УДК 519.11.176

Н.К. ТИМОФЕЕВА

ПОДКЛАССЫ РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧ ИЗ КЛАССОВ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *разрешимые задачи, комбинаторная оптимизация, комбинаторная конфигурация, целевая и комбинаторная функции*.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе проводится обзор известных и новых (полученных автором) подклассов разрешимых задач из классов задач комбинаторной оптимизации. Под разрешимыми задачами подразумевается определенный подкласс задач, для которого известен аналитический метод нахождения оптимального решения без перебора вариантов. Рассмотрены подклассы разрешимых задач из классов комбинаторной оптимизации, которые являются математическими моделями таких прикладных задач: коммивояжера, о назначениях, размещения объектов на заданной поверхности, кластеризации.

Прикладные задачи, которые относятся к классам задач комбинаторной оптимизации, довольно часто имеют большую размерность. Например, при проектировании сверхбольших интегральных микросхем необходимо размещать десятки тысяч модулей. Известно, что с возрастанием размерностей этих задач практически невозможно находить оптимальное решение методами, использующими перебор вариантов, поэтому возникает проблема разработки приближенных полиномиальных алгоритмов для их решения.

Для решения задач комбинаторной оптимизации можно выделить два подхода: а) методы и алгоритмы, основанные на частичном переборе вариантов [1–8]; б) методы и алгоритмы, связанные с распознаванием структуры входной информации.

Ко второму подходу относятся работы по нахождению подклассов разрешимых задач и разработке алгоритмов распознавания соответствующей этим подклассам структуры входной информации [9–37]. Исследование этих случаев положило начало научному направлению, которое заключается в нахождении оптимального решения без перебора вариантов. Анализ классов задач комбинаторной оптимизации позволяет выявить их характерные свойства, обобщить и развить это направление.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Задачи комбинаторной оптимизации, как правило, задаются на одном или нескольких множествах, например $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ и $B=\{b_1,\ldots,b_{\tilde{n}}\}$, элементы которых имеют любую природу. Положим $n=\tilde{n}$. Назовем эти множества базовыми. Имеет место два типа задач. В первом типе каждое из этих множеств A и B можно представить в виде графа, вершинами которого являются элементы заданного множества, а каждому ребру соответствует число (вес ребра) $c_{st}\in R$ (R — множество действительных чисел), т.е. между элементами a_s, $a_t\in A$ (или $a_s\in A$, $b_t\in B$) существуют связи, числовое значение которых называют весами. Величины c_{st} назовем входными данными и представим их матрицами [38]. Во втором типе задач между элементами заданных множеств связей не существует, а весами выступают числа $v_j\in R$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, которым в соответствие поставлено некоторое свойство этих элементов.

В обоих типах задач из элементов одного из заданных множеств, например $a_t\in A$, образуется комбинаторное множество W — совокупность комбинаторных конфигураций некоторого одного типа (перестановки, выборки разных типов,

© Н.К. Тимофеева, 2009

разбиения n-элементного множества на подмножества и др.). На элементах $w \in W$ вводится целевая функция $F(w)$. Необходимо найти элемент w^* множества W, для которого целевая функция $F(w^*)$ принимает экстремальное значение (минимум или максимум) при выполнении заданных ограничений: $F(w^*) = \underset{w \in W^0 \subset W}{\mathrm{extr}} F(w)$, где $\mathrm{extr} = \{\min, \max\}$, W^0 — подмножество, определяемое ограничениями задачи. Элемент $w^* \in W^0 \subset W$ и есть оптимальное решение задачи комбинаторной оптимизации.

Элементы входных данных класса задач комбинаторной оптимизации, заданные двумя матрицами, представим конечными последовательностями (функциями натурального аргумента, одна из которых комбинаторная). К этому классу относятся такие задачи: коммивояжера, задача о назначениях, размещения объектов на заданной поверхности, кластеризация.

Элементы матрицы $Q(w^k)$, которую назовем комбинаторной, соответствуют значению весов между a_s, a_t базового множества A, где w^k — аргумент целевой функции — комбинаторная конфигурация, $k \in \{1, \ldots, q\}$ — порядковый номер w^k во множестве W, q — количество w^k в W. Элементы матрицы C соответствуют значению весов между элементами b_s, b_t заданного множества B или равняются $(0, 1)$, где $c_{st} = 1$, если a_s, a_t имеют между собой связи, и $c_{st} = 0$ в противном случае. Элементы матрицы C зададим числовой функцией $\varphi(j)\big|_1^m$, а $Q(w^1)$ — комбинаторной $\beta(f(j), w^1)\big|_1^m$, которая изменяется в зависимости от w^k, где $m = n^2$, w^1, $w^k \in W$. Размещение элементов матриц в этих функциях такое: сначала идут элементы первой строки, потом второй, третьей и т.д. Если матрицы C и $Q(w^1)$ симметрические, то $\varphi(j)\big|_1^m$ и $\beta(f(j), w^k)\big|_1^m$ содержат последовательно элементы h наддиагоналей матрицы первой строки, потом второй, третьей и т.д., $h \in \{1, \ldots, n-1\}$, а $m = n(n-1)/2$. Целевую функцию запишем так:

