УДК 519.9

А.Н. ВОРОНИН

ДЕКОМПОЗИЦИЯ И КОМПОЗИЦИЯ СВОЙСТВ АЛЬТЕРНАТИВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Ключевые слова: *многокритериальный выбор альтернатив, иерархические системы, декомпозиция и композиция критериев, вложенные скалярные свертки, принятие решений*.

СОДЕРЖАНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Задача принятия решений в достаточно общем виде [1] может быть представлена схемой $\{\{x\}, Y\} \to x^*$, где $\{x\}$ — множество объектов (альтернатив); Y — функция выбора (правило, устанавливающее предпочтительность на множестве альтернатив); x^* — выбранные альтернативы (одна или более). Если в процессе решения предпринимается целостный подход, то механизм выбора определяется непосредственным использованием функции Y. При этом осуществляется оценка объекта в целом и альтернатива выбирается по непосредственному сравнению объектов как гештальтов (целостных образов объектов без детализации свойств). Для лица, принимающего решение (ЛПР), в этом случае функция выбора Y при сравнении альтернатив означает «принимается» или «не принимается». Сложнее ответить на вопрос, который может возникнуть, почему принимается (или не принимается).

В теории принятия решений более распространен так называемый векторный подход, при котором объект оценивается не в целом, а по результатам сравнения отдельных его свойств. В отличие от откровенно субъективного целостного подхода здесь намечается возможность формализации процесса принятия решений.

Механизм векторного подхода при выделении свойств альтернатив требует осуществить декомпозицию (разложение) функции Y на совокупность (вектор) функций выбора y. Под декомпозицией функции выбора Y понимается [2] ее эквивалентное представление посредством определенной совокупности других функций выбора y, композицией которых является исходная функция выбора Y. Выделение свойств альтернатив является декомпозицией, приводящей к иерархической структуре свойств. Свойства первого иерархического уровня могут подразделяться на наборы следующих конкретных свойств и т.д. Глубина деления определяется стремлением дойти до тех свойств, которые удобно сравнивать между собой. Наиболее целесообразно сравнивать те свойства, которые оцениваются в числах.

Свойства, для которых существуют объективные численные характеристики, принято называть критериями. Более строго: критериями называются количественные показатели свойств объекта, числовые значения которых являются мерой качества объекта оценки по отношению к данному свойству. Получение набора критериев — конечный итог иерархической декомпозиции. Количество уровней зависит от требуемой глубины декомпозиции. Для каждого начального свойства глубина декомпозиции может быть различной.

После выполнения этапа декомпозиции и оценки отдельных свойств должна быть решена проблема обратного перехода к требуемому сравнению альтернатив в целом. Эта проблема предполагает решение задачи композиции критериев по уровням иерархии, что достаточно сложно, особенно при значительной глубине декомпозиции свойств. В простейшем и наиболее распространенном случае (двухуровневая иерархия) задача композиции решается традиционным получением однократной скалярной свертки критериев. Но уже при наличии трехуровневой иерархии требуются другие подходы.

Можно утверждать, что любая многокритериальная задача может быть представлена иерархической системой, на нижних уровнях которой осуществляется оценка объекта по отдельным свойствам с помощью векторов критериев, а на верхнем уровне посредством механизма композиции имеем оценку объекта в целом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Качество альтернативы определяется иерархической системой векторов

$$y^{(j-1)}=\{y_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{n^{(j-1)}},\quad j\in[2,m],$$

где $y^{(j-1)}$ — вектор критериев на $(j-1)$-м уровне иерархии, по компонентам которого оценивается качество свойств альтернативы на j-м уровне; m — количество уровней иерархии; $n^{(j-1)}$ — количество оцениваемых свойств $(j-1)$-го уровня иерархии. Численные значения n критериев $y^{(1)}=y$ первого уровня иерархии для данной альтернативы заданы. Ясно, что $n^{(1)}=n$ и $n^{(m)}=1$.

