УДК 519.81

И.В. ГРЕБЕННИК, Т.Е. РОМАНОВА, С.Б. ШЕХОВЦОВ

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ АЛЬТЕРНАТИВ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Ключевые слова: *интервальная математическая модель, принятие решений, многофакторные интервальные оценки*.

ВВЕДЕНИЕ

Системы поддержки принятия решений используются во многих научных и прикладных задачах. Основу математического обеспечения таких систем составляют математические модели и методы решения различных классов задач принятия решений [1]. На практике значительную часть решений приходится принимать в условиях неопределенности. Эта проблема актуальна для оптимизационных задач, связанных с преобразованием геометрической информации, в том числе задач упаковки, раскроя и покрытия [2], задач целочисленного программирования [3] и др.

Существуют различные методы учета неопределенности при математическом моделировании задач принятия решений [3–5]. В данном исследовании с целью учета условий неопределенности используются методы интервального анализа [6].

Цель настоящей статьи — применение известных методов решения детерминированных задач принятия решений в случае интервальной неопределенности. Здесь и далее под интервальной неопределенностью понимается ситуация, когда исходные данные задачи принятия решений заданы в интервальном виде.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полагаем, что значения критериев $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ определены с точностью до некоторых интервалов $[a_i, b_i] \subset R^1$, $i \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Необходимо найти решение $x^0 \in X$, лучшее по всем заданным критериям в условиях интервальной неопределенности.

С целью математического моделирования данной задачи воспользуемся элементами теории интервального анализа.

Пусть $\{\mathbf{k}_1(x), \mathbf{k}_2(x), \ldots, \mathbf{k}_n(x)\}$ — множество интервальных отображений [6] вида $\mathbf{k}_i : X \to \mathbf{E}_i \subset \mathbf{I_s R}$, $i \in J_n$. Здесь $\mathbf{I_s R} = I_s R \cup \overline{I_s R}$ — пространство центрированных интервалов, где

$$I_s R = \left\{ \langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \mid x = \frac{a+b}{2} \in R^1, \nu_x = \frac{b-a}{2} \in R^1,\ [a, b] \subset R^1 \right\},$$

$$\overline{I_s R} = \{ \langle \overline{X} \rangle = \langle x, -\nu_x \rangle \mid \forall \langle X \rangle \in I_s R \},\ \mathbf{E}_i = \{ \langle X \rangle \in \mathbf{I_s R} : x \in R^1, |\nu_x| \le \delta_i \},$$

здесь δ_i — верхняя оценка «неопределенности» задания критерия $k_i(x)$. Тогда задачу принятия решений в условиях интервальной неопределенности можно сформулировать в виде оптимизационной задачи

$$x^0 = \arg \operatorname*{extr}_{x \in X} \{\mathbf{k}_1(x), \mathbf{k}_2(x), \ldots, \mathbf{k}_n(x)\}, \tag{1}$$

где экстремум понимается в смысле отношения порядка и способа определения максимума и минимума в пространстве $\mathbf{I_s R}$.

Замечание 1. В случае, когда для всех $\mathbf{k}_i(x) = \langle k_i(x), \nu_{k_i(x)} \rangle$ выполняется соотношение $\nu_{k_i(x)} = 0$, задача (1) представляет собой детерминированную многокритериальную задачу принятия решений.

Отношение порядка в пространстве $\mathbf{I_s R}$ вводится следующим образом [6]:

$$\begin{gathered}
\forall \langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I_s R}, \ \forall \langle Y \rangle = \langle y, \nu_y \rangle \in \mathbf{I_s R}, \\
(\langle X \rangle < \langle Y \rangle) \Leftrightarrow ((x < y) \vee (x = y) \wedge (\nu_x < \nu_y)), \\
(\langle X \rangle > \langle Y \rangle) \Leftrightarrow ((x > y) \vee (x = y) \wedge (\nu_x > \nu_y)), \\
(\langle X \rangle = \langle Y \rangle) \Leftrightarrow ((x = y) \wedge (\nu_x = \nu_y)).
\end{gathered} \tag{2}$$

На основе (2) минимум из n интервальных чисел $\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle, \ldots, \langle Z_n \rangle$ определяется следующим образом:

$$\langle Z^* \rangle = \min \{\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle, \ldots, \langle Z_n \rangle\}, \tag{3}$$

здесь

$$\langle Z^* \rangle = \left\langle z^*, \nu_z^* = \min_{i \in J_n} \nu_{z_i} \right\rangle, \text{ если } z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z^*,$$

$$\langle Z^* \rangle = \left\langle z^* = z_{i_j} = \min_{i \in J_n} z_i, \ \nu_{z_{i_j}} \right\rangle, \ i_j \in J_n, \ j \in J_n, \text{ если } z_{i_j} \neq z_{i_k}, i \in J_k, \ j \neq k,$$

$$\langle Z^* \rangle = \left\langle z^* = \min_{i \in J_n} z_i, \ \nu_z^* = \nu_{z_{i_j}} = \min_{k \in J_r} \nu_{z_{i_k}} \right\rangle, \text{ если } z_{i_1} = z_{i_2} = \ldots = z_{i_r} = z^*,$$

$$\{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_r}\} \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}, \ 1 \le r < n.$$

Аналогично определяется максимум из n интервалов. Данный подход к определению минимума (максимума) распространяется и на случай бесконечного множества центрированных интервалов.

АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Задаче принятия решений в условиях интервальной неопределенности вида (1) присущи многие особенности детерминированных задач принятия решений.

Для решения задачи (1) предлагается построение и использование интервальных математических моделей, реализация которых основана на применении известных методов решения многокритериальных задач при $k_i : X \to R^1$, модифицированных для случая интервальных значений частных критериев $\mathbf{k}_i(x)$ в $\mathbf{I_s R}$.

