КИБЕРНЕТИКА

В.А. ПЕРЕПЕЛИЦА, И.В. КОЗИН, Н.К. МАКСИШКО

УДК 519.86

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ГРАФАХ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ключевые слова: *интервальная оптимизация на графах, вычислительная сложность, полиномиально разрешимые задачи, статистически эффективные алгоритмы.*

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Задача оптимизации обычно определяется как вычислительная проблема, в которой задано множество альтернатив $X=\{x\}$, целевая функция (ЦФ) $F(x)\colon X \to \mathbf{R}$ и требуется найти альтернативу $x^0 \in X$, на которой эта ЦФ принимает экстремальное значение: $F(x^0)=\operatorname*{extr}_{x\in X} F(X)$, $\mathrm{extr}\in\{\min,\max\}$. Для задач оптимизации альтернативы $x\in X$ обычно называют допустимыми решениями, x^0 — оптимумом (оптимальное решение), $X=\{x\}$ — множеством допустимых решений (МДР).

Если множество X дискретное, то соответствующая задача оптимизации называется задачей дискретной оптимизации.

В действительности результат выбора зависит не только от альтернативы x, но и от определенных параметров $b_1,\ldots,b_L$. Если вектор $b=(b_1,\ldots,b_L)\in\mathbf{R}^L$, то ЦФ $F(x)$ есть целевая функция $F(x,b)\colon X\times\mathbf{R}^L\to\mathbf{R}$. Традиционно в оптимизации подразумевается, что известны точные значения всех параметров b_i, $i=\overline{1,L}$. В этом случае понятие «оптимум» имеет непротиворечивое явное определение: допустимое решение x^0 оптимальное, если оно минимизирует (или максимизирует) целевую функцию на X: $F(x^0,b)=\min_{x\in X} F(x,b)$ или $F(x^0,b)=\max_{x\in X} F(x,b)$.

Во многих реальных ситуациях, однако, точные значения параметров рассматриваемой задачи неизвестны. Это можно объяснить следующим: во-первых, параметры являются результатом измерения, а эти измерения в принципе неточные; во-вторых, параметры меняются с течением времени. В таких ситуациях вместо точного значения параметра b_i известен только интервал $B_i=[\underline{b}_i,\overline{b}_i]$ его возможных значений $b_i\in B_i$. В результате известно лишь, что параметрический вектор b принадлежит соответствующему L-мерному параллелепипеду $b\in B=(B_i,\ldots,B_L)$.

В таких ситуациях не ясно, как сформулировать соответствующую задачу оптимизации. Один из возможных подходов состоит в следующем: поскольку точное значение b_i для каждого допустимого решения x неизвестно, то неизвестно и точное значение целевой функции $F(x,b)$; значит, известна лишь область возможных значений этой ЦФ: $F(x,B)=\{F(x,b)\colon b\in B\}$. С точки зрения интервального исчисления эта область представляет собой интервальное расширение [1] ЦФ $F(x,b)$ над интервальным вектором B.

Известны два класса интервальных дискретных задач оптимизации:

1) интервальные постановки задач оптимизации на графах [2–5];

2) задачи линейного программирования с интервальными ЦФ [6–9].

Больший перечень практических приложений дискретных задач оптимизации представлен в [10]. Рассмотрим первый класс этих задач.

2. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ГРАФАХ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть $G=(V,E)$ есть граф [11], где $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ — множество его вершин и $E=\{e_1,\ldots,e_L\}$ — множество его ребер. Задано также множество типовых графов (ТГ) $Q=\{T_1,\ldots,T_q\}$. Допустимое решение x определяется как подграф $x=(V,E_x)$, $E_x\subseteq E$, в котором каждая компонента связности изоморфна некоторому ТГ из Q; $X=X(G,Q)=\{x\}$ — это МДР на графе G для множества ТГ Q.

Рассмотрим конкретные примеры множеств ТГ Q. Пусть множество ТГ Q состоит из одного элемента: $Q=\{T_1\}$. Тогда $X=X(G,Q)$ — МДР задачи о совершенных паросочетаниях, если T_1 — ребро; $X=X(G,Q)$ — МДР задачи коммивояжера, если T_1 — простой n-вершинный цикл. Если элементами множества Q выступают h_t-вершинные звезды, $t=\overline{1,q}$, то $X=X(G,Q)$ — МДР задачи покрытия графа звездами.

Опишем теперь целевую функцию $F(x,B)$. Рассмотренные выше параметры $B_1,\ldots,B_L$ представляют собой веса ребер графа $G=(V,E)$: каждое ребро $e\in E$ взвешено интервальным весом $w(e)=[w_1(e),\ w_2(e)]$. ЦФ задачи оптимизации на графах с интервальными весами имеет весовой вид

$$F(x,G)=\sum_{e\in E_x} w(e)=[F_1(x,G),\ F_2(x,G)]\to \text{extr}, \tag{1}$$

где $\text{extr}\in\{\min,\max\}$ и

$$F_\nu(x,G)=\sum_{e\in E_x} w_\nu(e),\ \ \nu=1,2. \tag{2}$$

ЦФ (1) линейна по слагаемым $w(e)$, следовательно, она принимает интервальные значения, которые получаем, используя известное определение операции суммирования интервалов [1]. Известны различные способы определения оптимальности в случае интервальных значений показателя качества, см., например, [6, 8, 12]. В настоящей статье рассматривается паретовское определение оптимальности. Будем измерять качество каждого допустимого решения $x\in X$, рассматривая интервал $F(x,G)$ (1) возможных значений этой ЦФ. Для того чтобы выбрать оптимальное решение, сравним эти интервалы. При этом $F(x,G)$ (1) назовем интервальной целевой функцией (ИЦФ)

Определение 1. Пусть ИЦФ (1), (2) максимизируемая (т.е. $\text{extr}=\max$) и пара решений $x,\ y\in X=X(G,Q)$. Будем считать, что допустимое решение $x\in X$ лучше, чем допустимое решение $y\in X (x\succ y)$, если в обозначениях (2) выполняются неравенства $F_1(x,G)\ge F_1(y,G)$, $F_2(x,G)\ge F_2(y,G)$ и хотя бы одно из них строгое; x и y эквивалентные, если $F(x,G)=F(y,G)$; иначе x и y несравнимые.

