$$u_{i,k} = u(i_1 h, i_2 h, \ldots,\ i_n h, kl),$$

$$v_{i,k} = v(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h, kl),$$

$$a_{\alpha(i_\alpha - \frac{1}{2})} = a_\alpha \left(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_{\alpha-1} h, \left(i_\alpha - \frac{1}{2} \right) h, i_{\alpha+1} h, \ldots,\ i_n h \right),$$

$$a_{\alpha(i_\alpha + \frac{1}{2})} = a_\alpha \left(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_{\alpha-1} h, \left(i_\alpha + \frac{1}{2} \right) h, i_{\alpha+1} h, \ldots,\ i_n h \right).$$

Ясно, что условие $z|_{t=0} = f(x)$ можно заменить условием $z_{i,0} = f(i_1 h, i_2 h, \ldots,\ i_n h)$, $i_\alpha = 1, 2, \ldots, r-1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$.

Точно так же для граничных узловых точек $(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h, kl)$ условие $z|_{S_T} = 0$ можно заменить условием $z_{i,k} = z_{i_1, i_2, \ldots, i_n, k} = 0$, $i_\alpha = 0, r$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, \theta$.

Нетрудно убедиться [12], что решение $z_{i,k}$ разностной задачи (2) сходится к решению z исходной задачи (1). При этом имеет место оценка скорости сходимости

$$||(z)_{hl} - z_{i,k}||_{\Phi_{hl}} \le K_1 l + K_2 h^2, \tag{3}$$

где $(z)_{hl}$ — значения точного решения задачи (1) в узлах сетки, Φ_{hl} — пространство сеточных функций, $||\cdot||_{\Phi_{hl}}$ — норма этого пространства, K_1, K_2 — константы.

Теперь для удобства запишем задачу (2) в матричном виде

$$z_{k+1} = C z_k - l u_k + l v_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \theta - 1; \quad z_0 = \overline{f}, \tag{4}$$

где z_k, u_k, v_k — H-мерные матрицы-столбцы, H — общее число узлов, принадлежащих одному слою, т.е. при данном $t = kl$, для которых записывается уравнение (2),

$z_k = (z_{1,1,\dots,1,k}, z_{1,1,\dots,2,k}, \dots, z_{1,1,\dots,r-1,k}, \dots, z_{i_1,i_2,\dots,i_n,k}, \dots, z_{r-1,r-1,\dots,r-1,k})^T$,

$u_k = (u_{1,1,\dots,1,k}, u_{1,1,\dots,2,k}, \dots, u_{1,1,\dots,r-1,k}, \dots, u_{i_1,i_2,\dots,i_n,k}, \dots, u_{r-1,r-1,\dots,r-1,k})^T$,

$v_k = (v_{1,1,\dots,1,k}, v_{1,1,\dots,2,k}, \dots, v_{1,1,\dots,r-1,k}, \dots, v_{i_1,i_2,\dots,i_n,k}, \dots, v_{r-1,r-1,\dots,r-1,k})^T$.

Соответственно

$$\bar{f} = (f(h,h,\dots,h), f(h,h,\dots,2h), \dots, f(h,h,\dots,(r-1)h), \dots$$
$$\dots, f(i_1 h, i_2 h, \dots, i_n h), \dots, f((r-1)h,(r-1)h,\dots,(r-1)h))^T$$

— начальный вектор, $n(r-1)=H$, C — H-мерная квадратная трехдиагональная матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} c & \bar{c} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \underline{c} & c & \bar{c} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \underline{c} & c & \bar{c} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \underline{c} & c & \bar{c} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \underline{c} & c & \bar{c} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \underline{c} & c \end{pmatrix},$$

где

$$\underline{c} = \frac{l}{h^2} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha(i_\alpha - \frac{1}{2})}; \; c = 1 - \frac{l}{h^2} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_{\alpha(i_\alpha - \frac{1}{2})} + a_{\alpha(i_\alpha + \frac{1}{2})} \right); \; \bar{c} = \frac{l}{h^2} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha(i_\alpha + \frac{1}{2})}.$$

Пусть теперь в R^H выделено терминальное множество M.