При решении многокритериальных задач в ряде случаев из вычислительных соображений целесообразно выделение из множества альтернатив области компромиссов. Рассмотрим интервальные математические модели определения области компромиссов X^c на множестве допустимых решений X. Если множество X дискретно и содержит небольшое число элементов, то для построения области компромиссов X^c используется попарное сравнение альтернатив $x \in X$ по интервальным оценкам.

Для любого решения $x \in X$ зададим отображение $\mathbf{f} : X \to \mathbf{Y}$ такое, что

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{Y} = (\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle, \ldots, \langle Y_n \rangle), \tag{4}$$

где $\langle Y_i \rangle = \mathbf{k}_i(x^j) \in \mathbf{I_s R}$, $i \in J_n$. Тогда образом множества X будет множество $\mathbf{Y} \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$, где $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{I_s R} \times \ldots \times \mathbf{I_s R}}_{n}$ — n-мерное интервальное пространство [8].

Интервальное задание критериев в задаче (1) можно интерпретировать следующим образом.

Пусть X — множество допустимых решений, каждое из которых оценивается множеством критериев $\{k_1(x), k_2(x), \ldots, k_n(x)\}$, $k_i(x) \in R^1$, $i \in J_n$. Полагаем, что количество альтернатив в множестве X достаточно велико. Необходимо найти решение $x^0 \in X$, доставляющее экстремальные значения всем заданным критериям:

$$x^0 = \arg\operatorname*{extr}_{x \in X} \{k_1(x), k_2(x), \ldots, k_n(x)\}. \tag{5}$$

Как известно, задача (5) — классическая задача принятия решений в условиях определенности по множеству критериев $\{k_1(x), k_2(x), \ldots, k_n(x)\}$.

Выполним разбиение множества X следующим образом. Обозначим

$$k_i' = \arg\min_{x \in X} k_i(x),\ k_i'' = \arg\max_{x \in X} k_i(x),\ m_i = \frac{k_i' - k_i''}{\Delta_i},$$

где Δ_i — шаг разбиения для значений критерия $k_i(x)$, $i \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Зададим на множестве X бинарное отношение ρ вида

$$\forall x, y \in X \quad x \rho y \Leftrightarrow ((k_i(x) \in [k_i^j, k_i^{j+1})) \wedge (k_i(y) \in [k_i^j, k_i^{j+1})),$$

$$j = 0, 1, \ldots, m_i - 1,\ i \in J_n \vee (k_i(x) \in [k_i^{m_i - 1}, k_i^{m_i}]) \wedge (k_i(y) \in [k_i^{m_i - 1}, k_i^{m_i}]). \tag{6}$$

Здесь $k_i^j = j \cdot \Delta_i$, $j = 0, 1, \ldots, m_i$, $i \in J_n$.

Теорема 1. Отношение ρ вида (6) является отношением эквивалентности на множестве X.

Справедливость этого факта непосредственно следует из способа построения разбиения множества X. Все элементы $x \in X$, для которых справедливо соотношение (6), образуют класс эквивалентности $[x]$. Множество всех классов эквивалентности $[x]$ составляет фактор-множество $X_\rho = X / \rho$ множества X по отношению ρ, при этом $\operatorname{card} X_\rho = \prod_{i=1}^{n} m_i$.

Каждому классу эквивалентности $[x] \in X_\rho$ поставим в соответствие n-мерный элемент пространства $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ вида

$$\boldsymbol{x} = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \ldots, \langle X_n \rangle). \tag{7}$$

Как следует из разбиения множества X и определения равенства элементов в интервальном пространстве, каждому классу эквивалентности $[x] \in X_\rho$ будет соответствовать единственный интервальный элемент $\boldsymbol{x}$ вида (7). Обозначим $\mathbf{X}$ множество всех интервальных элементов вида (7).

Рассмотрим задачу выбора наилучшего интервального элемента $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ как задачу принятия решений по множеству критериев. С учетом введенных обозначений осуществим переход от математической модели задачи (5) к интервальной математической модели следующего вида:

$$\boldsymbol{x}^0 = \arg\operatorname*{extr}_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{k}_1(\boldsymbol{x}), \mathbf{k}_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \mathbf{k}_n(\boldsymbol{x})\}. \tag{8}$$

Замечание 2. В случае, когда для всех $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}) = \langle k_i(\boldsymbol{x}), \nu_{k_i(\boldsymbol{x})} \rangle$ выполняется соотношение $\nu_{k_i(\boldsymbol{x})} = 0$, задача (8) представляет собой детерминированную многокритериальную задачу принятия решений.

Замечание 3. Модель (8) можно рассматривать как обобщение модели (5) в смысле принадлежности каждой альтернативы $x \in X$ одному из классов эквивалентности $[x] \in X_\rho$.

Задаче (8) присущи многие особенности детерминированных задач принятия решений.

Рассмотрим интервальные математические модели определения области компромиссов $\mathbf{X}^\mathbf{c}$ на множестве допустимых решений $\mathbf{X}$. Если множество $\mathbf{X}$ дискретно и содержит небольшое число элементов, то для построения области компромиссов $\mathbf{X^c}$ используется попарное сравнение альтернатив $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ по интервальным оценкам. Заметим, что X^c в общем случае не принадлежит $\mathbf{X^c}$.

ОБЛАСТЬ КОМПРОМИССОВ ДЛЯ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА X

Построим область компромиссов $\mathbf{X^c}$. Основу алгоритма составляет попарное сравнение элементов множества $\mathbf{X}$ по каждому из критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$ на основе соотношения (5).

Алгоритм 1. Построение области компромиссов $\mathbf{X^c}$ для конечного множества альтернатив $\mathbf{X}$.

