УДК 519.8

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, Е.Е. ГУРЕВСКИЙ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ключевые слова: *многокритериальность, целочисленное квадратичное программирование, множество Парето, устойчивость, стабилизация, регуляризация, ε-стабилизация, ε-регуляризация.*

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1–3], что скалярные (однокритериальные) линейные задачи дискретной оптимизации всегда устойчивы. Существование неустойчивых (некорректно поставленных по Адамару) векторных задач дискретной оптимизации [1, 2, 4–6] естественно приводит к необходимости создания регуляризирующего оператора, представляющего собой конкретный вид возмущений исходных данных дискретной задачи, чтобы, как и в случае задачи линейного программирования [7, 8], заменить, возможно, неустойчивую задачу серией возмущенных устойчивых. Первый результат в этом направлении получен в работе [9], где на основе теории конусов перспективных направлений [1] предложена регуляризация и по векторному критерию и по ограничениям векторной задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) поиска множества Парето на ограниченном множестве допустимых альтернатив. При этом регуляризация по векторному критерию, осуществляемая путем скалярного параметра возмущения, предполагает замену векторной задачи ЦЛП возмущенной задачей с множеством Слейтера, содержащимся в множестве Парето исходной задачи. В дальнейшем этот результат обобщен в [10, 11], где указан не скалярный, а векторный параметр возмущения исходных данных задачи, позволяющий создать регуляризирующий оператор, который переводит, возможно, неустойчивую векторную задачу ЦЛП в серию не только устойчивых, но одновременно и эквивалентных задач, т.е. задач с первоначальным множеством Парето. Обсуждение и сравнение результатов работ [9, 10] приведено в [2, с. 155–163].

В настоящей статье методика, разработанная в [10], применена к векторной задаче целочисленного квадратичного программирования (ЦКП), состоящей в поиске множества Парето. Предложен прием регуляризации и ε-регуляризации таких задач.

Отметим, что в [12, 13] описан прием регуляризации и ε-регуляризации векторных задач целочисленного линейного и квадратичного программирования с лексикографическим принципом оптимальности.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛЕММЫ

Рассмотрим векторную (m-критериальную) задачу ЦКП вида

$$Z^m(A, b): \min\{f(x, A, b): x \in X\}, \quad m \geq 1,$$

где $f(x, A, b) = (f_1(x, A_1, b_1), f_2(x, A_2, b_2), \ldots, f_m(x, A_m, b_m))$, $f_i: \mathbf{R}^{n\times n} \times \mathbf{R}^n \to$ $\to \mathbf{R}$, — квадратичные функции (частные критерии), т.е.

$$f_i(x, A_i, b_i) = \langle A_i x, x\rangle + \langle b_i^{\mathrm{T}}, x\rangle, \; i \in N_m = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Здесь $X \subset \mathbf{Z}^n$ — заданное конечное множество целочисленных точек (вектор-столбцов) в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$; $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{R}^{m \times n \times n}$ — трехиндексная матрица размерности $m \times n \times n$, $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $i \in N_m$, — ее двухмерные сечения; $b \in \mathbf{R}^{m \times n}$ — матрица со строками $b_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m$, $|X| > 1$.

Задачу $Z^m(A, b)$ будем рассматривать как задачу поиска множества Парето (множества эффективных точек) $P^m(A, b)$, которое задается формулой

$$\mathrm{P^m(A, b) = \{x \in X : \pi(x, A, b) = \varnothing\}},$$

где

$$\pi(x, A, b) = \{x' \in X : q(x, x', A, b) \geq \mathbf{0} \ \& \ q(x, x', A, b) \neq \mathbf{0}\},$$

$$q(x, x', A, b) = (q_1(x, x', A_1, b_1), q_2(x, x', A_2, b_2), \ldots, q_m(x, x', A_m, b_m)),$$

$$q_i(x, x', A_i, b_i) = f_i(x, A_i, b_i) - f_i(x', A_i, b_i), \ i \in N_m,$$

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^m.$$

Очевидно, что $P^1(A, b)$ является множеством оптимальных решений скалярной квадратичной задачи, которая имеет широкую область приложений. Среди таких задач — квадратичная задача о назначении, многие известные оптимизационные задачи на графах, играющие важную роль при проектировании электронной аппаратуры: размещения, разбиения, компоновки, упаковки и др. [14].