Определение 2. В условиях определения 1 решение $\widetilde{x}\in X$ называется паретовским оптимумом, если не существует такого $x\in X$, что $x\succ\widetilde{x}$.

Совокупность всех паретовских оптимумов называем паретовским множеством и обозначаем $\widetilde{X}$, $\widetilde{X}\subseteq X$. Классом эквивалентности решения x называется множество всех решений, эквивалентных ему. В классической (т.е. неинтервальной и однокритериальной) постановке задача оптимизации решена, если получено одно решение, которое принадлежит множеству всех оптимумов, образующих единственный класс эквивалентности. С учетом этого условия считаем, что искомым решением интервальной задачи дискретной оптимизации является полное множество альтернатив (ПМА).

Определение 3. ПМА определяется как такое подмножество X^0 паретовского множества $\widetilde{X}$, которое содержит по одному представителю из каждого класса эквивалентности.

3. СВЕДЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ К ДИСКРЕТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Вернемся к интервальной ЦФ (1), (2), которая определена для интервально-взвешенного графа $G=(V,E)$ и множества ТГ $Q=\{T_1,\ldots,T_q\}$. Граф G рассматриваем также в виде 2-взвешенного графа: если ребро e взвешено интервалом $w(e)=[w_1(e), w_2(e)]$, то в процессе «2-взвешевания» этому ребру приписываем два веса: $w_1(e)$ и $w_2(e)$, которые представляют собой концы интервала $w(e)$. Далее, на представленном в разд. 2 МДР $X=X(G,Q)=\{x\}$ определим векторную целевую функцию (ВЦФ)

$$F(x,G)=(F_1(x,G), F_2(x,G)), \tag{3}$$

которая состоит из критериев

$$F_\nu(x,G)=\sum_{e\in E_x} w_\nu(e)\to \text{extr},\ \nu=1,2, \tag{4}$$

где $\text{extr}\in\{\min,\max\}$.

Определение 4. Пусть ВЦФ (3) состоит из максимизируемых критериев (4), т.е. $\text{extr}=\max$ для $\nu=1,2$. Решение $\tilde{x}\in X$ называем паретовским оптимумом, если МДР X не содержит такого элемента x^*, для которого выполняются неравенства $F_\nu(x^*, G)\ge F(\tilde{x},G)$ и хотя бы одно из них строгое; $\widetilde{X}=\{\tilde{x}\}$ — паретовское множество.

Определение 5. В условиях определения 4 подмножество $X^0\subseteq\widetilde{X}$ называется ПМА, если выполняются следующие два условия: удовлетворяется равенство $F(X^0)=F(\widetilde{X})$, где определяем $F(X^*)=\{F(x,G): x\in X^*\}$ для всякого $X^*\subseteq X$, и мощность $|X^0|$ подмножества X^0 минимальна.

В [3] представлено строгое обоснование сводимости интервальной задачи об остовных деревьях к 2-критериальной задаче об остовных деревьях. Представленное в [3] доказательство этого сведения можно применить к общей постановке интервальной задачи оптимизации на графах, которая сформулирована выше. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для всякого множества ТГ $Q=\{T_1,\ldots,T_q\}$ задача оптимизации на интервально-взвешенном графе с интервальной ЦФ (1), (2) сводится к векторной задаче с ВЦФ (3), (4) на этом же 2-взвешенном графе: паретовское множество и ПМА 2-критериальной задачи с ВЦФ (3), (4) на 2-взвешенном графе G однозначно представляет паретовское множество и ПМА этой же задачи с ИЦФ (1), (2) на интервально-взвешенном графе G.

4. ОЦЕНКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

Рассмотрим формулировку интервальной задачи на графах (разд. 2). Используя понятие «задача», как предикатную переменную, обозначаем его $Z(Q)$ в смысле понятия массовая задача, которое предложено в [13]. Если эта интервальная задача рассматривается как индивидуальная задача [13] на конкретном интервально-взвешенном графе $G=(V,E)$, то обозначим ее $Z(G,Q)$; ее МДР, паретовское множество и ПМА — соответственно $X=X(G,Q)$, $\widetilde{X}=\widetilde{X}(G,Q)$ и $X^0=X^0(G,Q)$.

Пусть $S(n)=\{G\}$ — множество всех (невзвешенных) n-вершинных графов.