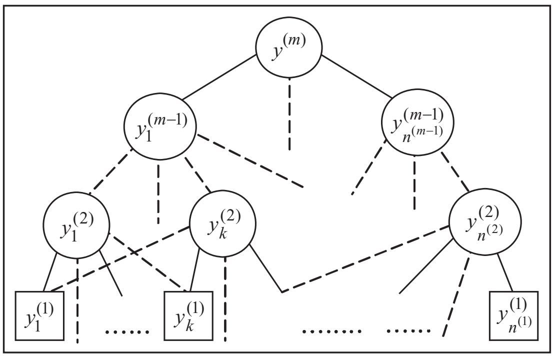

Рис. 1

Один и тот же критерий $(j-1)$-го уровня может оценивать несколько свойств j-го уровня, т.е. в иерархии возможны перекрестные связи. Структурная схема системы критериев качества альтернативы показана на рис. 1.

Важность (значимость) каждой компоненты критерия $(j-1)$-го уровня при оценке k-го свойства j-го уровня характеризуется коэффициентом приоритета, совокупность которых составляет систему векторов приоритета

$$p_{ik}^{(j-1)}=\{p_{ik}^{(j-1)}\}_{k=1}^{n^{(j)}},\quad j\in[2,m].$$

Требуется найти аналитическую оценку y^* и качественную оценку эффективности данной альтернативы и выбрать лучшую из имеющихся.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для аналитической оценки эффективности иерархических структур предлагается применить метод вложенных скалярных сверток [3]. Композиция осуществляется по «принципу матрешки»: скалярные свертки взвешенных компонент векторных критериев низшего уровня служат компонентами векторных критериев высшего уровня. Скалярная свертка критериев, полученная на самом верхнем уровне, автоматически становится выражением для оценки эффективности всей иерархической системы в целом.

Алгоритм решения задачи методом вложенных скалярных сверток представляется итерационной последовательностью операций взвешенной скалярной свертки векторных критериев каждого уровня иерархии снизу доверху с учетом векторов приоритета на основе выбранной схемы компромиссов

$$\{(\mathrm{y}^{(\mathrm{j}-1)},\mathrm{p}^{(\mathrm{j}-1)})\to \mathrm{y}^{(\mathrm{j})}\},\quad \mathrm{j}\in[2,\mathrm{m}],\tag{1}$$

а поиск оценки эффективности всей иерархической системы (альтернативы) в целом выражается задачей определения скалярной свертки критериев на верхнем уровне иерархии

$$y^*=y^{(m)}.$$

При использовании рекуррентной формулы (1) важным представляется рациональный выбор схемы компромиссов. Для метода вложенных скалярных сверток адекватной является нелинейная схема компромиссов, описанная в [4]. Установлено, что без потери общности предпосылкой для ее применения является неотрицательность всех частных критериев, которые подлежат минимизации и являются ограниченными, $0 \le y_i < A_i$, $A = \{A_i\}_{i=1}^n$, где A — вектор ограничений.

Оценка k-го свойства альтернативы на j-м уровне иерархии с применением нелинейной схемы компромиссов определяется выражением

$$y_k^{(j)}(p_k^{(j-1)}, y_{0k}^{(j-1)}) = \sum_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} p_{ik}^{(j-1)}[1 - y_{0ik}^{(j-1)}]^{-1}, \ k \in [1, n^{(j)}], \tag{2}$$

где критерии $(j-1)$-го уровня нормированы, например, по формуле $y_0 = y/A$. Таким образом, $y_{0ik}^{(j-1)}$ — компоненты нормированного вектора $y_0^{(j-1)}$, используемые при оценке k-го свойства альтернативы на j-м уровне иерархии; $n_k^{(j-1)}$ — их количество; $n^{(j)}$ — число оцениваемых свойств на j-м уровне.

Коэффициенты приоритета p — это формальные параметры, имеющие двоякий физический смысл. С одной стороны, это коэффициенты приоритета, выражающие предпочтения ЛПР по отдельным критериям. С другой — это коэффициенты содержательной регрессионной модели, построенной на основе концепции нелинейной схемы компромиссов. Определяются коэффициенты p на каждом уровне иерархии путем оптимизации на симплексе с использованием дуального подхода, описанного в [4], или методом экспертных оценок по шкале баллов.