1. Для всех $p, q \in J_n$, $p < q$, выбрать альтернативы $\boldsymbol{x}^p, \boldsymbol{x}^q \in \mathbf{X}$.

2. Для всех $i \in J_n$ сравнить $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^p)$ и $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^q)$.

Если $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^p) \prec \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^q)$ для всех $i \in J_n$, то альтернатива $\boldsymbol{x}^q$ доминирует альтернативу $\boldsymbol{x}^p$.

Если $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^p) \succ \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^q)$ для всех $i \in J_n$, то альтернатива $\boldsymbol{x}^p$ доминирует альтернативу $\boldsymbol{x}^q$.

Иначе $\boldsymbol{x}^p, \boldsymbol{x}^q \in \mathbf{X}$ несравнимы, т.е. существуют такие i_1, $i_2 \in J_n$, что $\mathbf{k}_{i_1}(\boldsymbol{x}^p) \prec \mathbf{k}_{i_1}(\boldsymbol{x}^q)$ и $\mathbf{k}_{i_2}(\boldsymbol{x}^p) \succ \mathbf{k}_{i_2}(\boldsymbol{x}^q)$ или $\mathbf{k}_{i_1}(\boldsymbol{x}^p) \succ \mathbf{k}_{i_1}(\boldsymbol{x}^q)$ и $\mathbf{k}_{i_2}(\boldsymbol{x}^p) \prec \mathbf{k}_{i_2}(\boldsymbol{x}^q)$, и вывод о доминировании элементов $\boldsymbol{x}^p, \boldsymbol{x}^q \in \mathbf{X}$ сделать нельзя.

Здесь символ $\succ$ означает предпочтение на множестве Υ значений критериев. В частности, когда $\Upsilon \equiv \mathbf{I_s R}$, то $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^p) \succ \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^q)$ означает, что $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^p) > \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^q)$, если критерий $\mathbf{k}_i$ максимизируется, и $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^p) < \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^q)$ в противном случае. Соотношение $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^p) \approx \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^q)$ означает, что $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^p) = \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}^q)$.

3. Сформировать область компромиссов $\mathbf{X^c} \subset \mathbf{X}$ как множество всех недоминируемых альтернатив по результатам сравнения элементов $\boldsymbol{x}^p, \boldsymbol{x}^q \in \mathbf{X}$, $p = 1, 2, \ldots, m-1$, $q = 2, \ldots, m$, по всем критериям $\mathbf{k}_i \in \mathbf{K}$, $i \in J_n$.

Временная сложность алгоритма 1 имеет оценку $\sigma = \dfrac{n \cdot m \cdot (m-1)}{2}$.

По аналогии с приближенной областью компромиссов в детерминированном случае [7], когда определить область компромиссов на континуальном множестве $\mathbf{X}$ достаточно сложно или когда мощность конечного множества $\mathbf{X}$ и множества критериев достаточно велика, целесообразно строить интервальную приближенную область компромиссов $\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}}$ такую, что $\mathbf{X^c} \subseteq \widetilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}} \subseteq \mathbf{X}$.

Построение области $\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}}$ основано на решении задач оптимизации $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x})$ на множестве $\mathbf{X}$. Суть решения задач оптимизации с интервальными функциями цели состоит в уменьшении диаметра (радиуса) интервала — значения функции цели. Указанное свойство может быть учтено в результате решения задач минимизации на основе соотношений (5), (6). Для перехода к задачам минимизации интервальных функций введем интервальные отображения полезности $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x})$ частных критериев $\mathbf{k}_i \in \mathbf{K}$, $i \in J_n$, задачи (8) с целью нормализации интервальных критериев, следуя [7].

Интервальное отображение полезности $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x})$ частного критерия $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x})$ должно удовлетворять следующим требованиям:

1) $\mathbf{Y}_i = \{\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x}) \,|\, \langle 0, 0 \rangle \le \mathbf{p}_i(\boldsymbol{x}) \le \langle 1, \nu_{p_i} \rangle, \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}\}$;

2) $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x})$ инвариантно размерности частного критерия $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x})$;

3) $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x})$ инвариантно виду экстремума частного критерия $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x})$.

Последнее требование означает, что независимо от вида экстремума (минимум или максимум) частного критерия $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x})$ его наилучшему значению на множестве $\mathbf{X}$ должен соответствовать максимальный ($\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x}) = \langle 1, \nu_{p_i} \rangle$), а наихудшему — минимальный ($\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x}) = \langle 0, 0\rangle$) результат отображения $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x})$. Здесь ν_{p_i} определяется как радиус интервала, задающего максимальную полезность решения $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$, соответствующий δ_i.

Указанным требованиям отвечает интервальное отображение вида

$$\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}) - \bar{\mathbf{k}}_i^-}{\mathbf{k}_i^+ - \bar{\mathbf{k}}_i^-} \right)^{\alpha_i}, \tag{9}$$

где $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x})$ — значение частного критерия, $\mathbf{k}_i^+, \mathbf{k}_i^-$ — соответственно наилучшее и наихудшее значения частного критерия $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x})$ на области допустимых решений $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$, при этом

$$\mathbf{k}_i^+ = \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}), \text{ если } \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}) \to \max, \\ \min\limits_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}), \text{ если } \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}) \to \min; \end{cases} \quad \mathbf{k}_i^- = \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}), \text{ если } \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}) \to \max, \\ \max\limits_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}), \text{ если } \mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}) \to \min; \end{cases}$$

$\alpha_i \in R^1$ определяет характер нелинейности функции полезности $p_i(\boldsymbol{x})$ в детерминированном случае [7], $\bar{\mathbf{k}}_i^-$ — интервал, сопряженный интервалу $\mathbf{k}_i^-$ [6].