$$\mathrm{F}(\mathrm{w}^{\mathrm{k}}) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \beta_{\mathrm{j}}(\mathrm{f}(\mathrm{j}), \mathrm{w}^{\mathrm{k}}) \varphi(\mathrm{j}). \tag{1}$$

О ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННОМ НА РАСПОЗНАВАНИИ СТРУКТУРЫ ВХОДНЫХ ДАННЫХ

Над созданием методов, которые позволяли бы по структуре входной информации находить оптимальное решение задач комбинаторной оптимизации, проводятся исследования не одно десятилетие. Один из таких подходов — разработка методов и алгоритмов нахождения оптимального решения по структуре матриц, которыми задаются входные данные. Еще в 60-х годах XX ст. для задач классификации разрабатывались алгоритмы переупорядочения произвольной матрицы таким образом, чтобы значения признаков, описывающих однородные объекты, разместились в заданном поле матрицы. Такой алгоритм описан в [9].

В эти же годы появились работы по выделению подклассов разрешимых задач из классов задач комбинаторной оптимизации, в основном для задачи коммивояжера. Публикаций по этому подходу немного, но это направление продолжает развиваться и требует особого внимания.

Метод ближайшего соседа и «жадный» алгоритм также основан на распознавании структуры входных данных. В распознавании речевых сигналов во многих подходах решение этой задачи проводится путем выявления конфигурации входного сигнала.

В последнее время значительно возрос интерес к фрактальным множествам [39]. В работах [40–42] предлагается использовать фрактальные и предфрактальные графы как инструмент моделирования структурного хаоса (структура входных данных в задачах комбинаторной оптимизации — хаотической природы). В [40] для решения задачи о назначениях разработаны алгоритмы поиска конкретной структуры в задаче о назначении с использованием свойств фрактальных множеств.

ПОДКЛАССЫ РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧ

Одним из первых исследованных разрешимых случаев из классов задач комбинаторной оптимизации являются два множества перестановок разных упорядочений, которые авторы называют системами (a) и (b), и частный случай билинейной формы (квадратичной задачи о назначениях) [43]. Для систем (a) и (b) определены перестановки, для которых $\sum ab$ достигает наибольшего или наименьшего значения. Из класса задачи коммивояжера был исследован так называемый выпуклый случай, когда все точки в плоскости расположены на границе их выпуклой оболочки [44].

В 1957 г. разрешимый случай для задачи коммивояжера описал Ф. Супник [21]. Он рассмотрел симметрическую матрицу размерности $n \times n$ с такими условиями: $c_{st} + c_{rl} \le c_{sr} + c_{tl}$, $c_{sl} + c_{tr} \ge c_{sr} + c_{tl}$, где $1 \le s < t < r < l \le n$, и доказал, что для нее минимальное значение целевой функции в задаче коммивояжера достигается для перестановки $1, 3, 5, 7, \ldots, 8, 6, 4, 2$, которую называют пирамидальным туром.

В 1975 г. К. Кальмансон исследовал симметрическую матрицу размерности $n \times n$, для которой выполняются такие условия [20]:

$$c_{st} + c_{rl} \le c_{sr} + c_{tl}, \text{ где } 1 \le s < t < r < l \le n, \tag{2}$$

$$c_{sl} + c_{tr} \le c_{sr} + c_{tl}, \text{ где } 1 \le s < t < r < l \le n. \tag{3}$$

Он доказал, что для этой матрицы минимальное значение целевой функции в задаче коммивояжера достигается для перестановки $1, 2, 3, \ldots, n$ (тур Мастера).

Почти одновременно глобальный минимум для матрицы, которая задается условием (2), нашел В.М. Демиденко [22]. Он доказал, что для задачи коммивояжера, входная информация в которой задается матрицей с условием (2), минимальное значение целевой функции достигается для пирамидального тура (перестановка $1, 3, 5, 7, \ldots, 8, 6, 4, 2$) [25, 26].