Определение 6. Интервальная задача $Z(Q)$ с ИЦФ (1), (2) называется полной (обладает свойством полноты), если для каждого ее МДР $X(G,Q)$, $G=(V,E)\in S(n)$, $n=1,2,\ldots$, существуют такие веса $w(e)$, $e\in E$, что выполняются равенства

$$X^0(G,Q)=\widetilde{X}(G,Q)=X(G,Q). \tag{5}$$

Согласно [13] интервальная задача труднорешаема, если не существует такого алгоритма, который гарантировал бы нахождение ПМА с полиномиальной вычислительной сложностью. Мощность ПМА $|X^0|$ можно рассматривать как нижнюю оценку вычислительной сложности его нахождения. Это означает, что интервальная задача труднорешаема, если максимальная мощность ПМА растет экспоненциально с ростом размерности задачи, т.е. с ростом размерности графов, где максимум берется по всем графам $G \in S(n)$.

Как правило, вычисление мощности МДР представляет меньшую трудность по сравнению с вычислением мощности ПМА. Если рассматриваемая задача обладает свойством полноты, то с учетом равенств (5) снижается сложность нахождения максимальной мощности ПМА. Представляет интерес нахождение нетривиальных условий, при выполнении которых рассматриваемая интервальная задача на графах $G \in S(n)$ обладает свойством полноты. С этой целью рассмотрим какое-либо множество $Q = \{T_k\}$, состоящее из ТГ, $T_k = (V_k, E_k)$, $k = 1, 2, \dots, q$.

Определение 7. Множество ТГ $Q = \{T_k^0\}$, $k = \overline{1, q}$, называется однородным, если мощности множеств вершин $|V_k|$ и ребер $|E_k|$ одинаковы для всех ТГ $T_k^0 = (V_k^0, E_k^0)$ из Q: $|V_k^0| = c_1$ и $|E_k^0| = c_2$, $k = \overline{1, q}$.

В определении 7 свойство однородности не требует, чтобы величины c_1 и c_2 были константами, не зависящими от размерности графа $G \in S(n)$. Допускается, что значения c_1 и c_2 могут быть растущими функциями от n. Например, для задачи об остовных деревьях на n-вершинных графах множество $Q = \{T_k^0\}$, $k = \overline{1, q}$, состоит из всех попарно неизоморфных n-вершинных деревьев ($q = q(n)$ — мощность множества всех таких деревьев) и при этом для всех ТГ $T_k^0 = (V_k^0, E_k^0) \in Q$ выполняются равенства $|V_k^0| = n$, $|E_k^0| = n - 1$, $k = \overline{1, q}$. Отметим также, что все 1-элементные множества ТГ вида $Q = \{T_1^0\}$ однородные.

Рассмотрим интервалы $w' = [w_1', w_2']$ и $w'' = [w_1'', w_2'']$ на действительной прямой.

Определение 8. Бинарное отношение $\subset$ строгого включения $w' \subset w''$ означает, что выполняются следующие строгие неравенства:

$$w_1'' < w_1', \; w_2' < w_2''. \tag{6}$$

Интервальный вес $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$ называем положительным, если выполняется неравенство $w_1(e) \geq 0$. Положительные веса присущи большинству реальных задач дискретной оптимизации.

Теорема 2. Всякая интервальная задача на графах с положительными весами ребер и с ИЦФ (1), (2) является полной, если ее множество ТГ однородное.

Доказательство. Сначала отметим, что интервалы w' и w'' несравнимы, если для них выполняются неравенства (6). Идея доказательства теоремы 2 состоит в следующем: ребра какого-либо графа $G \in S(n)$ взвешиваем попарно несравнимыми интервалами; значения этих весов можно определить таким образом, что для всякой пары $x', x'' \in X(G, Q)$ значения ИЦФ $F(x')$ и $F(x'')$ представляют собой несравнимые интервалы, в силу чего рассматриваемая индивидуальная задача на графе G полная (см. определение 6).

Рассмотрим теперь задачу на графах $G \in S(n)$ с ИЦФ (1), (2), для которой множество ТГ $Q = \{T_1^0\}$, $k = \overline{1, q}$, однородное. Тогда из определения 7 вытекает, что для каждого графа $G \in S(n)$ все его допустимые решения $x = (V_x, E_x) \in X = (G, Q)$ содержат одинаковое количество ребер:

$$|E_x| = c \quad \forall x \in X, \tag{7}$$

где n кратно константе c_1 и величина $c = c(n) = \dfrac{n}{c_1} c_2$ является константой для всякого фиксированного значения n. Пусть в рассматриваемом графе $G = (V, E)$ ребра множества $E = \{e_r\}$, $r = \overline{1, L}$, взвешены интервалами $w(e_r) = [w_1(e_r), w_2(e_r)]$:

$$w_1(e_r) = 2^r, \; r = \overline{1, L}, \tag{8}$$

$$w_2(e_r) = 2^{L+1} - w_1(e_r), \; r = \overline{1, L}. \tag{9}$$

Рассмотрим произвольную пару допустимых решений $x^s = (V, E_{x^s}) \in X(G, Q)$, $s = 1, 2$, в которых номера ребер множеств $E_{x^s} = \{e_{r_1^s}, e_{r_2^s}, \ldots, e_{r_c^s}\} \subseteq E$, $s = 1, 2$, образуют соответственно множества $M_s = \{r_1^s, r_2^s, \ldots, r_c^s\}$, $s = 1, 2$, где $c = \dfrac{n}{c_1} c_2$. Для этих решений с учетом (8), (9) вычислим значения ИЦФ (1), (2):

$$F(x^s) = \sum_{e \in E_{x^s}} w(e) = [F_1(x^s, G), F_2(x^s, G)], \; s = 1, 2, \tag{10}$$

где

$$F_1(x^s) = \sum_{e \in E_{x^s}} w_r(e) = \sum_{r \in M_s} 2^r, \; s = \overline{1, 2}, \tag{11}$$

$$F_2(x^s) = \sum_{e \in E_{x^s}} w_2(e) = D - \sum_{r \in M_s} 2^r = D - F_1(x^s), \; s = 1, 2, \tag{12}$$

где константа $D = 2^{L+1} \cdot c$.