Определение 2. Будем считать, что в игре (4) из точки $z_0 = \bar{f} \in R^H \setminus M$ можно завершить преследование за $N \le \theta$ шагов, если по любой последовательности $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{N-1}$ управления убегания можно построить такую последовательность $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N-1}$ управления преследования, что решение $(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N)$ уравнения $z_{k+1} = Cz_k - l\bar{u}_k + l\bar{v}_k$, $k = 0,1,\dots, N-1$, при некотором $d \le N$ попадает на M: $\bar{z}_d \in M$.

Предположим, что в игре (4) терминальное множество имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — $(H-\gamma)$-мерное линейное подпространство R^H, M_1 — подмножество подпространства L-ортогонального дополнения M_0 в R^H. Далее, Π обозначает матрицу оператора ортогонального проектирования из R^H на L, а $A+B$ и $A \overset{*}{-} B$ — алгебраическую сумму и геометрическую разность множеств A, B соответственно. Пусть

$$P = \underbrace{\bar{P} \times \bar{P} \times \dots \times \bar{P}}_{H}, \quad Q = \underbrace{\bar{Q} \times \bar{Q} \times \dots \times \bar{Q}}_{H}, \quad M_1 = \underbrace{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1 \times \dots \times \bar{M}_1}_{\gamma}, \quad 1 \le \gamma \le H,$$

$$W(0) = \{0\}, \quad W(m) = \sum_{k=0}^{m-1} [\Pi C^k l P \overset{*}{-} \Pi C^k l Q], \quad W_1(m) = M_1 + W(m), \tag{5}$$

где $m = 0,1,\dots,\theta$.

Теорема 1. Предположим, что N — наименьшее из тех натуральных чисел m, для каждого из которых имеет место включение $\Pi C^m z_0 \in W_1(m)$. Тогда из точки z_0 можно завершить преследование за N шагов.

Доказательство. Из (5) и условия теоремы следует существование таких $a(k) \in \Pi C^k l P \overset{*}{-} \Pi C^k l Q$ и $b \in M_1$, что

$$\Pi C^m z_0 = b + \sum_{k=0}^{m-1} a(k). \tag{6}$$

Пусть $v = \overline{v}_k = \overline{v}(k)$, $0 \le k \le m-1$, — произвольное допустимое управление убегающего игрока, управление преследующего игрока $u = \overline{u}_k = \overline{u}(k)$ построим как решение уравнения

$$\Pi C^{m-k-1} l\overline{u}(k) - \Pi C^{m-k-1} l\overline{v}(k) = a(k), \quad 0 \le k \le m-1.$$

Ясно, что это уравнение имеет решение по выбору $a(k)$, так как $\overline{v}(k) \in Q$ и $\overline{u}(k) \in P$. Подставляя $v = \overline{v}(k) = \overline{v}_k$ и $u = \overline{u}(k) = \overline{u}_k$ в (4), получаем

$$z_1 = Cz_0 - l\overline{u}_0 + l\overline{v}_0,$$

$$z_2 = Cz_1 - l\overline{u}_1 + l\overline{v}_1 = C^2 z_0 - Cl\overline{u}_0 + Cl\overline{v}_0 - l\overline{u}_1 + l\overline{v}_1, \ldots,$$

$$z_m = C^m z_0 - C^{m-1} l\overline{u}_0 + C^{m-1} l\overline{v}_0 - C^{m-2} l\overline{u}_1 + C^{m-2} l\overline{v}_1 - \ldots - l\overline{u}_{m-1} + l\overline{v}_{m-1}.$$

Отсюда, применяя к обеим частям равенства оператора проектирования Π из равенства (6), имеем

$$\Pi z_m = \Pi C^m z_0 - \Pi C^{m-1} l\overline{u}_0 + \Pi C^{m-1} l\overline{v}_0 - \ldots$$

$$\ldots - \Pi l\overline{u}_{m-1} + \Pi l\overline{v}_{m-1} = \Pi C^m z_0 - \sum_{k=0}^{m-1} a(k) = b \in M_1.$$