В [11] предложена формальная постановка задачи комбинаторной оптимизации, аргументом целевой функции которой является перестановка. В этой постановке элементы матриц, которыми задается входная информация, представлены в линейной форме (двумя множествами $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$), а целевая функция задана как суммарное произведение элементов этих множеств, причем одно из них функционально зависит от перестановки. Аналогичную формальную постановку задачи комбинаторной оптимизации предложили авторы работы [23]. В [11, 13, 18, 23, 26–28, 33] исследуется матрица произведений, элементы которой представлены в линейной форме и равняются $c_j = \alpha_j \beta_j$, где $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n$ и $\beta_1 \ge \beta_2 \ge \ldots \ge \beta_n$ или $\beta_1 \le \beta_2 \le \ldots \le \beta_n$.

В литературе описаны разрешимые случаи, которые задаются матрицами Монжа с условиями $c_{st} + c_{rl} \le c_{sl} + c_{rt}$ для всех $1 \le s < r \le m$, $1 \le t < l \le n$. Впервые эти условия описал в 1781 г. французский математик Г. Монж [30].

Разрешимые случаи для задачи коммивояжера описаны в работах [12, 17, 33, 34]. В [17] исследованы известные и предложены новые разрешимые случаи евклидовой задачи коммивояжера, а также разработаны новые эвристические алгоритмы для распознавания переупорядоченных матриц.

На сегодняшний день ученые изучают описанные в литературе разрешимые случаи (матрицы Супника, Демиденка, Кальмансона, Монжа, Теплица) для задачи коммивояжера, квадратичной задачи о назначениях [14–17, 19, 29, 31, 32, 35–37] и разрабатывают новые алгоритмы распознавания переупорядоченных матриц. Для нахождения подклассов разрешимых задач и определения для них оптимального решения еще не разработаны общие методы, этот процесс не основывается на строгих правилах и довольно трудоемкий. Изложенные в литературе результаты, которые касаются второго направления, не охватывают широкого класса задач комбинаторной оптимизации и недостаточны для выявления присущих им общих закономерностей. Приведенные в литературе результаты требуют обобщения.

Как показывает анализ методов и алгоритмов, при решении задач комбинаторной оптимизации подходами, основанными на переборе вариантов, возникает одна и та же проблема, а именно: выделение из множества значений целевой функции подмножества, которое содержит оптимальное решение [1–8]. В работах [11, 22, 23, 25, 26, 45–47] авторы для конкретного подкласса разрешимых задач с учетом структуры перестановок выделяют их подмножество, содержащее оптимальное решение.

Несмотря на то, что методы разбиения множества значений целевой функции [1–8] или перестановок [11, 22, 23, 25, 26, 45–47] на подмножества для разных индивидуальных задач разные и не основаны на строгих доказательствах, возникает вопрос: с каким свойством связано это разбиение.

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ИЗУЧЕНИИ ПОДКЛАССОВ РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧ

Как показано в [48], в задачах комбинаторной оптимизации закономерность изменения значений целевой функции зависит от заданного упорядочения комбинаторных конфигураций, а на подмножестве изоморфных комбинаторных конфигураций функция цели изменяется так, как и на множестве перестановок (комбинаторные конфигурации, количество элементов в которых одинаковое, называются изоморфными). Используя это свойство, можно поставить задачу отсечения неэффективных вариантов по-другому: провести разбиение на подмножества не множества значений целевой функции, а множество комбинаторных конфигураций (аргумента), используя независимые от входных данных параметры, например разные комбинации элементов матрицы. Для полученного упорядочения выработать стратегию определения закономерности изменения значений целевой функции, которая основана на распознавании структуры входных данных.

Как следует из выражения (1), для фиксированного аргумента величина произведения значений функции натурального аргумента и комбинаторной функции зависит от комбинации элементов заданных матриц. Последовательность этих величин назовем вариантом решения задачи и обозначим ее $u(w^k, l)\big|_1^z = (u_1(w^k,1),\dots, u_z(w^k, z)) \in H_u$, где H_u — их множество, а $u_l(w^k, l) = \beta_j(f(j), w^k)\varphi(j)$ и $\varphi(j)=1$, если $\varphi(j) \in \{0,1\}$, z — количество значений $u(w^l, l)$ в $u(w^k, l)\big|_1^z$. По способу образования вариантов решения задачи их множество разделяется на подмножества. В первом подмножестве находятся последовательности, значения которых выбраны с матрицы, начиная с элемента, имеющего адрес 1 первой строки матрицы, во втором подмножестве — начиная с элемента по адресу 2 и т.д. Количество таких подмножеств для разных задач разное. Соответственно, на подмножества разделяется и множество комбинаторных конфигураций, которые обозначим $K_1, K_2, \dots, K_{q^*}$, q^* — количество таких подмножеств. Например, для задачи коммивояжера индекс 1 в K_1 означает, что для $w^k \in K_1$ все варианты решения задачи $u(w^k, l)\big|_1^z$ содержат элемент из адреса 1 первой строки матрицы $Q(w^1)$, индекс 2 в K_2 означает, что варианты решения содержат элемент из адреса 2, но не содержат из адреса 1 и т.д. Образованные подмножества состоят из меньших подмножеств. Такое упорядочение множества комбинаторных конфигураций проводится по первому, второму, третьему и других значениях вариантов решения задачи и не зависит от входных данных.