Рассмотрим интервальное отображение $\hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x})$ потери полезности частного критерия $\mathbf{k}_i \in \mathbf{K}$ как $\hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x}) = \langle 1, \nu_{p_i}\rangle - \bar{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x})$, где $\bar{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x})$ — отображение, сопряженное отображению $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{x})$ [6]. Очевидно, что независимо от вида экстремума частного критерия $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x})$ наилучшему результату отображения $\hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x})$ соответствует минимальное значение $\langle 0, 0\rangle$, а наихудшему — значение $\langle 1, \nu_{p_i}\rangle$. В дальнейшем ориентируясь на решение задач минимизации интервальных отображений, будем осуществлять выбор наилучшего решения из множества $\mathbf{X}$ с помощью интервальных оценок потери полезности $\hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x})$.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ПРИБЛИЖЕННАЯ ОБЛАСТЬ КОМПРОМИССОВ

Рассмотрим один из возможных способов построения $\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}}$, который может быть реализован следующими алгоритмами.

Алгоритм 2. Построение $\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}}$ для двух критериев $\mathbf{k}_i(\boldsymbol{x}), i = 1, 2$, на основе детерминированного подхода [7].

1. На множестве допустимых решений $\mathbf{X}$ последовательное решение задач

$$\boldsymbol{x}_i^0 = \arg \min_{x \in \mathbf{X}} \hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x}), \; i = 1, 2. \tag{10}$$

2. Для каждого решения $\boldsymbol{x}_i^0$ определение $\hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x}), \; i = 1, 2$.

3. Вычисление наилучшего и наихудшего интервальных значений $\hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{x}_1^0) = \hat{\mathbf{p}}_1^+$, $\hat{\mathbf{p}}_2(\boldsymbol{x}_2^0) = \hat{\mathbf{p}}_2^+$, $\hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{x}_2^0) = \hat{\mathbf{p}}_1^-$, $\hat{\mathbf{p}}_2(\boldsymbol{x}_1^0) = \hat{\mathbf{p}}_2^-$ с использованием отношения порядка (5).

4. Построение образа $\tilde{\mathbf{Y}}^c$ интервальной приближенной области компромиссов $\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}}$ в пространстве $\mathbf{Y}$ вида

$$\tilde{\mathbf{Y}}^c = \{(\mathbf{k}_1(\boldsymbol{x}), \mathbf{k}_2(\boldsymbol{x})) =$$
$$= (\langle k_1(\boldsymbol{x}), \nu_{k_1}(\boldsymbol{x})\rangle, \langle k_2(\boldsymbol{x}), \nu_{k_2}(\boldsymbol{x})\rangle) \in \mathbf{Y} \,|\, \hat{\mathbf{p}}_i^+ \le \hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x}) \le \hat{\mathbf{p}}_i^-, \, i = 1, 2\}.$$

Алгоритм 3. Построение $\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}}$ для $n > 2$ критериев и конечного множества $\mathbf{X}$.

1. Формирование множества $\Pi = \{\Pi_{ij}, i, j \in J_n, i < j\}$ пар критериев $\Pi_{ij} = (\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j)$, $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j \in \mathbf{K} = \{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\}$, $\operatorname{card} \Pi = n(n-1)/2$.

2. Формирование множества $\tilde{\mathbf{X}}_{ij}^c \subset \mathbf{X}$: реализация алгоритма 2 для всех $\Pi_{ij} \in \Pi$, $i, j \in J_n$, $i < j$.

3. Формирование интервальной приближенной области компромиссов $\tilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}} = \bigcup\limits_{i, j \in J_n, \, i < j} \tilde{\mathbf{X}}_{ij}^c$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Интервальную приближенную область компромиссов в задаче (8) можно представить в виде $\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}} = \bigcup_{i,j\in J_n,\, i<j} \widetilde{\mathbf{X}}_{ij}^{c}$.

Доказательство теоремы сводится к проверке следующего соотношения: $\mathbf{X}^{\mathbf{c}} \subseteq \widetilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}} \subseteq \mathbf{X}$. Рассмотрим произвольную пару критериев $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j \in \mathbf{K}$. Построим множество $\widetilde{\mathbf{X}}_{ij}^{c}$ как интервальную приближенную область компромиссов двухкритериальной задачи принятия решений с критериями $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j$, пользуясь алгоритмом 2. Из определения области компромиссов как множества недоминируемых альтернатив и способа построения множества $\widetilde{\mathbf{X}}_{ij}^{c}$ следует справедливость соотношения $\mathbf{X}_{ij}^{\mathbf{c}} \subseteq \widetilde{\mathbf{X}}_{ij}^{\mathbf{c}} \subseteq \mathbf{X}$ $\forall i, j \in J_n$, $i < j$, где $\mathbf{X}_{ij}^{\mathbf{c}}$ — область компромиссов двухкритериальной задачи принятия решений с критериями $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j$. Применяя теоретико-множественную операцию объединения по всем $i, j \in J_n$, $i < j$, получаем $\bigcup_{i,j\in J_n,\, i<j} \mathbf{X}_{ij}^{c} \subseteq \bigcup_{i,j\in J_n,\, i<j} \widetilde{\mathbf{X}}_{ij}^{c} \subseteq \mathbf{X}$. По определению две альтернативы в множестве $\mathbf{X}$ не сравнимы между собой, если они не сравнимы хотя бы по одной паре критериев. Тогда $\mathbf{X}^{\mathbf{c}} = \bigcup_{i,j\in J_n,\, i<j} \mathbf{X}_{ij}^{c}$. Следовательно, $\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathbf{c}} = \bigcup_{i,j\in J_n,\, i<j} \widetilde{\mathbf{X}}_{ij}^{c}$ — интервальная приближенная область компромиссов задачи (8).

ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК АЛЬТЕРНАТИВ

Рассмотрим теперь способы формирования интервальных многофакторных оценок альтернатив на основе отображений обобщенной полезности альтернатив. Выделим следующие случаи [7].