Для любой пары $(A, b) \in \mathbf{R}^{m \times n \times n} \times \mathbf{R}^{m \times n}$ справедливо включение

$$P^m(A, b) \subseteq \mathrm{Sl}^m(A, b). \tag{1}$$

Здесь $\mathrm{Sl}^m(A, b)$ — множество Слейтера (множество слабо эффективных точек)

$$\mathrm{Sl^m(A, b) = \{x \in X : \sigma(x, A, b) = \varnothing\}},$$

где

$$\sigma(x, A, b) = \{x' \in X : \forall i \in N_n \ (q_i(x, x', A_i, b_i) > 0)\}.$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\overline{P^m}(A, b) = X \setminus P^m(A, b)$.

Непосредственно из приведенных обозначений вытекает следующая лемма.

Лемма 1. Если для всякого вектора $x \in \overline{P^m}(A, b)$ справедливо включение $\pi(x, A, b) \subseteq \sigma(x, C, d)$, то $\mathrm{Sl}^m(C, d) \subseteq P^m(A, b)$.

Для любого натурального числа k в пространстве $\mathbf{R}^k$ зададим нормы l_∞ и l_1, определяемые соответственно по формулам

$$\|y\| = \max\{|y_i| : i \in N_k\}, \ \|y\|_* = \sum_{i=1}^{k} |y_i|.$$

Под нормой матрицы будем понимать норму вектора, составленного из ее компонент.

Лемма 2. Для любых $i \in N_m$ и $x, x' \in X$ справедливо неравенство

$$q_i(x, x', A_i, b_i) \leq (\|A\| + \|b\|)\|x - x'\|_*^2.$$

Действительно, воспользовавшись очевидными неравенствами

$$\forall B \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad (|\langle Bx, x\rangle| \leq \|B\| \cdot \|x\|_*^2),$$

$$\forall c \in \mathbf{R}^n \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad (|\langle c, x\rangle| \leq \|c\| \cdot \|x\|_*),$$

$$\forall x \in \mathbf{Z}^n \quad \forall x' \in \mathbf{Z}^n \quad (\|x - x'\|_* \leq \|x - x'\|_*^2),$$

легко выводим

$$q_i(x,x',A_i,b_i) \le |q_i(x,x',A_i,b_i)| \le |\langle A_i(x-x'), x-x'\rangle| + |\langle b_i, x-x'\rangle| \le$$
$$\le \|A_i\|\cdot\|x-x'\|_*^2 + \|b_i\|\cdot\|x-x'\|_* \le (\|A\|+\|b\|)\|x-x'\|_*^2.$$

Задачу $Z^m(A,b)$ назовем устойчивой (в терминологии [2, 4–6] T_3-устойчивой по векторному критерию), если существует такое число $\varepsilon>0$, что

$$\forall\ (A',b')\in\Xi(\varepsilon)\ \ (P^m(A+A',b+b')\subseteq P^m(A,b)), \tag{2}$$

где множество возмущающих пар $\Xi(\varepsilon)$ задается равенством

$$\Xi(\varepsilon)=\{(A',b')\in\mathbf{R}^{m\times n\times n}\times\mathbf{R}^{m\times n}:\max\{\|A'\|,\|b'\|\}<\varepsilon\}.$$

Очевидно, что задача $Z^m(A,b)$ устойчива, если $\overline{P^m}(A,b)=\varnothing$. В дальнейшем этот случай исключим из рассмотрения, а задачу, для которой $\overline{P^m}(A,b)\ne\varnothing$, назовем нетривиальной.