Зная правила образования вариантов решения задачи, для задач коммивояжера, размещения, кластеризации, задачи о назначениях с регулярной структурой входных данных (функции натурального аргумента дискретные и изменяются как линейные, периодические, монотонные) несложно установить, как изменяется значение целевой функции на заданном упорядочении подмножеств $K_1, K_2, \dots, K_{q^*}$ [48–54]. В описанной ниже задаче о назначениях входные данные заданы двумя несимметрическими матрицами, одна из которых — $(0, 1)$-матрица. Количество подмножеств, на которые разбивается множество перестановок для этой задачи, равняется n. В задаче размещения входные данные заданы двумя симметрическими матрицами, элементы которых — действительные числа. Количество подмножеств, на которые разбивается множество перестановок для этой задачи, равняется m. В задаче коммивояжера входные данные заданы двумя симметрическими матрицами, одна из которых — $(0, 1)$-матрица. Количество подмножеств множества перестановок для этой задачи равняется $n-2$.

Приведем следующие теоремы, доказательства которых изложены в [48–54]. Закономерность изменения комбинаторной функции во всех случаях задана для первой перестановки $w^1 \in W$. Целевая функция в этих задачах дискретная и многоэкстремальная. Если ее аргумент — перестановка, то комбинаторной матрицей может быть любая из заданных.

Теорема 1. Если в задаче о назначениях $\varphi(j) = k^0 j + e$, $\varphi(j) = k^0 (n^2 - j + 1) + e$ или $\varphi(j+n) = \varphi(j)$, $j = \overline{1, n^2}$, то целевая функция постоянная на всем множестве перестановок независимо от их упорядочения, где $k^0, e \in R$.

Теорема 2. Если в задаче о назначениях $\varphi(j+2n) = \varphi(j)$, а для $1 \le j \le n$ $\varphi(j) = \big|\, |j-n| - n \big| + e$ и для $(n+1) \le j \le 2n$ $\varphi(j) = \big|\, |j-n| - (n+1) \big| + e$, $j = \overline{1, n^2}$, $e \in R$, то аргумент, для которого целевая функция принимает наименьшее значение, находится в каждом из первых $\lfloor n/2 \rfloor$ подмножеств K_t, а для наибольшего — в каждом из $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \ldots, n$ подмножеств K_t.

Если в задаче о назначениях $\varphi(j+2n) = \varphi(j)$, а для $1 \le j \le n$ $\varphi(j) = \big|\, |j-n| + 1 \big| + e$ и для $(n+1) \le j \le 2n$ $\varphi(j) = |j-n| + e$, $j = \overline{1, n^2}$, то для наибольшего значения целевой функции перестановки находятся в каждом из первых $\lfloor n/2 \rfloor$ подмножеств K_t, а для наименьшего — в каждом из $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \ldots, n$.

Теорема 3. Если в задаче размещения $\varphi(j) = k^0 j + e$, $\beta_j(f(j), w^1) = k^0 j + e$, $j = \overline{1, m}$, то аргумент, для которого $F(w^k)$ принимает наибольшее значение, находится в подмножестве K_1, а для наименьшего — в подмножестве K_m.

Если в задаче размещения $\varphi(j) = k^0 (m - j + 1) + e$ и $\beta_j(f(j), w^1) = k^0 (m - j + 1) + e$, $j = \overline{1, m}$, то для наименьшего значения целевой функции аргумент находится в первом подмножестве, а для наибольшего — в K_m.

Положим $\phi(j+2) = \phi(j)$ и $\phi(j) = [1 + (-1)^j]\dfrac{e}{2} + [1 + (-1)^{j+1}]\dfrac{d}{2}$, $\widetilde{\phi}(j+2) = \widetilde{\phi}(j)$, и $\widetilde{\phi}(j) = [1 + (-1)^j]\dfrac{d}{2} + [1 + (-1)^{j+1}]\dfrac{e}{2}$, $d < e$, $e, d \in R$, $j = \overline{1, m-1}$.