Рассмотрим множества $M_{1,2} = M_1 \setminus M_2$ и $M_{2,1} = M_2 \setminus M_1$ и выделим в них максимальные элементы $r^1 = \max\limits_{r_t^1 \in M_{1,2}} r_t^1$, $r^2 = \max\limits_{r_t^2 \in M_{2,1}} r_t^2$. Поскольку $M_1 \neq M_2$ и $|M_1| = |M_2|$, то $M_{1,2} \bigcap M_{2,1} = \varnothing$, в силу чего $r^1 \neq r^2$. Пусть имеет место строгое неравенство $r^1 < r^2$, тогда с учетом равенства мощностей $|M_{1,2}| = |M_{2,1}|$ для значений (11), (12) выполняются следующие соотношения:

$$F_1(x^1) < 2^{r^1 + 1} \leq 2^{r^2} \leq F_1(x^2) \leq F_2(x^2) < F_2(x^1). \tag{13}$$

Сравнивая (13) и (6), согласно определению 8 можем утверждать, что для ИЦФ (1), (2) ее интервальные значения (10) несравнимы. Таким образом, с учетом произвольного выбора графа $G \in S(n)$ и x^1, $x^2 \in X(G, Q)$ получаем, что согласно определению 8 и неравенству (13) рассматриваемая интервальная задача полная.

Теорема 2 доказана.

Рассматривая класс однородных множеств ТГ Q, условимся нумеровать их индексом $k = 1, 2, \ldots$, т.е. рассматривать класс $\mathbf{Q} = \{Q^k\}$. В терминологии [13] это означает, что класс $\mathbf{Q}$ определяет собой класс массовых задач на графах. Например, в [15] значения $k = 1, 2, 3, 4$ соответствуют следующим задачам:

Q^1 — задача о совершенных паросочетаниях;

Q^2 — задача об остовных деревьях;

Q^4 — задача коммивояжера;

Q^7 — задача покрытия графа звездами одинаковой степени, т.е. $Q^7 = \{T_1^7\}$, где T_1^7 — h-вершинная звезда, n кратно h.

Для всякого множества ТГ $Q^k \in \mathbf{Q}$ при фиксированном значении n можно вычислить максимум мощности МДР $\mu_k(n) = \max\limits_{G \in S(n)} |X(G, Q^k)|$. Например, для Q^k, $k = 1, 2, 4$, этот максимум определяется следующими формулами [15]:

$$\mu_1(n) = \frac{n!}{(n/2)! 2^{n/2}}, \; \mu_2(n) = n^{n-2}, \; \mu_4(n) = \frac{1}{2}(n-1)!. \tag{14}$$

В настоящей статье искомым решением интервальной задачи оптимизации на графах является ПМА (см. определение 3), точнее, перечисление всех элементов ПМА, т.е. представление каждого элемента $x \in X^0$ в явном виде [15, 16]. С учетом (14) это означает, что для представленных выше задач проблема нахождения ПМА труднорешаема [13] или (используя терминологию [17]) имеет экспоненциальную вычислительную сложность. Во-первых, если для двух множеств ТР Q^{k_1} и Q^{k_2} выполняется строгое включение $Q^{k_1} \subset Q^{k_2}$, то для всякого графа $G \in S(n)$ выполняется (вообще говоря, нестрогое) включение $X(G, Q^{k_1}) \subseteq X(G, Q^{k_2})$. Во-вторых, для всех известных задач оптимизации на графах [3, 4, 11, 13–17] мощность МДР $|X(G, Q^k)|$ растет экспоненциально с ростом n в случае, когда G — полный граф. С учетом этих замечаний из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие 1. Для известных однородных множеств ТГ Q^k соответствующие задачи оптимизации на графах с ИЦФ (1), (2) труднорешаемы.

Рассмотрим общий случай, когда граф G и множество ТГ Q произвольные, т.е. $G \in S(n)$, а Q не однородно в смысле определения 7 и, кроме того, веса ребер графа $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$ могут быть и отрицательными, в частности, $w_1(e) \le w_2(e) \le 0$.

Лемма. Для всякой пары «граф $G = (V, E) \in S(n)$, множество ТГ Q», для которой является непустым МДР $X(G, Q) \ne \varnothing$, существуют такие веса $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$ ребер $e \in E$, что каждая пара допустимых решений $x_1, x_2 \in X(G, Q)$ несравнима по значению ИЦФ (1), (2).

Доказательство. По аналогии с (8), (9) перенумерованные индексом $r = 1, 2, \ldots, L$, $L = |E|$ ребра $e_r \in E$ взвесим интервалами следующего вида: $w(e_r) = [w_1(e_r), w_2(e_r)]$, где $w_2(e_r) = 2^r$, $w_1(e_r) = -2^r$. Для каких-либо допустимых решений $x_1, x_2 \in X(G, Q)$ в паре множеств $E_{x_1} \subset E$, $E_{x_2} \subset E$ определим максимальный номер $k \in \{1, 2, \ldots, L\}$ такой, что e_k принадлежит одному из этих множеств (для определенности будем полагать, что $e_k \in E_{x_1}$) и не принадлежит другому ($e_k \notin E_{x_2}$). Из того, что $e_k \in E_{x_1}$, вытекает выполнение строгих неравенств $F_1(x_1) =$

$$= \sum_{e_r \in E_{x_1}} w_1(e_r) < F_1(x_2) = \sum_{e_r \in E_{x_2}} w_1(e_r) < F_2(x_2) = \sum_{e_r \in E_{x_2}} w_2(e_r) < F_2(x_1) = \sum_{e_r \in E_{x_1}} w_2(e_r),$$

или, что то же самое, выполнение строгого включения $F(x_2) \subset F(x_1)$ (см. определение 8). Согласно определению 1 и с учетом произвольного выбора пары $x_1, x_2 \in X(G, Q)$ это включение является утверждением леммы.