1. Пусть известны точные значения a_i коэффициентов относительной важности интервальных критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$, а следовательно, их отображений локальной потери полезности $\hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x})$. Здесь

$$a_i \in R^1,\ 0 \le a_i \le 1,\ i \in J_n,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1. \tag{11}$$

Тогда аддитивная обобщенная интервальная оценка потери полезности примет вид

$$\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\mathrm{i}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}), \tag{12}$$

а решение задачи определится выражением

$$\boldsymbol{x}^0 = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{X}} \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{x}). \tag{13}$$

Для каждой альтернативы $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ в соответствии с аддитивной моделью (12), отображением сопряжения, операциями сложения и умножения на действительное число $\lambda \in R^1$, введенными в пространстве $\mathbf{I_s R}$, вида [6]

$$\langle \overline{X} \rangle = \langle x, -\nu_x \rangle,\ \langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, \nu_x + \nu_y \rangle,\ \lambda\langle X \rangle = \langle \lambda x, |\lambda| \nu_x \rangle,$$

где $\langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I_s R}$, $\langle Y \rangle = \langle y, \nu_y \rangle \in \mathbf{I_s R}$, сформируем интервальные многофакторные оценки, по которым найдем решение $\boldsymbol{x}^0$. Полученное решение $\boldsymbol{x}^0$ соответствует минимальной в смысле соотношения (6) интервальной обобщенной оценке потери полезности альтернатив $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$.

2. Пусть значения коэффициентов относительной важности интервальных критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$ известны с точностью до интервалов вида

$$\alpha_i = [\alpha_{i_{\min}}, \alpha_{i_{\max}}],\ i \in J_n. \tag{14}$$

Каждому интервалу вида (14) поставим в соответствие центрированный интервал $\langle A_i \rangle = \langle a_i, \nu_{a_i} \rangle \in \mathbf{I_s R}$, $i \in J_n$, [6] следующим образом:

$$\langle \mathrm{A_i} \rangle \Leftrightarrow [\mathrm{a_i} - \nu_{\mathrm{a_i}}, \mathrm{a_i} + \nu_{\mathrm{a_i}}] = [\alpha_{\mathrm{i_{min}}}, \alpha_{\mathrm{i_{max}}}],$$

где

$$a_i = \frac{1}{2}(\alpha_{i_{\min}} + \alpha_{i_{\max}}),\ \nu_{a_i} = \frac{1}{2}(\alpha_{i_{\max}} - \alpha_{i_{\min}}).$$

С целью выполнения для интервальных коэффициентов относительной важности критериев условий, аналогичных (11), осуществим нормализацию коэффициентов $\langle A_i \rangle$ по формуле

$$\left\langle A_i^{\text{н}} \right\rangle = \sigma^{\text{н}} \cdot \langle A_i \rangle,\ i \in J_n,\ \text{где}\ \sigma^{\text{н}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle}.$$

Воспользуемся формулами интервального умножения, введенными в пространстве $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [6].

Пусть $\langle X \rangle, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$. Интервальное произведение $\langle Y \rangle * \langle X \rangle$ задается следующим образом:

$$\begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle X \rangle,\ \text{если}\ \langle Y \rangle, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1}, \\ \langle \bar{Y} \rangle \cdot \langle X \rangle,\ \text{если}\ \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s2},\ \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1}, \\ \langle y + s|\nu_y|, 0 \rangle \cdot \langle X \rangle,\ \text{если}\ \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3},\ \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1}, \end{cases} \qquad s = \begin{cases} 1,\ \text{если}\ \nu_x \cdot \nu_y \geq 0, \\ -1,\ \text{если}\ \nu_x \cdot \nu_y < 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{I}_{si}$, $i = 1, 2, 3$, — множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, которые удовлетворяют соответствующим условиям

$$x - |\nu_x| > 0;\ x + |\nu_x| < 0;\ \begin{cases} x - |\nu_x| \leq 0,\ \text{если}\ x \geq 0, \\ x + |\nu_x| \geq 0,\ \text{если}\ x \leq 0, \end{cases}$$

$\langle A \rangle \cdot \langle B \rangle = \langle ab + \nu_a \nu_b, a\nu_b + b\nu_a \rangle$ — операция гиперболического умножения A и B.

Воспользовавшись формулой интервального деления [6], имеем

$$\left\langle A_i^{\text{н}} \right\rangle = \frac{\langle A_i \rangle}{\langle B \rangle} = \frac{1}{b^2 - \nu_b^2} \cdot \langle A_i \rangle * \langle B \rangle,\ |b| \neq |\nu_b|, \tag{15}$$

$$\langle B \rangle = \langle b, \nu_b \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right\rangle.$$

Поскольку $a - |\nu_a| > 0$, то согласно таблице умножения интервальных чисел формула (15) примет следующий вид:

$$\left\langle \mathrm{A_i^{н}} \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{b}^2 - \nu_{\mathrm{b}}^2} \cdot \langle \mathrm{a_i b} + \nu_{\mathrm{a_i}} \nu_{\mathrm{b}}, \mathrm{b}\nu_{\mathrm{a_i}} + \mathrm{a_i}\nu_{\mathrm{b}} \rangle.$$

Следовательно,

$$\left\langle \mathrm{A_i^{н}} \right\rangle = \left\langle \mathrm{a_i^{н}}, \nu_{\mathrm{i}}^{\text{н}} \right\rangle, \tag{16}$$

где

$$a_i^{\text{н}} = \frac{1}{\Delta_i}\left(a_i \sum_{i=1}^{n} a_i + \nu_{a_i} \sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right),\ \nu_i^{\text{н}} = \frac{1}{\Delta_i}\left(\nu_{a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i + a_i \sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right),$$

$$\Delta_i = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right)^2}\ .$$

С учетом (16) определим

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle A_i^{\text{н}} \right\rangle = \left\langle a^{\text{н}}, \nu_a^{\text{н}} \right\rangle = \frac{1}{b^2 - \nu_b^2} \left\langle b^2 + \nu_b^2, 2b\nu_b \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\Delta_i} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right)^2, 2 \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right\rangle,$$

$$\langle 0, 0 \rangle \leq \langle A_i^{\text{н}} \rangle \leq \langle a^{\text{н}}, \nu_a^{\text{н}} \rangle, \; i \in J_n. \tag{17}$$

Замечание 4. Если положить все ν_{a_i} равными нулю, то условие (17) будет эквивалентно выражению (11).