Теорема 4. Если в задаче размещения $\varphi(j) = k^0 j + e$, $\beta_j(f(j), w^1) = \phi(j)$, $j = \overline{1, m}$, то для наименьшего значения функции цели аргумент находится в каждом из $\lfloor m/2 \rfloor + 1, \ldots, m$ подмножеств, а для наибольшего — в каждом из первых $\lfloor m/2 \rfloor$ подмножеств K_t.

Если в задаче размещения $\varphi(j) = k^0 j + e$, $\beta_j(f(j), w^1) = \widetilde{\phi}(j)$, $j = \overline{1, m}$, то для наименьшего значения функции цели аргумент находится в каждом из первых $\lfloor m/2 \rfloor$ подмножеств, а для наибольшего — в каждом из $\lfloor m/2 \rfloor + 1, \ldots, m$ подмножеств.

Теорема 5. Если в задаче размещения $\varphi(j) = \phi(j)$, $\beta_j(f(j), w^1) = \phi(j)$ или $\varphi(j) = \widetilde{\phi}(j)$, $\beta_j(f(j), w^1) = \widetilde{\phi}(j)$, $j = \overline{1, m}$, то для наименьшего значения функции цели аргумент находится в каждом из подмножеств с четными номерами, если m четное, и в каждом из подмножеств с нечетными номерами, если m нечетное. Для наибольшего значения целевой функции w^k находится в первом подмножестве.

Теорема 6. Если в задаче коммивояжера функция натурального аргумента выпуклая унимодальная или $\varphi(j)=k^0 j+e$ или $\varphi(j)=2^j$, то наибольшее значение целевая функция принимает для $w^k \in K_1$, а наименьшее — для $w^k \in K_{n-2}$.

Если в задаче коммивояжера функция натурального аргумента вогнутая унимодальная (матрица Супника) или $\varphi(j)=k^0(m-j+1)+e$ (матрицы Кальмансона, Демиденка, Монжа) или $\varphi(j)=2^{m-j+1}$, то наибольшее значение функция цели принимает для $w^k \in K_{n-2}$, а наименьшее — для $w^k \in K_1$, $j=\overline{1,m}$.

В [16] рассматривается задача коммивояжера, в которой кратчайший гамильтоновый тур (тур Мастера) совпадает с кратчайшим пирамидальным туром, если маршрут пролегает, начиная из города под номером 1 и заканчивается под номером n, а города посещаются в порядке возрастания расстояний между ними, и наоборот. Эти случаи являются задачами Демиденко и Кальмансона.

Тур Мастера и пирамидальный тур находятся в подмножестве K_1, а значение целевой функции, если $\varphi(j)=k^0(m-j+1)+e$, для всех перестановок, которые находятся в этом подмножестве, одинаковое. В [55] показано, что матрицы Кальмансона и Демиденко моделируются функциями натурального аргумента типа $\varphi(j)=k^0(m-j+1)+e$. Это и объясняет, почему Кальмансон и Демиденко для одного и того же типа матриц нашли разные перестановки, для которых целевая функция принимает одинаковое, наименьшее значение, а авторы статьи [16] получили аналогичный результат.

Теорема 7. Если в задаче коммивояжера $\varphi(j)=\phi(j)$, $j=\overline{1,m}$, то наименьшее значение $F(w^k)$ принимает для перестановки $w^k \in K_s$, где $s\in\{1,3,\dots,2j-1\}$. Для наибольшего значения $F(w^i)$ перестановка $w^i \in K_t$, где $t\in\{2,4,\dots,2j\}$.

Если в задаче коммивояжера $\varphi(j)=\widetilde{\phi}(j)$, $j=\overline{1,m}$, то наименьшее значение $F(w^k)$ принимает для перестановки $w^k \in K_s$, где $s\in\{2,4,\dots,2j\}$. Для наибольшего значения $F(w^i)$ перестановка $w^i \in K_t$, где $t\in\{1,3,\dots,2j-1\}$.

В задачах, аргументом целевой функции в которых является разбиение n-элементного множества на подмножества (кластеризация, компоновка), закономерность изменения значений целевой функции зависит от структуры входных данных, от типов разбиений и от упорядочения аргумента.