Ясно, что в частном случае, когда $m=1$, множество Парето совпадает с множеством Слейтера и потому согласно [5] скалярная задача ЦКП устойчива. В связи с этим будем предполагать, что число частных критериев $m\ge 2$.

Далее понадобится следующий известный результат [5].

Лемма 3. Существует такое число $\varepsilon>0$, что для любой пары $(A',b')\in\Xi(\varepsilon)$ выполняется включение

$$\mathrm{Sl}^m(A+A',b+b')\subseteq \mathrm{Sl}^m(A,b).$$

Иными словами, лемма 3 утверждает, что векторная задача ЦКП нахождения множества Слейтера всегда устойчива.

Пусть $(C,d)\in\mathbf{R}^{m\times n\times n}\times\mathbf{R}^{m\times n}$. Отображение $\varphi:\mathbf{R}^{m\times n\times n}\times\mathbf{R}^{m\times n}\to\mathbf{R}^{m\times n\times n}\times$ $\times\,\mathbf{R}^{m\times n}$, которое определяется по правилу

$$\forall (A,b)\in\mathbf{R}^{m\times n\times n}\times\mathbf{R}^{m\times n}\quad(\varphi(A,b)=(A+C,b+d)),$$

назовем (C,d)-оператором. Тем самым (C,d)-оператор всякую задачу $Z^m(A,b)$ переводит в задачу $Z^m(A+C,b+d)$.

Будем говорить, что (C,d)-оператор стабилизирует задачу $Z^m(A,b)$, если существует такое число $\varepsilon>0$, что справедлива формула

$$\forall (A',b')\in\Xi(\varepsilon)\ \ (P^m(A+C+A',b+d+b')\subseteq P^m(A,b)). \tag{3}$$

Будем использовать обозначение $\mathbf{R}_>=\{u\in\mathbf{R}:u>0\}$.

Для всякого вектора $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\in\mathbf{R}_>^m$ и любого числа $\tau>0$ введем в рассмотрение трехиндексную матрицу $C(A,\lambda,\tau)\in\mathbf{R}^{m\times n\times n}$ с одинаковыми сечениями

$$C_i=\tau\sum_{k=1}^m\lambda_k A_k,\ \ i\in N_m,$$

и матрицу $d(b,\lambda,\tau)\in\mathbf{R}^{m\times n}$ с одинаковыми строками

$$d_i=\tau\sum_{k=1}^m\lambda_k b_k,\ \ i\in N_m.$$

Тогда очевидны равенства

$$q_i(x,x',C_i,d_i)=\tau\sum_{k=1}^{m}\lambda_k q_k(x,x',A_k,b_k),\ i\in N_m. \tag{4}$$

Эти равенства влекут за собой два эквивалентных очевидных утверждения, которые сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 4. Пусть $x,x'\in X$, $\lambda\in\mathbf{R}^m_>$, $\tau>0$. Если $q(x,x',A,b)=\mathbf{0}$, то $q(x,x',A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau))=\mathbf{0}$. Если $q(x,x',A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau))\neq\mathbf{0}$, то $q(x,x',A,b)\neq\mathbf{0}$.

Пусть $A,C\in\mathbf{R}^{m\times n\times n}$, а $b,d\in\mathbf{R}^{m\times n}$. Задачи $Z^m(A,b)$ и $Z^m(C,d)$ назовем эквивалентными, если $P^m(A,b)=P^m(C,d)$. В этом случае пишем $Z^m(A,b)\sim\sim Z^m(C,d)$. Будем говорить, что (C,d)-оператор регуляризирует задачу $Z^m(A,b)$, если $Z^m(A,b)\sim Z^m(A+C,b+d)$ и задача $Z^m(A+C,b+d)$ устойчива. Ясно, что (C,d)-оператор регуляризирует задачу $Z^m(A,b)$, если он стабилизирует ее и $Z^m(A,b)\sim Z^m(A+C,b+d)$.

2. СТАБИЛИЗАЦИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Введенные в разд. 1 матрицы $C(A,\lambda,\tau)$ и $d(b,\lambda,\tau)$ позволяют использовать далее $(C(A,\lambda,\tau),d(b,\lambda,\tau))$-оператор.

Теорема 1. $(C(A,\lambda,\tau),d(b,\lambda,\tau))$-оператор стабилизирует векторную нетривиальную задачу ЦКП $Z^m(A,b)$, $m\geq 2$, при любых $\lambda\in\mathbf{R}^m_>$ и $\tau>0$, причем

$$\mathrm{Sl}^m(A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau))\subseteq P^m(A,b). \tag{5}$$

Доказательство. Учитывая нетривиальность задачи $Z^m(A,b)$, заключаем, что существует вектор $x\in\overline{P^m}(A,b)$. Тогда $\pi(x,A,b)\neq\varnothing$ и для любого решения $x'\in\pi(x,A,b)$, используя (4), получаем

$$q_i(x,x',A_i+C_i,b_i+d_i)=q_i(x,x',A_i,b_i)+q_i(x,x',C_i,d_i)\geq$$

$$\geq q_i(x,x',C_i,d_i)=\tau\sum_{k=1}^{m}\lambda_k q_k(x,x',A_k,b_k)>0,\ i\in N_m.$$

Поэтому согласно определению множества $\sigma(x,A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau))$ имеем $x'\in\sigma(x,A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau))$. Таким образом, справедливы соотношения

$$\forall x\in\overline{P^m}(A,b)\ \ (\pi(x,A,b)\subseteq\sigma(x,A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau)).$$

Отсюда в силу леммы 1 выводим (5).

Далее согласно лемме 3 существует такое число $\varepsilon>0$, что

$$\forall(A',b')\in\Xi(\varepsilon)\ \ (\mathrm{Sl}^m(A+C(A,\lambda,\tau)+A',b+d(b,\lambda,\tau)+b')\subseteq$$

$$\subseteq\mathrm{Sl}^m(A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau))).$$

Следовательно, учитывая (1) и (5), заключаем, что

$$\exists\varepsilon>0\ \ \forall(A',b')\in\Xi(\varepsilon)\ \ (P^m(A+C(A,\lambda,\tau)+A',b+d(b,\lambda,\tau)+b')\subseteq P^m(A,b)),$$

т.е. $(C(A,\lambda,\tau),d(b,\lambda,\tau))$-оператор стабилизирует задачу $Z^m(A,b)$.

Теорема 1 доказана.

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$\Delta_{\min} = \min\{q_i(x, x', A_i, b_i) > 0 : x, x' \in X, i \in N_m\},$$

$$\Delta_{\max} = \max\{\| x - x' \|_*^2 : x, x' \in X\},$$

$$\gamma = \frac{\Delta_{\min}}{m \|\lambda\| (\|A\| + \|b\|) \Delta_{\max}}.$$

Поскольку задача $Z^m(A, b)$ предполагается нетривиальной, то $\|A\| + \|b\| > 0$ и $\Delta_{\min} > 0$.

Теорема 2. Для любого вектора $\lambda \in \mathbf{R}_>^m$ и всякого числа τ, удовлетворяющего неравенствам

$$0 < \tau < \gamma, \tag{6}$$

$(C(A, \lambda, \tau), d(b, \lambda, \tau))$-оператор регуляризирует векторную нетривиальную задачу ЦКП $Z^m(A, b)$, $m \geq 2$.