С учетом нормализованных интервальных коэффициентов относительной важности интервальных критериев соотношения, аналогичные (12), (13), примут вид

$$\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{x}, A^{\text{н}}) = \sum_{i=1}^{n} \langle A_i^{\text{н}} \rangle * \hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{x}^0 = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}} \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{x}, A^{\text{н}}), \tag{18}$$

где $A^{\text{н}} = \langle A_1^{\text{н}} \rangle, \langle A_2^{\text{н}} \rangle, \ldots, \langle A_n^{\text{н}} \rangle \in \mathbf{I_s^n R}$.

3. Количественные значения весовых коэффициентов относительной важности критериев неизвестны, но интервальные критерии упорядочены по важности, например, следующим образом: $\mathbf{k}_1 \succ \mathbf{k}_2 \succ \ldots \succ \mathbf{k}_n$. Такое задание предпочтений частных критериев означает, что $\langle A_1 \rangle > \langle A_2 \rangle > \ldots > \langle A_n \rangle$.

В этой ситуации используется метод последовательной оптимизации, в соответствии с которым из двух решений $\boldsymbol{u} \in \mathbf{X}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}$ первое предпочтительно, т.е. $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{v}$, если [9]

$\hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{u}) < \hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{v})$ или

$(\hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{u}) = \hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{v})) \wedge (\hat{\mathbf{p}}_2(\boldsymbol{u}) < \hat{\mathbf{p}}_2(\boldsymbol{v}))$, или

$(\hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{u}) = \hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{v})) \wedge (\hat{\mathbf{p}}_2(\boldsymbol{u}) = \hat{\mathbf{p}}_2(\boldsymbol{v})) \wedge (\hat{\mathbf{p}}_3(\boldsymbol{u}) < \hat{\mathbf{p}}_3(\boldsymbol{v}))$ и т.д.;

$\exists t \in J_{n-1}$ такое, что $(\hat{\mathbf{p}}_j(\boldsymbol{u}) = \hat{\mathbf{p}}_j(\boldsymbol{v}), j \in J_t) \wedge (\hat{\mathbf{p}}_{t+1}(\boldsymbol{u}) < \hat{\mathbf{p}}_{t+1}(\boldsymbol{v}))$.

Выбор решения сводится к решению последовательности однокритериальных задач [7]

$$\boldsymbol{x}_i^0 = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}_{i-1}^0} \hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x}), \tag{19}$$

здесь $i \in J_n$, $\mathbf{X}_0^0 \equiv \mathbf{X}$.

4. Информация о предпочтениях относительно критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$, а следовательно, и о коэффициентах a_i, $i \in J_n$, отсутствует. В этом случае следует использовать модель вида

$$\boldsymbol{x}^0 = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}} \max_{i=1,2,\ldots,n} \hat{\mathbf{p}}_i(\boldsymbol{x}). \tag{20}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Заданы 10 альтернатив $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{10}\}$, которые оцениваются по трем интервальным критериям на максимум $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Проиллюстрируем на данном примере предложенные в статье способы формирования интервальных оценок альтернатив и выбор на их основе оптимального решения (табл. 1).

Таблица 1

Критерий	Интервальные значения критериев									
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$\mathbf{k}_1$	$\langle 2, 0.02 \rangle$	$\langle 1, 0.04 \rangle$	$\langle 2, 0.01 \rangle$	$\langle 1, 0.03 \rangle$	$\langle 4, 0.02 \rangle$	$\langle 7, 0.01 \rangle$	$\langle 2, 0.02 \rangle$	$\langle 8, 0.01 \rangle$	$\langle 5, 0.01 \rangle$	$\langle 8, 0.01 \rangle$
$\mathbf{k}_2$	$\langle 4, 0.01 \rangle$	$\langle 3, 0.01 \rangle$	$\langle 4, 0.01 \rangle$	$\langle 3, 0.01 \rangle$	$\langle 3, 0.01 \rangle$	$\langle 1, 0.01 \rangle$	$\langle 1, 0.02 \rangle$	$\langle 8, 0.02 \rangle$	$\langle 5, 0.01 \rangle$	$\langle 8, 0.02 \rangle$
$\mathbf{k}_3$	$\langle 7, 0.03 \rangle$	$\langle 5, 0.01 \rangle$	$\langle 7, 0.03 \rangle$	$\langle 5, 0.02 \rangle$	$\langle 2, 0.03 \rangle$	$\langle 5, 0.02 \rangle$	$\langle 8, 0.01 \rangle$	$\langle 2, 0.03 \rangle$	$\langle 5, 0.02 \rangle$	$\langle 2, 0.01 \rangle$

Интервальные область согласия и область компромиссов имеют вид $\mathbf{X}^s = \{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_{10}\}$, $\mathbf{X}^\mathbf{c} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_6, \boldsymbol{x}_7, \boldsymbol{x}_8, \boldsymbol{x}_9\}$.

Далее для решения задачи (5) на множестве $\mathbf{X}^\mathbf{c}$ может быть применен один из рассмотренных в статье подходов (случаи 1–4).