Уточним некоторые понятия. Разбиением n-элементного множества $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ на η^k подмножеств (блоков) назовем множество подмножеств $\rho^k=(\rho_1^k,\dots,\rho_{\eta^k}^k)$ такое, что $\rho_1^k\cup\ldots\cup\rho_{\eta^k}^k=A$, $\rho_s^k\neq\varnothing$, $\rho_t^k\cap\rho_s^k=\varnothing$, $t\neq s$, $t,s\in$ $\in\{1,\dots,\eta^k\}$, $\eta^k\in\{1,\dots,n\}$. Подмножество $\rho_s^k=(a_1,\dots,a_{\xi_s^k})$, $a_r\in A$, $r\in\{1,\dots,\xi_s^k\}$, а $\xi_s^k\in\{1,\dots,n\}$. Два разбиения ρ^k и ρ^i назовем изоморфными, если $\eta^k=\eta^i$, и для любого подмножества $\rho_t^k\subset\rho^k$ имеется подмножество $\rho_s^i\subset\rho^i$, для которого $\xi_t^k=\xi_s^i$. По количеству блоков и элементов разбиения в них ρ^k разделяются на четыре типа [56]. К первому типу относятся ρ^k, количество элементов во всех блоках которого разное. Количество элементов в блоках ρ_j^k разбиения второго типа одинаковое. Разбиения третьего типа содержат два и больше блоков с одним элементом, при этом хотя бы один блок должен содержать больше одного элемента. В разбиение четвертого типа входят два и больше блоков, количество элементов в которых одинаковое. Из них один блок должен иметь больше элементов, нежели другие.

Рассмотрим некоторые разрешимые случаи задачи кластеризации для подмножества изоморфных разбиений. Положим, что входные данные заданы комбинаторной симметрической матрицей C, где c_{rp} — количество связей между заданными элементами $a_r, a_p\in A$. Элементы симметрической $(0,1)$-матрицы

$Q(\rho^k) q_{rp}(\rho^k) = 1$, если $a_r, a_p \in A$, находятся в одном блоке $\rho_j^k \subset \rho^k$ и $g_{rp}(\rho^k) = 0$ — в противном случае.

Если в ρ^k $\eta^k = 2$, причем $\xi_1^k = n-1$, а $\xi_2^k = 1$, то количество подмножеств в W_η равняется трем: K_1, K_2 и K_n. Если $\eta^k \geq 2$, а $\xi_1^k \geq \xi_2^k \geq \ldots \geq \xi_{\eta^k}^k$, причем $\xi_p^k \neq 1$, то количество подмножеств в W_η равняется $n-1$. Для $\eta^k = 2$ и $\xi_1^k = \xi_2^k$ количество подмножеств равняется $q^* = n - \dfrac{n-2}{2}$. Если $\varphi(j) = k^0 j + e$, то наибольшее значение функция (1) первого типа разбиения принимает для ρ^i, в котором $\xi_1^i < \xi_2^i < \ldots < \xi_{\eta^i}^i$, а наименьшее — для разбиения, в котором $\xi_1^k > \xi_2^k > \ldots > \xi_{\eta^k}^k$. В обоих случаях ρ^i, $\rho^k \in K_1$. Если $\eta^k = 2$ и $\xi_{\eta^k}^k = 1$, то вариант решения задачи для наибольшего $F(\rho^i)$ принадлежит подмножеству K_{q^*}.

Если $\varphi(j) = k^0(m - j + 1) + e$, то наибольшее значение функция (1) первого типа разбиений принимает для ρ^i, в котором $\xi_1^i > \xi_2^i > \ldots > \xi_{\eta^i}^i$, а наименьшее — для разбиения, в котором $\xi_1^k < \xi_2^k < \ldots < \xi_{\eta^k}^k$. В обоих случаях ρ^k, $\rho^i \in K_1$. Если $\eta^k = 2$ и $\xi_2^k = 1$, то вариант решения задачи для наименьшего $F(\rho^k)$ принадлежит подмножеству K_{q^*}.

Если функция натурального аргумента для первого типа разбиений изменяется как выпуклая унимодальная функция, то наибольшее значение $F(\rho^i)$ принимает для $\rho^i \in K_{q^*}$, а наименьшее — для $\rho^k \in K_1$. Если $\eta^k = 2$ и $\xi_2^k = 1$, то для наибольшего $F(\rho^i)$ разбиение $\rho^i \in K_{q^*}$, а для наименьшего — соответственно $\rho^k \in K_\gamma$. Для $F(\rho^i)$ наибольшего второго типа разбиений $\rho^i \in K_1$, а для наименьшего — $\rho^k \in K_{q^*}$, $\gamma = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

Если $\varphi(j)$ для первого типа разбиений изменяется как вогнутая унимодальная функция, то наибольшее значение целевая функция (1) принимает для $\rho^i \in K_1$, а наименьшее — для $\rho^k \in K_{q^*}$. Если $\eta^k = 2$ и $\xi_2^k = 1$, то для наименьшего $F(\rho^k)$ $\rho^k \in K_{q^*}$, а для наибольшего — подмножеству K_γ. Для наименьшего $F(\rho^k)$ второго типа разбиений $\rho^k \in K_1$, а для наибольшего — подмножеству K_{q^*}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование структуры входных данных функциями натурального аргумента существенно расширяет подклассы разрешимых задач, позволяет выделять их в отдельные группы, для которых целевая функция изменяется одинаково, а также определять подклассы, к которым относятся известные разрешимые случаи.