Доказательство. Согласно теореме 1 $(C(A, \lambda, \tau), d(b, \lambda, \tau))$-оператор стабилизирует задачу $Z^m(A, b)$. Поэтому для доказательства теоремы 2 осталось показать, что

$$Z^m(A + C(A, \lambda, \tau), b + d(b, \lambda, \tau)) \sim Z^m(A, b). \tag{7}$$

Из (1) и (5) следует включение

$$P^m(A + C(A, \lambda, \tau), b + d(b, \lambda, \tau)) \subseteq P^m(A, b). \tag{8}$$

Доказательство противоположного включения проведем методом от противного. Предположим, что существует точка $x \in P^m(A, b) \setminus P^m(A + C(A, \lambda, \tau), b + d(b, \lambda, \tau))$. Тогда множество $\pi(x, A + C(A, \lambda, \tau), b + d(b, \lambda, \tau))$ непусто. Если x' — один из элементов этого множества, то $q(x, x', A + C(A, \lambda, \tau), b + d(b, \lambda, \tau)) \neq \mathbf{0}$. Поэтому согласно лемме 4 $q(x, x', A, b) \neq \mathbf{0}$, т.е. ввиду $x \in P^m(A, b)$ найдется такой индекс $s \in N_m$, что $q_s(x, x', A_s, b_s) < 0$. Отсюда, последовательно применяя формулу (4), лемму 2 и неравенства (6), выводим

$$q_s(x, x', A_s + C_s, b_s + d_s) = q_s(x, x', A_s, b_s) + q_s(x, x', C_s, d_s) =$$

$$= q_s(x, x', A_s, b_s) + \tau \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k(x, x', A_k, b_k) \leq$$

$$\leq q_s(x, x', A_s, b_s) + \tau \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k q_k(x, x', A_k, b_k)| \leq$$

$$\leq q_s(x, x', A_s, b_s) + \tau m \|\lambda\| (\|A\| + \|b\|) \| x - x' \|_*^2 <$$

$$< q_s(x, x', A_s, b_s) + \gamma m \|\lambda\| (\|A\| + \|b\|) \Delta_{\max} =$$

$$= q_s(x, x', A_s, b_s) + \Delta_{\min} \leq q_s(x, x', A_s, b_s) + |q_s(x, x', A_s, b_s)| = 0.$$

Это означает, что $x' \notin \pi(x, A + C(A, \lambda, \tau), b + d(b, \lambda, \tau))$. Полученное противоречие вместе с (8) доказывает эквивалентность (7).

Теорема 2 доказана.

3. ε-СТАБИЛИЗАЦИЯ И ε-РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Пусть $\varepsilon > 0$, $A, C \in \mathbf{R}^{m\times n\times n}$, b, $d \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Будем говорить, что (C, d)-оператор ε-стабилизирует задачу $Z^m(A, b)$, если выполняется формула (3).

Кроме введенных ранее обозначений $\Delta_{\min}$, $\Delta_{\max}$ и γ используем также

$$\delta_{\min} = \min\left\{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k q_k(x, x', A_k, b_k) > 0 : x, x' \in X\right\}.$$

Так как задача $Z^m(A, b)$ по предположению является нетривиальной, то $\delta_{\min} > 0$ при $\lambda \in \mathbf{R}^m_>$.

Теорема 3. Для любых $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^m_>$, а также

$$\tau \geq \frac{\varepsilon\Delta_{\max}}{\delta_{\min}} \tag{9}$$

$(C(A, \lambda, \tau), d(b, \lambda, \tau))$-оператор ε-стабилизирует векторную нетривиальную задачу ЦКП $Z^m(A, b)$, $m \geq 2$.

Доказательство. Ввиду (4), (9) и леммы 2 для любых $(A', b') \in \Xi(\varepsilon)$, $x \in \overline{P^m}(A, b)$ и $x' \in \pi(x, A, b)$ справедливы неравенства

$$q_i(x, x', A_i + C_i + A'_i, b_i + d_i + b'_i) =$$
$$= q_i(x, x', A_i, b_i) + q_i(x, x', C_i, d_i) + q_i(x, x', A'_i, b'_i) \geq$$
$$\geq q_i(x, x', C_i, d_i) + q_i(x, x', A'_i, b'_i) =$$
$$= \tau\sum_{k=1}^{m}\lambda_k q_k(x, x', A_k, b_k) + q_i(x, x', A'_i, b'_i) \geq$$
$$\geq \tau\delta_{\min} - (\|A'\| + \|b'\|)\|x - x'\|_*^2 > \tau\delta_{\min} - \varepsilon\Delta_{\max} \geq 0,\ i \in N_m.$$

Поэтому $\forall (A', b') \in \Xi(\varepsilon)$ $(\mathrm{Sl}^m(A + C(A, \lambda, \tau) + A', b + d(b, \lambda, \tau) + b') \subseteq P^m(A, b))$.