Значит, $\Pi z_m = b \in M_1$, т.е. $z_m \in M$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь

$$W_2(0) = M_1, \quad W_2(1) = [W_2(0) + \Pi lP] \overset{*}{-} \Pi lQ, \ldots,$$

$$W_2(m) = [W_2(m-1) + \Pi C^{m-1} lP] \overset{*}{-} \Pi C^{m-1} lQ, \quad m = 0, 1, \ldots, \theta. \tag{7}$$

Теорема 2. Если N — наименьшее из тех натуральных чисел m, для каждого из которых имеет место включение $\Pi C^m z_0 \in W_2(m)$, то из точки z_0 можно завершить преследование за N шагов.

Доказательство. Пусть $\overline{v}_0, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{m-1}$, $\overline{v}_k \in Q$, $0 \le k \le m-1$, — произвольная последовательность. Для конкретного $\overline{v}_0$ по условию теоремы и в силу (7) получим включение

$$\Pi C^m z_0 + \Pi C^{m-1} l\overline{v}_0 \in W_2(m-1) + \Pi C^{m-1} lP.$$

Теперь в качестве $\overline{u}_0$ берем тот элемент из P, для которого сохранялось последнее включение, в результате получаем

$$\Pi C^m z_0 + \Pi C^{m-1} l\overline{v}_0 - \Pi C^{m-1} l\overline{u}_0 \in W_2(m-1).$$

Из этого включения, учитывая равенство (4), имеем

$$\Pi C^{m-1}(Cz_0 - l\overline{u}_0 + l\overline{v}_0) \in W_2(m-1),$$

т.е. $\Pi C^{m-1} z_1 \in W_2(m-1)$.

Если управление $\overline{v}_1$ становится известным, то изложенным выше способом можно построить управление $\overline{u}_1$, обеспечивающее включение $\Pi C^{m-2} z_2 \in W_2(m-2)$. Далее, рассуждая аналогично, получаем $\Pi z_m \in W_2(0) = M_1$, значит, $z_m \in M$, что и требовалось доказать.

Пусть $\beta_m(\cdot) = \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}\colon\ \beta_k \ge 0,\ \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k = 1\}$

$$\text{и } W(\beta_m(\cdot)) = \sum_{k=0}^{m-1} [(\beta_k M_1 + \Pi C^k lP) \overset{*}{-} \Pi C^k lQ]$$

для $m = 1, 2, \ldots, \theta$. Положим

$$W_3(0) = M_1, \quad W_3(m) = \bigcup_{\beta_m(\cdot)} W(\beta_m(\cdot)) \tag{8}$$

для $m = 1, 2, \ldots, \theta$.

Теорема 3. Если M_1 — выпуклое множество и N — наименьшее из тех натуральных чисел m, для каждого из которых имеет место включение

$$\Pi C^m z_0 \in W_3(m), \tag{9}$$

то из точки z_0 можно завершить преследование за N шагов.

Доказательство. Вместо включения (9), имея в виду (8), рассмотрим эквивалентное ему включение $\Pi C^m z_0 \in W(\overline{\beta}_m(\cdot))$, существование $\overline{\beta}_m(\cdot) = \{\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{m-1}\}$ следует из (8).

Отсюда получим

$$\Pi C^m z_0 \in \sum_{k=0}^{m-2} [(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi C^k lP) \overset{*}{-} \Pi C^k lQ] + (\overline{\beta}_{m-1} M_1 + \Pi C^{m-1} lP) \overset{*}{-} \Pi C^{m-1} Q. \tag{10}$$

Пусть теперь $\overline{v}_0, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{m-1}$, $\overline{v}_k \in Q$, $0 \le k \le m-1$, — произвольная последовательность. В силу (10) для $\overline{v}_0$ получим

$$\Pi C^m z_0 + \Pi C^{m-1} l\overline{v}_0 \in \sum_{k=0}^{m-2} [(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi C^k lP) \overset{*}{-} \Pi C^k lQ] + \overline{\beta}_{m-1} M_1 + \Pi C^{m-1} lP. \tag{11}$$