Рассмотрим реализацию метода решения задачи (5) на множестве $\mathbf{X} = \{\boldsymbol{x}_i, i = 1, \dots, 10\}$.

Пусть

$\mathbf{k}_1^- = \langle 1.000, 0.030 \rangle$, $\mathbf{k}_2^- = \langle 1.000, 0.010 \rangle$, $\mathbf{k}_3^- = \langle 2.000, 0.010 \rangle$;

$\mathbf{k}_1^+ = \langle 8.000\ 0.010 \rangle$, $\mathbf{k}_2^+ = \langle 8.000, 0.020 \rangle$, $\mathbf{k}_3^+ = \langle 8.000, 0.010 \rangle$.

Значения интервальных отображений полезности и потери полезности интервальных критериев приведены в табл. 2, 3.

Таблица 2

Интервальные отображения	Значения интервальных отображений полезности интервальных критериев				
	$\frac{\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{x}_2}$	$\frac{\boldsymbol{x}_3}{\boldsymbol{x}_4}$	$\frac{\boldsymbol{x}_5}{\boldsymbol{x}_6}$	$\frac{\boldsymbol{x}_7}{\boldsymbol{x}_8}$	$\frac{\boldsymbol{x}_9}{\boldsymbol{x}_{10}}$
$\mathbf{p}_1(\boldsymbol{x})$	$\frac{\langle 0.143, -0.002 \rangle}{\langle 0.000, 0.001 \rangle}$	$\frac{\langle 0.143, -0.003 \rangle}{\langle 0.000, 0.000 \rangle}$	$\frac{\langle 0.429, -0.003 \rangle}{\langle 0.857, -0.005 \rangle}$	$\frac{\langle 0.143, -0.002 \rangle}{\langle 1.000, -0.006 \rangle}$	$\frac{\langle 0.571, -0.004 \rangle}{\langle 1.000, -0.006 \rangle}$
$\mathbf{p}_2(\boldsymbol{x})$	$\frac{\langle 0.429, 0.001 \rangle}{\langle 0.286, 0.000 \rangle}$	$\frac{\langle 0.429, 0.001 \rangle}{\langle 0.286, 0.000 \rangle}$	$\frac{\langle 0.286, 0.000 \rangle}{\langle 0.000, 0.000 \rangle}$	$\frac{\langle 0.000, 0.001 \rangle}{\langle 1.000, 0.003 \rangle}$	$\frac{\langle 0.571, 0.001 \rangle}{\langle 1.000, 0.003 \rangle}$
$\mathbf{p}_3(\boldsymbol{x})$	$\frac{\langle 0.833, 0.003 \rangle}{\langle 0.500, 0.000 \rangle}$	$\frac{\langle 0.833, 0.003 \rangle}{\langle 0.500, 0.002 \rangle}$	$\frac{\langle 0.000, 0.003 \rangle}{\langle 0.500, 0.002 \rangle}$	$\frac{\langle 1.000, 0.000 \rangle}{\langle 0.000, 0.003 \rangle}$	$\frac{\langle 0.500, 0.002 \rangle}{\langle 0.000, 0.000 \rangle}$

Таблица 3

Интервальные отображения	Значения интервальных отображений потери полезности интервальных критериев				
	$\frac{\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{x}_2}$	$\frac{\boldsymbol{x}_3}{\boldsymbol{x}_4}$	$\frac{\boldsymbol{x}_5}{\boldsymbol{x}_6}$	$\frac{\boldsymbol{x}_7}{\boldsymbol{x}_8}$	$\frac{\boldsymbol{x}_9}{\boldsymbol{x}_{10}}$
$\hat{\mathbf{p}}_1(\boldsymbol{x})$	$\frac{\langle 0.857, 0.098 \rangle}{\langle 1.000, 0.101 \rangle}$	$\frac{\langle 0.857, 0.097 \rangle}{\langle 1.000, 0.100 \rangle}$	$\frac{\langle 0.571, 0.097 \rangle}{\langle 0.143, 0.095 \rangle}$	$\frac{\langle 0.857, 0.098 \rangle}{\langle 0.000, 0.094 \rangle}$	$\frac{\langle 0.429, 0.096 \rangle}{\langle 0.000, 0.094 \rangle}$
$\hat{\mathbf{p}}_2(\boldsymbol{x})$	$\frac{\langle 0.571, 0{,}101 \rangle}{\langle 0.714, 0{,}100 \rangle}$	$\frac{\langle 0.571, 0.101 \rangle}{\langle 0.714, 0.100 \rangle}$	$\frac{\langle 0.714, 0{,}100 \rangle}{\langle 1.000, 0{,}100 \rangle}$	$\frac{\langle 1.000, 0.101 \rangle}{\langle 0.000, 0.103 \rangle}$	$\frac{\langle 0.429, 0.101 \rangle}{\langle 0.000, 0103 \rangle}$
$\hat{\mathbf{p}}_3(\boldsymbol{x})$	$\frac{\langle 0.167, 0.103 \rangle}{\langle 0.500, 0.100 \rangle}$	$\frac{\langle 0.167, 0{,}103 \rangle}{\langle 0.500, 0{,}102 \rangle}$	$\frac{\langle 1.000, 0.103 \rangle}{\langle 0.500, 0.102 \rangle}$	$\frac{\langle 0.000, 0.100 \rangle}{\langle 1.000, 0.103 \rangle}$	$\frac{\langle 0.500, 0.102 \rangle}{\langle 1.000, 0.100 \rangle}$

Таким образом, приближенная область компромиссов имеет вид

$$\mathbf{X}^\mathbf{c} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_6, \boldsymbol{x}_7, \boldsymbol{x}_8, \boldsymbol{x}_9, \boldsymbol{x}_{10}\}.$$

Рассмотрим способы формирования интервальных оценок альтернатив в зависимости от степени задания информации о коэффициентах важности критериев a_1, a_2, a_3.