Для завершения доказательства осталось воспользоваться включением (1). Теорема 3 доказана.

Задачу $Z^m(A, b)$ назовем ε-устойчивой, если выполняется формула (2).

Пусть $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что (C, d)-оператор ε-регуляризирует задачу $Z^m(A, b)$, если $Z^m(A, b) \sim Z^m(A + C, b + d)$ и задача $Z^m(A + C, b + d)$ ε-устойчива.

Теорема 4. Для всякого вектора $\lambda \in \mathbf{R}^m_>$ и любых чисел ε и τ, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \varepsilon < \frac{\gamma\delta_{\min}}{\Delta_{\max}}, \tag{10}$$

$$\frac{\varepsilon\Delta_{\max}}{\delta_{\min}} \leq \tau < \gamma, \tag{11}$$

$(C(A, \lambda, \tau), d(b, \lambda, \tau))$-оператор ε-регуляризирует векторную нетривиальную задачу ЦКП $Z^m(A, b)$, $m \geq 2$.

Доказательство. Прежде всего отметим согласованность условий (10) и (11) в том смысле, что для всякого числа ε, задаваемого неравенствами (10), существует число τ, удовлетворяющее условию (11).

Так любое число τ, заданное в соответствии с неравенствами (11), удовлетворяет и неравенству (9), согласно теореме 3 для всякого числа ε, заданного условиями (10) $(C(A,\lambda,\tau),d(b,\lambda,\tau))$-оператор ε-стабилизирует задачу $Z^m(A,b)$ при τ из условий (11). Это значит, что

$$\forall (A',b') \in \Xi(\varepsilon) \ \ (P^m(A+C(A,\lambda,\tau)+A',b+d(b,\lambda,\tau)+b') \subseteq P^m(A,b)). \quad (12)$$

Поскольку из (11) также следуют неравенства (6), то с учетом теоремы 2 справедливо равенство $P^m(A,b)=P^m(A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau))$.

Учитывая этот факт и формулу (12), заключаем, что $(C(A,\lambda,\tau),d(b,\lambda,\tau))$-оператор ε-регуляризирует векторную задачу ЦКП $Z^m(A,b)$.

Теорема 4 доказана.

Замечание. Ввиду управляемости векторного параметра λ, участвующего в определении числа γ, ε-регуляризация векторной задачи ЦКП $Z^m(A,b)$ может быть проведена для любого числа $\varepsilon>0$. Очевидно, что увеличение числа ε ведет к возрастанию радиуса устойчивости задачи $Z^m(A+C(A,\lambda,\tau),b+d(b,\lambda,\tau))$ (определение радиуса устойчивости задачи см. в [1, 2, 11, 13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 261 с.
3. Белоусов Е.Г., Андронов В.Г. Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 272 с.
4. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 63–70.
5. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Там же. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
6. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 63–72.
7. Ашманов С.А. Линейное программирование. — М.: Наука, 1981. — 304 с.
8. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. — М.: Наука, 1986. — 296 с.
9. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. О регуляризации задач целочисленной векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 3. — С. 172–176.
10. Емеличев В.А., Янушкевич О.А. О регуляризации многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 12. — С. 38–42.
11. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. — 2002. — **51,** N 4. — P. 645–676.
12. Емеличев В.А., Янушкевич О.А. О регуляризации лексикографической векторной задачи целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 6. — С. 125–130.
13. Емеличев В.А., Янушкевич О.А. Устойчивость и регуляризация векторной лексикографической задачи квадратичного дискретного программирования // Там же. — 2000. — № 2. — С. 54–62.
14. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.

Поступила 15.03.2008