Управление $\overline{u}_0 \in P$ построим как решение уравнения

$$\Pi C^{m-1} l\overline{v}_0 - \Pi C^{m-1} l\overline{u}_0 = \overline{\beta}_{m-1} a_1, \qquad a_1 \in M_1.$$

Далее, в силу (11) имеем

$$\Pi C^{m-1}(Cz_0 - l\overline{u}_0 + l\overline{v}_0) \in \sum_{k=0}^{m-2} [(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi C^k lP) \overset{*}{-} \Pi C^k lQ] + \overline{\beta}_{m-1} a_1.$$

Поэтому в силу (4) получим

$$\Pi C^{m-1} z_1 \in \sum_{k=0}^{m-2} [(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi C^k lP) \overset{*}{-} \Pi C^k lQ] + \overline{\beta}_{m-1} a_1.$$

Точно так же, если управление $\overline{v}_1$ становится известным, то изложенным выше способом можно построить управление $\overline{u}_1$, обеспечивающее включение

$$\Pi C^{m-2} z_2 \in \sum_{k=0}^{m-3} [(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi C^k lP) \overset{*}{-} \Pi C^k lQ] + \overline{\beta}_{m-1} a_1 + \overline{\beta}_{m-2} a_2, \qquad a_2 \in M_1,$$

и т.д. Таким образом, имеем

$$\Pi z_m = \overline{\beta}_{m-1} a_1 + \overline{\beta}_{m-2} a_2 + \ldots + \overline{\beta}_0 a_m \in \overline{\beta}_{m-1} M_1 + \overline{\beta}_{m-2} M_1 + \ldots + \overline{\beta}_0 M_1 \in$$
$$\in (\overline{\beta}_{m-1} + \overline{\beta}_{m-2} + \ldots + \overline{\beta}_0) M_1 = M_1,$$

отсюда $z_m \in M$.

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть в (3) $K_1 l + K_2 h^2 < \varepsilon$ и в игре (4) из точки $z_0 = \overline{f}$ возможно завершение преследования в смысле определения 2. Тогда в игре (1) из начального положения $z|_{t=0} = z(x,0) = f(x)$ можно завершить преследование в смысле определения 1.

Доказательство. Пусть в игре (4) из точки $z_0 = \overline{f}$ можно завершить преследование за $N \le \theta$ шагов. Тогда из определения 2 следует, что по любой последовательности $\overline{v}_0, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{N-1}$, $\overline{v}_k \in Q$, $0 \le k \le N-1$, управления убегания можно построить такую последовательность $\overline{u}_0, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{N-1}$, $\overline{u}_k \in P$, $0 \le k \le N-1$, управления преследования, что решение $(\overline{z}_0, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_N)$ уравнения $z_{k+1} = Cz_k - l\overline{u}_k + l\overline{v}_k$, $k = 0,1, \ldots, N-1$, при некотором $d \le N$ попадает на M: $\overline{z}_d \in M$. Пусть теперь в игре (1) $v = \overline{v}(x,t) \in \overline{Q}$, $(x,t) \in Q_T$ — произвольное управление убегающего игрока из класса $L_2(Q_T)$. Зная управление убегающего $v = \overline{v}(x,t)$, можем определить $\overline{v}_{i_1, i_2, \ldots, i_n, k}$ как значение этой функции в узловых точках сетки Q_{Thl}, т.е.

$$v_k = \overline{v}_k = (\overline{v}_{1,1,\ldots,1,k}, \overline{v}_{1,1,\ldots,2,k}, \ldots, \overline{v}_{1,1,\ldots,r-1,k}, \ldots, \overline{v}_{i_1, i_2, \ldots, i_n, k}, \ldots, \overline{v}_{r-1,r-1,\ldots,r-1,k}).$$

Отсюда в силу условия теоремы можно построить управление преследователя в игре (4), обеспечивающее завершение преследования

$u_k = \bar{u}_k = (\bar{u}_{1,1,\ldots,1,k}, \bar{u}_{1,1,\ldots,2,k}, \ldots, \bar{u}_{1,1,\ldots,r-1,k}, \ldots, \bar{u}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,k}, \ldots, \bar{u}_{r-1,r-1,\ldots,r-1,k})$.