Пусть известны точные значения коэффициентов относительной важности критериев $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.5$. Значения интервального отображения обобщенной потери полезности (12) приведены в табл. 4.

Лучшими решениями согласно (13) являются $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$.

Известны интервальные значения коэффициентов a_i относительной важности критериев. Пусть $A_1 = [0.2, 0.5]$, $A_2 = [0.2, 0.4]$, $A_3 = [0.1, 0.2]$. Тогда значения центрированных интервальных коэффициентов примут вид $\langle A_1 \rangle = \langle 0.3, 0.1 \rangle$, $\langle A_2 \rangle = \langle 0.3, 0.1 \rangle$, $\langle A_3 \rangle = \langle 0.2, 0.1 \rangle$. Нормализованные значения коэффициентов важности: $\langle A_1^{\text{н}} \rangle = \langle 0.179, 0.124 \rangle$, $\langle A_2^{\text{н}} \rangle = \langle 0.149, 0.094 \rangle$, $\langle A_3^{\text{н}} \rangle = \langle 0.074, 0.047 \rangle$.

Т а б л и ц а 4

Оценка потери полезности	Значения интервального отображения обобщенной потери полезности				
	$\frac{x_1}{x_2}$	$\frac{x_3}{x_4}$	$\frac{x_5}{x_6}$	$\frac{x_7}{x_8}$	$\frac{x_9}{x_{10}}$
$\hat{\mathbf{P}}(x)$	$\frac{\langle 0.426, 0.101\rangle}{\langle 0.664, 0.100\rangle}$	$\frac{\langle 0.426, 0.101\rangle}{\langle 0.664, 0.101\rangle}$	$\frac{\langle 0.829, 0.101\rangle}{\langle 0.579, 0.100\rangle}$	$\frac{\langle 0.471, 0.100\rangle}{\langle 0.500, 0.101\rangle}$	$\frac{\langle 0.464, 0.100\rangle}{\langle 0.500, 0.100\rangle}$

Значения интервального отображения обобщенной потери полезности (18) для альтернатив $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ приведены в табл. 5.

Лучшим решением в соответствии с моделью (18) является x_9.

Т а б л и ц а 5

Оценка потери полезности	Значения интервальной обобщенной потери полезности				
	$\frac{x_1}{x_2}$	$\frac{x_3}{x_4}$	$\frac{x_5}{x_6}$	$\frac{x_7}{x_8}$	$\frac{x_9}{x_{10}}$
$\hat{\mathbf{P}}(x)$	$\frac{\langle 0.277, 0.207\rangle}{\langle 0.349, 0.254\rangle}$	$\frac{\langle 0.277, 0.207\rangle}{\langle 0.348, 0.254\rangle}$	$\frac{\langle 0.309, 0.224\rangle}{\langle 0.237, 0.174\rangle}$	$\frac{\langle 0.365, 0.263\rangle}{\langle 0.610, 0.441\rangle}$	$\frac{\langle 0.203, 0.156\rangle}{\langle 0.371, 0.280\rangle}$

Количественные значения весовых коэффициентов неизвестны, критерии упорядочены по важности $\mathbf{k}_1 > \mathbf{k}_2 > \mathbf{k}_3$. Применим принцип последовательной оптимизации. Тогда согласно формуле (19) лучшими альтернативами по критерию $\mathbf{k}_1$ являются x_8, x_{10}; лучшими альтернативами по критерию $\mathbf{k}_2$ являются x_8, x_{10}; лучшей альтернативой по критерию $\mathbf{k}_3$ является x_{10}.

Информация о предпочтениях относительно коэффициентов важности и предпочтениях критериев отсутствует. Используем принцип минимакса. Тогда в соответствии с формулой (20) лучшим решением является x_9.

Выводы. В настоящей статье предложен способ формирования интервальных многофакторных оценок альтернатив для принятия решений. Предложенный подход является комбинацией известных методов многокритериального принятия решений и методов интервального анализа. Такой подход может быть использован при решении научных и прикладных задач упаковки, раскроя и покрытия [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К и н и Р. Л., Р а й ф а Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981. — 560 с.
2. D y c k h o f f H., S c h e i t h a u e r G., T e r n o J. Cutting and packing. Annotated bibliographies in combinatorial optimization / Ed. by M. Dell'Amico, F. Maffioli, S. Martello. — Chichester: John Wiley & Sons, 1997. — P. 393–412.
3. С е р г и е н к о И. В., С е м е н о в а Н. В. Задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными: точные и приближенные решения // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 6. — С. 75–86.
4. П о д и н о в с к и й В. В. Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически лексикографическая задача оптимизации // Там же. — 2003. — № 3. — С. 150–162.
5. О в е з г е л ь д ы е в А. О., П е т р о в К. Э. Оценка и ранжирование альтернатив в условиях интервальной неопределенности // Там же. — 2005. — № 5. — С. 148–153.
6. С т о я н Ю. Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Докл. НАН Украины. Сер. А. — 1996. — № 7. — С. 23–25.
7. О в е з г е л ь д ы е в А. О., П е т р о в Э. Г., П е т р о в К. Э. Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. — Киев: Наук. думка, 2002. — 164 с.
8. Р о м а н о в а Т. Е. Интервальное пространство $\mathbf{I}_\mathbf{s}^\mathbf{n}\mathbf{R}$. Интервальные уравнения // Докл. НАН Украины. Сер.А. — 2000. — № 9. — С. 36–41.
9. П о д и н о в с к и й В. В., Г а в р и л о в В. М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: Сов. радио, 1975. — 192 с.

Поступила 22.09.2008