Лемма доказана.

Согласно определению 6 всякая индивидуальная задача оптимизации на графах полная, если ее МДР пустое или состоит из единственного элемента. Тогда из леммы справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Всякая задача оптимизации на графах $G \in S\ (n)$ с произвольными интервальными весами и ИЦФ (1), (2) полная для любого множества ТГ.

Из теоремы 3 вытекает следствие 2.

Следствие 2. Всякая задача оптимизации на графах $G \in S\ (n)$ с произвольными весами и ИЦФ (1), (2) труднорешаема, если максимальная мощность МДР $|X\ (G, Q)|$ не ограничена сверху никаким полиномом от n.

5. ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ ПОДКЛАССЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ

Теорема 1 констатирует сведение интервальных задач на графах к 2-критериальным задачам. Как известно [15], задачи оптимизации на графах с ВЦФ весового вида (3), (4) труднорешаемые. Существует ряд подходов, чтобы элиминировать проблему труднорешаемости, которая обусловлена свойством полноты (см. определение 6). Один из таких подходов состоит в том, чтобы ввести специальные дополнительные условия (ограничения) в математическую постановку рассматриваемой массовой задачи. Например, для ВЦФ вида (3), (4) вместо второго минимизируемого (максимизируемого) критерия весового вида ввести критерий вида MINMAX (MAXMIN). В результате получаем, что максимальная мощность ПМА $|X^0 (G, Q^k)|$, $G \in S\ (n)$, ограничена полиномом порядка $O(n^2)$ [15].

По аналогии с 2-критериальными задачами [18] для рассматриваемых интервальных задач на графах представляют интерес такие нетривиальные условия, при которых мощность ПМА $|X^0 (G, Q^k)|$ для всех $G \in S\ (n)$ ограничена сверху константой или хотя бы полиномом от n «невысокой» степени. В этой связи рассмотрим интервальную задачу покрытия графа звездами при выполнении следующих условий:

1) множество ТГ $Q^7 = \{T_1^7\}$ состоит из одного элемента, который является h-вершинной звездой;

2) задача рассматривается на 2-дольных графах $G = (V_1, V_2, E) \in S\ (n)$, у которых число вершин первой (второй) доли равно $|V_1| = m\ (|V_2| = l)$, общее число вершин $n = m + l$ кратно h и $l = m(h-1)$;

3) всякое допустимое решение $x = (V_1, V_2, E_x) \in X\ (G, Q^7)$ представляет собой такой остовный подграф графа G, у которого каждая из m компонент связности является h-вершинной звездой, а ее центр — некоторой вершиной $v \in V_1$;

4) ребра $e_r \in E$ взвешены интервалами из множества A, состоящего из R интервалов $a^r = [a_1^r, a_2^r]$ одинаковой длины, т.е. интервалы из A удовлетворяют равенствам

$$a_2^r - a_1^r = d, \ r = \overline{1, R}. \qquad (15)$$

Определяемую условиями 1)–4) задачу покрытия графа звездами с ИЦФ (1), (2) обозначим Z_7^*. Доказательство полиномиальной разрешимости задачи Z_7^* конструктивно, т.е. базируется на описании и обосновании соответствующего полиномиального алгоритма α_1, который состоит из трех этапов.

Этап 1. В данном графе $G = (V_1, V_2, E) \in S\ (n)$ для каждой вершины $v_i \in V_1$, $i = \overline{1, m}$, выделяем подмножество $V_2(v_i)$ всех вершин $v_j \in V_2$, смежных с v_i, а также подмножество $E\ (v_i) = \{e = (v_i, v_j) : v_j \in V_2 (v_i)\} \subseteq E$ всех ребер, инцидентных вершине v_i. Далее, для каждой вершины $v_i \in V_1$ строится множество $\overline{V}_1 (v_i) = \{v_i^s\}$,

$s=\overline{1, h-2}$, ее дубликатов. Объединение этих множеств по индексу $i=1,2,\ldots,m$ вместе с долей V_1 образует пополненную первую долю $\overline{V}_1=V_1\cup\left(\bigcup_{i=1}^{m}\overline{V}_1(v_i)\right)$. Затем для каждого дубликата $v_i^{s}\in V_1(v_i)$ строится звезда $T_1(v_i^s)$ с центром $v_i^{s}\in\overline{V}_1(v_i)$ и множеством ребер $\overline{E}\,(v_i^{s})=\{e=(v_i^{s},v_j): v_j\in V_2(v_i)\}$. Таким образом, множество E пополняется ребрами звезд-дубликатов $T_1(v_i^{s})$, $s=\overline{1,h-2}$, $i=\overline{1,m}$. Результатом этого пополнения является 2-дольный граф $\overline{G}=(\overline{V}_1,V_2,\overline{E})$, $\overline{E}=E\cup\left(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{s=1}^{h-1}\overline{E}\,(v_i^s)\right)$ с равномощными долями: $|\overline{V}_1|=|V_2|=l$.