Теперь в игре (1) управление преследующего игрока $u = \bar{u}(x,t)$ построим следующим образом: $\bar{u}(x,t) = \{\bar{u}_{i,k} = \bar{u}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,k}:\ i_\alpha h \le x_{i_\alpha} < (i_\alpha + 1)h,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, r-1,$ $\alpha = 1, 2, \ldots, n,\ kl \le t < (k+1)l,\ k = 0, 1, \ldots, \theta - 1\}$. Ясно, что $u \in P$ и $\bar{u}(x,t) \in L_2(Q_T)$. Подставляя $v = \bar{v}(x,t), u = \bar{u}(x,t)$ в (1), получаем обычное дифференциальное уравнение, точно так же, подставляя $\bar{v}_{i,k} = \bar{v}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,k}, \bar{u}_{i,k} = \bar{u}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,k}$ в (2), получаем сеточное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1).

Пусть $(\bar{z})_{hl}$ — значение точного решения, соответствующее управлениям $v = \bar{v}(x,t), u = \bar{u}(x,t)$ задачи (1) в узлах сетки Q_{Thl}, $\bar{z}_{i,k}$ — решение, соответствующее управлениям $\bar{v}_{i,k} = \bar{v}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,k}, \bar{u}_{i,k} = \bar{u}_{i_1,i_2,\ldots,i_n,k}$ разностной задачи (2), тогда из (3) и условия теоремы имеем

$$||(z)_{hl} - \bar{z}_{i,k}||_{\Phi_{hl}} \le K_1 l + K_2 h^2 < \varepsilon,$$

а поскольку $\bar{z}_{i,k} \in M_1$, получаем $(z)_{hl} - \bar{z}_{i,k} \in \varepsilon I$, $(z)_{hl} \in \varepsilon I + \bar{z}_{i,k}$, $(z)_{hl} \in \varepsilon I + M_1$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Теоремы 1–4 легко обобщаются на более широкий класс дифференциальных игр, например при

$$Az = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(a_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(x) \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} - c(x) z,$$

с разрывными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л а д ы ж е н с к а я О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
2. Б у т к о в с к и й А. Г. Методы управления распределенными системами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
3. И л ь и н В. А. Граничное управление процессом колебаний струны на двух концах // ДАН. — 1999. — **369**, № 5. — С. 592–596.
4. И л ь и н В. А. Т и х о м и р о в В. В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // Диф. уравнения. — 1999. — **35**, № 5. — С. 692–704.
5. О с и п о в Ю. С., О х е з и н С. П. К теории дифференциальных игр в параболических системах // Докл. АН СССР. — 1976. — **226**, № 6. — С. 1267–1270.
6. К о р о т к и й А. И. О с и п о в Ю. С. Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами // ПММ. — 1978. — **42**, вып. 4. — С. 599–605.
7. С а т и м о в Н., М а м а т о в М. Ш. Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих // Диф. уравнения. — 1990. — **26**, № 9. — С. 1541–1551.
8. С а т и м о в Н., Т у х т а с и н о в М. О некоторых игровых задачах в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка // Там же. — 2005. — **41**, № 8, — С. 1114-1121.
9. Т у х т а с и н о в М. О некоторых задачах теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами // ПММ. — 1995. – **59**, вып. 6. — С. 979–984.
10. М а м а т о в М. Ш. Об одной игровой задаче преследования, описываемой уравнениями в частных производных // Тез. докл. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». — 28 мая–2 июня 2007 года. — Новосибирск, 2007. — С. 223–224.
11. М а м а т о в М. Ш., Т у х т а с и н о в М. Применение метода конечных разностей к задаче преследования в системах с распределенными параметрами // Тез. докл. Междунар. конф. «Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании». — 22–24 ноября 2007 года. — Екатеринбург, 2007. — С. 36–39.
12. М а р ч у к Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. — 608 с.

Поступила 11.08.2008