Полученные результаты решения разрешимых задач являются табличными значениями для рассмотренных структур. Усложняя структуру входных данных, следует находить новые разрешимые случаи для разных задач комбинаторной оптимизации, определять для них закономерность изменения значений целевой функции на заданном упорядочении комбинаторных конфигураций, выделять структуры, для которых целевая функция изменяется одинаково, и разрабатывать для них одинаковые правила решения. Эти правила способствуют созданию полиномиальных алгоритмов нахождения оптимального решения для широкого класса задач комбинаторной оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 510 с.
2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 281 с.
3. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1988. — 471 с.
4. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
5. Вагнер Г. Основы исследования операци. — М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 336 с.; Т. 2. — 488 с.
6. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. — Киев: Наук. думка, 1980. — 205 с.
7. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. I, II // Кибернетика. — 1965. — № 1. — С. 45–56; № 2. — С. 85–89.
8. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. — М.: Наука, 1986. — 264 с.
9. Шкурба В.В. О математической обработке одного класса биохимических элементов // Кибернетика. — 1965. — № 1. — С. 62–67.
10. Бурдюк В.Я., Семенов В.А. Разрешимые случаи новой комбинаторной задачи оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 2. — С. 175–178.
11. Супруненко Д.А. О значениях линейной формы на множестве перестановок // Кибернетика. — 1968. — № 2. — С. 59–63.
12. Бурдюк В.Я., Дейнеко В.Г. Оптимальные круговые упорядочения (задача о коммивояжере). — Днепропетровск: ДГУ, 1983. — 103 с.
13. Заика В.В., Швартин С.М. О циклах, порожденных произвольным множеством элементов матрицы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1984. — **24,** № 8. — С. 1230–1240.
14. Демиденко В.М., Гордон В.С., Прош Ж.-М. Условия полиномиальной разрешимости задачи о коммивояжере и верхние оценки ее оптимума // Докл. НАН Беларуси. — 2003. — **47,** № 1. — С. 36–40.
15. Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Двухуровневая задача о назначениях при обобщенном условии Монжа // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. — 2003. — **10,** № 2. — С. 19–28.
16. Jack A.A., van Der V., Sierksma G., van Dal R. Pyramidal tours and the travelling salesman problem // Eur. J. Oper. Res. — 1991. — **52,** N 1. — P. 90–102.
17. Дейнеко В.Г. Розв'язність в комбінаторній оптимізації. Розв'язні випадки проблеми комівояжера та евристичні алгоритми: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. — Київ, 1995. — 48 с.
18. Айзенштат В.С., Максимович Е.П. Некоторые классы задач о бродячем торговце // Кибернетика. — 1978. — № 4. — С. 80–83.
19. Демиденко В.М. Построение релаксации политопа симметрической задачи о коммивояжере на основе сильно разрешимого случая Кальмансона // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. — 2004. — **11,** № 2. — С. 324.
20. Kalmancon K. Edgeconvex circuits and the traveling salesman problem // Canad. J. Math. — 1975. — **27,** N 5. — P. 1000–1010.
21. Supnick F. Extreme Hamiltonian lines // Annals of Math. — 1957. — **66.** — P. 179–201.
22. Демиденко В.М. Специальный случай задачи о бродячем торговце // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1976. — № 5. — С. 28–32.
23. Володарский Я.М., Габович Е.Я., Захарин А.Я. Один разрешимый случай в дискретном программировании // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1976. — № 1. — С. 34–44.
24. Рубинштейн М.И. О симметрической задаче коммивояжера // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 9. — С. 126–133.
25. Демиденко В.М. К оптимизации величины $v(A,\tau)$ на множестве циклов// Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. — 1978. — № 1. — С. 21–26.
26. Демиденко В.М. Об экстремальных задачах на подстановках: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Ин-т математики АН БССР. — Минск, 1980. — 14 с.
27. Айзенштат В.С., Кравчук Д.Н. Об экстремуме линейной формы на множестве всех циклических подстановок // Кибернетика. — 1968. — № 6. — С. 76–81.
28. Айзенштат В.С., Кравчук Д.Н. О минимуме линейной формы на множестве всех полных циклов симметрической группы // Там же. — 1968. — № 2. — С. 64–66.
29. Демиденко В.М. Обобщение условий сильной разрешимости квадратичной задачи о назначениях с матрицами Анти-Монжа и Теплица // Докл. НАН Беларуси. — 2003. — **47,** № 2. — С. 15–18.
30. Monge G. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais // Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année M. DCCLXXXI, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, pour la m̂eme Année, Tirés des Registres de cette Académie. — Paris, 1781. — P. 666–704.