Этап 2. Сначала в графе $\overline{G}$ интервальные веса $w(e)=[w_1(e),w_2(e)]$ ребер $e\in\overline{E}$ заменяются на числа $w_1(e)$. Далее в 1-взвешенном графе $\overline{G}$ с помощью подходящего алгоритма [14] (например, венгерский алгоритм) выделяем оптимальное совершенное паросочетание $\overline{x}=(\overline{V}_1,V_2,\overline{E}_{\overline{x}})$, где $\overline{V}_2(v_i)$ — подмножество всех вершин $v_j\in V_2$, смежных с дубликатами $v_i^{s}\in\overline{V}_1(v_i)$ или с самой вершиной $v_i\in V_1$; мощность $|\overline{V}_2(v_i)|=h-1$, $i=\overline{1,m}$; $\bigcup_{i=1}^{m}\overline{V}_2(v_i)=V_2$. В завершение этапа 2 для каждого ребра $e\in\overline{E}_{\overline{x}}$ числовой вес $\overline{w}\,(e)$ заменяется на первоначальный интервальный вес $w(e)=\alpha^{r}=[a_1^r,a_2^r]$.

Этап 3. К полученному совершенному паросочетанию $\overline{x}$ применяется известная операция склеивания вершин графа: для каждого $i=1,2,\ldots,m$ вершины-дубликаты $v_i^s\in\overline{V}_1(v_i)$ склеиваются с вершиной $v_i\in V_1$; для полученной после склеивания с v_i вершины оставляем обозначение v_i. Эта вершина является центром полученной h-взвешенной звезды, состоящей из $(h-1)$ ребер $e=(v_i,v_j)$, таких что $v_j\in\overline{V}_2(v_i)$. Таким образом, результатом работы этапа 3 является остовный подграф $x^{0}=(V_1,V_2,E_{x_0})$ исходного графа $G=(V_1,V_2,E)$, его компонентами связности являются m h-вершинных звезд с центрами в вершинах $v_i\in V_1$, $i=\overline{1,m}$, т.е. x^0 — допустимое решение задачи Z_7^*.

Пусть $S^*(n)$ — подмножество 2-дольных графов $G\in S\,(n)$, удовлетворяющих условиям 1)–4) задачи Z_7^*.

Теорема 4. Для всякого графа $G\in S^*(n)$ с непустым МДР задачи Z_7^* ее ПМА $X^0(G,Q^7)$ состоит из одного допустимого решения x^0, которое алгоритм α_1 находит с вычислительной сложностью $O(n^3)$.

Доказательство. Рассмотрим индивидуальную задачу [13] Z_7^* с минимизируемой ИЦФ (1) на конкретном графе $G=(V_1,V_2,E)\in S^*(n)$ и определим на МДР $X=\{x\}$ для интервальных значений его ИЦФ (1), (2) бинарное отношение нестрогого предпочтения $\vartriangleleft$. Выражение $F\,(x')\vartriangleleft F\,(x'')$ означает выполнение нестрогих неравенств $F_\nu(x',G)\le F_\nu(x'',G)$, $\nu=1,2$.

По определению алгоритма α_1 на его выходе получаем допустимое решение $x^0\in X=X\,(G,\mathbf{Q}^7)$, на котором достигает минимума значение левого конца ИЦФ (1), (2):

$$F_1(x^0)=\min_{x\in X}F_1(x). \tag{16}$$

Из равенств (15) следует, что в представлении (2) концов интервала (1) значение правого конца $F_2(x)$ определяется выражением

$$F_2(x) = F_1(x) + ld \quad \forall x \in X, \tag{17}$$

где $l = |V_2|$. Из (16) и (17) получаем, что для значения ИЦФ $F(x^0) = (F_1(x^0), F_2(x^0))$ выполняется бинарное отношение нестрогого предпочтения по отношению к любому допустимому решению $x \in X$: $F(x^0) \triangleleft F(x)$ $\forall x \in X$. При этом согласно определению этапа 2 вычислительная сложность $\tau(\alpha_1)$ алгоритма α_1 имеет тот же порядок, что и вычислительная сложность задачи о совершенных паросочетаниях на 2-дольном графе [14]: $\tau(\alpha_1) \le O(l^3) \le O(n^3)$.

Теорема 4 доказана.

Определяемую условиями 1)–4) полиномиально разрешимую задачу Z_7^* можно расширить, ослабив условие 2) следующим образом. Задачу покрытия графа звездами рассматриваем на всех графах $G = (V, E) \in S(n)$, но при условии, что множество ТГ Q^7 состоит из такой звезды, у которой число вершин

$$h \ge \frac{n}{c_0}, \tag{18}$$

где c_0 — независимая от n константа. В этом случае можно предложить полиномиальный алгоритм α_2, у которого подготовительный этап осуществляет перебор вариантов множества вершин первой доли $V_1 \subset V$ для индуцируемых в данном графе $G = (V, E) \in S(n)$ 2-дольных графов $\overline{G} = (V_1, V_2, \overline{E})$, $V_1 \cup V_2 = V$, $|V_1| = m$. Вычислительная сложность этого перебора определяется числом сочетаний из n элементов по m, т.е. она ограничена сверху полиномом $O(n^{c_0})$. Далее, для каждого варианта первой доли $V_1 \subset V$ осуществляется решение рассмотренной выше индивидуальной задачи Z_7^* на конкретном 2-дольном графе $\overline{G} = (V_1, V_2, \overline{E})$, $V_2 = V \setminus V_1$, $\overline{E} \subseteq E$. Заметим, что для всякого $c_0 \ge 3$ выполняется неравенство $\tau(\alpha_1) \le O(n^{c_0})$. Таким образом, неравенство (18) вместе с условиями 1), 3) и 4) определяет еще один подкласс полиноминально разрешимых интервальных задач покрытия графа звездами.

6. СТАТИСТИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ

На основании теоремы 1 методы решения многокритериальных задач можно использовать для интервальных задач. Среди методов отыскания паретовских оптимумов наиболее распространенные алгоритмы линейной свертки критериев (ЛСК):

$$F^\lambda(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu F_\nu(x),$$

где $\lambda \in \Lambda_N = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \colon \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu = 1,\ \lambda_\nu > 0,\ \nu = \overline{1, N} \right\}$. Если все критерии $F_\nu(x)$, $\nu = \overline{1, N}$, минимизируемые (максимизируемые) и принимают положительные значения $F_\nu(x) > 0 \; \forall x \in X$, то элемент $x^\nu \in X$ — паретовский оптимум, если на нем значение ЛСК $F^\nu(x)$ достигает минимума (максимума). Известно [17], что многокритериальные задачи на графах неразрешимы с помощью алгоритмов ЛСК. Вместе с тем всякая индивидуальная N-критериальная задача разрешима с помощью алгоритма ЛСК, если она обладает следующим свойством γ:

«ПМА этой задачи состоит из одного элемента, т.е. мощность $|X^0|=1$». В частности, если какая-либо индивидуальная интервальная задача оптимизации на графах с ИЦФ (1), (2) обладает свойством γ, то для соответствующей 2-критериальной задачи с ВЦФ (3), (4) существует такой вектор $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2$, при котором линейная свертка критериев (4) достигает требуемого экстремума на элементе $x^0 \in X^0$, причем $|X^0|=1$.

Представленную выше задачу Z_7 покрытия графов $G \in S(n)$ звездами из 1-элементного множества ТГ Q рассмотрим при условии, которое в некотором смысле полярно противоположно условию (18), а именно, множество $Q=\{T_1\}$, в котором T_1 — звезда с числом вершин,

$$h \le c_0, \tag{19}$$

где c_0 — независящая от n константа и n кратно h.

Предлагаемый алгоритм α_3 состоит из следующих этапов.

Этап 1. В данном n-вершинном графе $G=(V, E)$ произвольным образом выделяем подмножество $V_1 \subset V$ центров звезд искомого покрытия, $V_1=\{v_i\}$, $i=1,2,\ldots, m$, $m=\dfrac{n}{h}$. Оставшееся подмножество $(V \setminus V_1)$ обозначаем $V_2=\{v_j\}$, $j=1,2,\ldots, l$, $l=n-m$. Удалив из графа G все ребра, кроме ребер вида $e=(v_i, v_j)$, $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$, получаем 2-дольный граф $\overline{G}=(V_1, V_2, \overline{E})$. Далее подмножество V_2 произвольным образом разбиваем на $(h-1)$ равномощных подмножеств V_2^t, $t=\overline{1, h-1}$, и индуцируем в $\overline{G}$ 2-дольные подграфы $G^t=(V_1, V_2^t, E^t)$ с равномощными долями $|V_2^t|=|V_1|=m$, $t=\overline{1, h-1}$, $m(h-1)=l$. В этих подграфах интервальные веса $w(e)=[w_1(e), w_2(e)]$ ребер $e \in E$ заменяем соответственно числами $\overline{w}(e)=[w_1(e), w_2(e)]$, $t=\overline{1, h-1}$.

Этап 2. Для определенности полагаем, что ИЦФ (1), (2) максимизируемая $(\mathrm{extr}=\max)$. В каждом подграфе G^t находим оптимальное совершенное паросочетание y_t, $E_{y_t} \subseteq E^t$ с помощью подходящего алгоритма [13]. Ребра этих паросочетаний помечаем звездочкой *, $E_{y_t}=\{e_r^*\}$, $t=\overline{1, h-1}$.

Этап 3. По номерам вершин v_i, v_j отмеченных ребер $e_r^*=(v_i, v_j)$ выделяем в исходном графе G соответствующие ребра, которые также помечаем звездочкой. По определению этапа 2 помеченные ребра в исходном графе G образуют реберное покрытие этого графа h-вершинными звездами, т.е. по завершении этапа 3 получаем допустимое решение $x^*=(V_1, V_2, E_{x^*})$ задачи Z_7 на графе G.

Введем необходимые обозначения:

- $J(m, R, A)=\{G\}$ — множество всех $2m$-вершинных 2-дольных графов $G=(V_1, V_2, E)$, $|V_1|=|V_2|=m$, у которых ребра взвешены интервалами $a^r=[a_1^r, a_2^r]$ из множества $A=\{a^r\}$, $r=1,2,\ldots, R$, где интервал a^R максимальный, т.е. для него выполняется бинарное отношение предпочтения лучше $a^R \succ a^r$ для всех $r=1,2,\ldots, R-1$ (см. определение 1);
- $G_p(m, R)$ — 2-дольный $2m$-вершинный случайный граф [19] с равномощными долями V_1, V_2, в котором для всякой пары вершин $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$, $1 \le i,\ j \le m$, ребро e появляется с вероятностью $p=(R+1)^{-1}$;
- φ, ψ — сколь угодно медленно растущие функции от m, причем $\varphi=\varphi(m) \to \infty$ и $\psi=\psi(m) \to \infty$ при $m \to \infty$, $\varphi=O(\psi)$.