31. Burkard R.E., Klinz B., Rudolf R. Perspectives of Monge properties in optimization // Discrete Appl. Math. — 1996. — **70.** — P. 95–161.
32. Демиденко В.М. Коническая характеризация матриц Монжа // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 87–98.
33. Дейнеко В.Г., Трофимов В.Н. О возможных значениях функционала в специальных задачах коммивояжера // Кибернетика. — 1981. — № 6. — С. 135–136.
34. Бурдюк В.Я., Трофимов В.Н. Обобщение результатов Гилморе и Гомори по решению задачи коммивояжера // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 16–22.
35. Демиденко В.М., Прот Ж.-М. Квадратичная задача о назначениях: достижение оптимума на заданных подстановках // Весцi НАН Беларуси. Сер физ.-мат. навук. — 2005. — № 2. — С. 60–64.
36. Демиденко В.М., Долгий А. Эффективно разрешимые случаи квадратичной задачи о назначениях: с обобщенно монотонными и неполными матрицами Анти-Монжа // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 1. — С. 135–151.
37. Parnas M., Ron D., Rubinfeld R. On testing convexity and submodularity // SIAM J. Comput. — 2003. — **32,** N 5. — P. 1158–1184.
38. Тимофеева Н.К. О некоторых особенностях построения математических моделей задач комбинаторной оптимизации // УСиМ. — 2004. — № 5 — С. 38–45.
39. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 207 с.
40. Салпагаров С.И. Задача о назначениях на фрактальных и предфрактальных графах (Многокритериальная постановка) / Карачаево-Черкес. гос. техн. акад. — Черкесск, 2003. — 34 с. — Деп. в ВИНИТИ 31.12.2003, № 2323 — В2003.
41. Перепелица В.А, Сергиенко И.В., Кочкаров А.М. К проблеме распознавания фрактальных графов // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 4. — С. 72–89.
42. Бобылева Е.В. Частный случай задачи распознавания полного неканонического предфрактального графа // Математичні машини і системи. — 2005. — № 2. — С. 3–14.
43. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
44. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
45. Corrizosa E., Hamacher H.W., Klein R., Nickel S. Solving nonconvex planar location problems by finite dominating sets // J. Clob. Optimiz. — 2000. — **18,** N 2. — P. 195–210.
46. Cornuejols G., Naddef D., Pulleyblank W. The traveling salesman problem in graphs with 3-edge cutsets // J. Assoc. Comput. Mach. — 1985. — **32,** N 2. — P. 383–410.
47. Burkard R.E., Fincke U. The asymptotic probabilistic behaviour of quadratic sum assigument problems // J. Oper. Res. — 1983. — **A27,** N 3. — P. 73–81.
48. Тимофеева Н.К. Зависимость целевой функции задач комбинаторной оптимизации от упорядочения комбинаторных конфигураций // Компьютерная математика. — 2005. — № 2. — С. 135–146.
49. Тимофеева Н.К. Об одном подходе к нахождению оптимального решения в задаче о назначениях // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 1. — С. 104–112.
50. Тимофеева Н.К. Комбинаторные функции в задаче размещения // Компьютерная математика. — 2004. — № 1. — С. 47–56.
51. Тимофеева Н.К. Исследование целевой функции в задаче размещения / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. — Киев, 1991. — 25 с. — Деп. в ВИНИТИ 01.03.91, № 930– В91.
52. Тимофеева Н.К. Частный случай задачи коммивояжера // Разработка мат. и программного обеспечения ППП и решение задач дискретной оптимизации. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН Украины, 1992. — С. 95–101.
53. Тимофеева Н.К. Нахождение оптимального решения в задаче коммивояжера // Программно-алгоритмическое обеспечение решения задач прикладной математики. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН Украины, 1993. — С. 21–26.
54. Тимофієва Н.К. Розв'язний випадок задачі розміщення // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — К.: Київськ. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2006. — № 4. — С. 227–231.
55. Донець Г.П., Тимофієва Н.К. Метод моделювання структури вхідних даних і підкласи розв'язних задач // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS — 2007). П'ята міжнар. наук.-практ. конф. Дніпропетровськ, 14–16 листопада 2007 р. — Дніпропетровськ, 2007. — С. 52–53.
56. Тимофеева Н.К. О некоторых свойствах разбиений множества на подмножества // УСиМ. — 2002. — № 5. — С. 6–23.

Поступила 03.05.2007
После доработки 18.09.2008