Для множества $J(m, R, A)$ и случайного графа $G_p(m, R)$ из теоремы 4.17 [19] вытекают следствия, которые сформулируем в виде утверждений.

Утверждение 1. Если получаемые на выходе этапа 2 невзвешенные графы $G^t = (V_1, V_2^t, E^t)$, $1 \le t \le h-1$, рассматривать в качестве реализации случайного графа $G_p(m, R)$, то каждый из них почти всегда, т.е. с вероятностью $P_t \ge 1 - \delta_m$, $\delta_m \to 0$, при $m \to 0$ содержит совершенное паросочетание при условии, что значение

$$p = (R+1)^{-1} \ge \frac{\ln m}{2m}. \tag{20}$$

В терминологии [19] свойство «граф содержит совершенное паросочетание» является «монотонным по ребрам». Для всякого монотонного по ребрам свойства в [19] установлена взаимосвязь между достаточными условиями наличия этого свойства «почти всегда» в реализациях случайного графа и «для почти всех графов» из множества вида $J(m, R, A)$. В силу этой взаимосвязи с учетом (20) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. В случае выполнения неравенства

$$R \le \frac{2m}{\ln m + \varphi} \tag{21}$$

почти все графы $G \in J(m, R, A)$ содержат такие совершенные паросочетания, у которых каждое ребро взвешено максимальным интервалом $a^R \in A$.

С учетом неравенства (19) количество получаемых на выходе этапа 2 графов G^t ограничено сверху константой c_0. Тогда из утверждений 1 и 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. В случае выполнения условия (20) почти всегда, т.е. с вероятностью $\prod_{t=1}^{h-1} P_t \ge 1 - \varepsilon_m$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$, каждая из $(h-1)$ реализаций случайного графа $G_p(m, R)$ содержит совершенное паросочетание.

Утверждение 4. В случае выполнения неравенства (21) почти все 2-дольные графы $G^t \in J(m, R, A)$, получаемые на выходе этапа 2, содержат также совершенные паросочетания, у которых ребра взвешены максимальными интервалами $a^R \in A$.

С учетом равенства $m = \dfrac{n}{h}$ и соотношения (19) условие (21) принимает вид

$$R \le \frac{2n}{h(\ln n - \ln h + \varphi)}. \tag{22}$$

Тогда из утверждения 4 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. Если ребра графов $G \in S(n)$ взвешены интервалами из множества A, то при выполнении неравенств (19), (22) алгоритм α_3 почти всегда находит для этих графов покрытие h-вершинными звездами, представляющее собой одноэлементное ПМА.

В условиях теоремы 5 алгоритм α_3 статистически эффективный [16], так как его вычислительная сложность ограничена сверху полиномом третьей степени от n [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алефред Г., Херцбергер Ю. Введение в интегральные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 360 с.

2. Демченко А.И. Проектирование транспортных сетей в условиях неопределенности // Тр. семинара по интервальной математике. — Саратов, 1990. — С. 10–16.
3. Kozina G.L., Perepelitsa V.A. Interval spanning trees problem: solvability and computational complexity // Interval Comput. — 1994. — P. 42–50.
4. Perepelitsa V.A., Kozina G.L. Interval Discrete Models and Multiobjectivity. Complexity Estimates // Ibid. — 1993. — P. 51–59.
5. Yaman H., Karasan O.E., Pinar M.C. The robust spanning tree problem with interval data // Oper. Res. Letters. — 2001. — **29**. — P. 31–40.
6. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимизации планирования. — М.: Наука, 1998. — 160 с.
7. Jansson C., Rump S.M. Rigorous solution of linear programming problems with uncertain data // ZOR-methods and Models of Oper. Res. — 1991. — **35.** — P. 87–111.
8. Maarten H.Van Emden. On the significance of digits in interval notation // Reliable Comput. 2004. — N 1. — P. 45–58.
9. Ватолин А.А. О задаче линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1984. — **24** (11). — С. 1629–1637.
10. Kearfott R.B. , Kreinovich V. Applications of interval computations: an introsuction / R.B. Kearfott et al (eds.). — Dordrecht: Kluwer, 1996. — P. 1–22.
11. Christofides N. Graph Theory: An Algorithmic Approach, — New York; London; San Francisco: Academ. Press, 1975. — 275 p.
12. Miettinen K., Makela M.M. On cone characterizations of weak, proper, and pareto optimality in multiobjective optimization // Math. Meth. Oper. Res. — 2001. — **53**. — P. 233–245.
13. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability. a guide to the theory of NP — Completeness, Bell Lab., San Francisco, 1979.
14. Papadimitriou C.H. , Steiglitz K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Courier Dover Publ., 1998. — 512 p.
15. Emelichev V.A., Perepelitsa V.A. On cardinality of the set of alternatives in discrete many — Criterion Problems // Discrete Mathemat. and Appl., — 1992. — **2**, N 5. — P. 461– 471.
16. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1988. — 472 с.
17. Emelichev V.A. , Kravtsov M.K. On the unsolvability of vector discrete optimization problems on systems of subsets in the class of algorithms involving linear convolution of criteria // Docl. Math. Rus. Academ. Sci. — 1994. — **49**, N 1. — P. 6–9.
18. Сергиенко И.В., Перепелица В.А. О проблеме отыскания множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика. — 1987. — № 5. — С. 85–93.
19. Колчин В.Ф. Случайные графы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 208 с.

Поступила 11.08.2008