В последнем случае ЛПР или эксперт оценивает относительное влияние каждого частного критерия низшего уровня иерархии на общую оценку k-го свойства альтернативы на следующем уровне в заданных условиях и соотносит свою оценку с соответствующей точкой на шкале, характеризуемой числом f. Допускается выбирать точки между числами или приписывать несколько критериев одной точке на шкале.

Областью определения коэффициентов приоритета $p \in \Gamma_p$ является симплекс

$$\Gamma_p = \left\{ p \mid p_i \ge 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}. \tag{3}$$

Такая нормировка выполняется, если коэффициенты приоритета определить по формуле

$$p_{ik}^{(j-1)} = f_{ik} \Big/ \sum_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} f_{ik}, \ k \in [1, n^{(j)}], \ j \in [2, m],$$

где $p_{ik}^{(j-1)}$ — i-я компонента вектора приоритета критерия на $(j-1)$-м уровне иерархии при расчете оценки эффективности k-го свойства j-го уровня; f_{ik} — оценка значимости i-го свойства $(j-1)$-го уровня для k-го свойства j-го уровня (определяется экспертами или ЛПР по шкале баллов).

В наиболее простом и достаточно распространенном случае формулируется и решается многокритериальная задача без приоритетов, когда ЛПР полагает, что все параметры значимости для всех свойств альтернативы одинаковы. В этом случае используется простейшая скалярная свертка по нелинейной схеме компромиссов в унифицированной форме [4].

Для того чтобы формула (2) отражала суть метода вложенных скалярных сверток в соответствии с рекуррентной формулой (1), необходимо полученное выражение нормировать, т.е. получить относительный критерий $y_{0k}^{(j)} \in [0; 1]$ такой, чтобы он был минимизируемым, а его предельная величина была единицей. Однако упомянутый выше способ нормализации критериев $y_0 = y/A$ пригоден только для нижнего (первого) уровня иерархии, где предельные значения критериев (ограничения) обычно физически обоснованы и известны. Для других уровней необходимо находить другие подходы. Так, в [3] рассмотрена возможность расчета условий нормировки, исходя из принципа «солидарной ответственности» критериев. В [5, 6] предлагается использовать подход калибровочных вычислений нормирующего множителя. Рассмотренные методы достаточно громоздки и не всегда физически прозрачны.

Конструкция нелинейной схемы компромиссов дает возможность нормировать свертку (2) не к максимальному (что в данном случае затруднительно), а к минимальному значению свертки критериев. Действительно, идеальными для минимизируемых критериев являются их нулевые значения. Положив в формуле (2)

$$y_{0ik}^{(j-1)} = 0 \quad \forall i \in [1, n_k^{(j-1)}],$$

с учетом нормировки (3) получим $y_{k\,\min}^{(j)} = 1$.

Соотношение

$$\hat{y}_{0k}^{(j)} = \frac{y_{k\,\min}^{(j)}}{y_k^{(j)}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} p_{ik}^{(j-1)} [1 - y_{0ik}^{(j-1)}]^{-1}}$$

к минимальному значению дает относительный, но максимизируемый критерий для j-го уровня. Действительно, при $y_{0ik}^{(j)} \to 1$ этот критерий обращается в ноль, а при $y_{0ik}^{(j-1)} \to 0$ он стремится к единице. Чтобы получить требуемый минимизируемый относительный критерий, необходимо положить

$$y_{0k}^{(j)} = 1 - \hat{y}_{0k}^{(j)},$$

окончательное выражение для рекуррентной формулы расчета аналитических оценок свойств альтернатив на всех уровнях иерархии приобретает вид

$$y_{0k}^{(j)} = 1 - \left\{ \sum_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} p_{ik}^{(j-1)} [1 - y_{0ik}^{(j-1)}]^{-1} \right\}^{-1}, \quad k \in [1, n^{(j)}], \; j \in [2, m]. \tag{4}$$

В задаче выбора решений количество вариантов (альтернатив) составляет $n_a \geq 1$. Каждый вариант характеризуется своей иерархической структурой. При $n_a = 1$ поставленная задача трансформируется в задачу оценки данной иерархической структуры. Если $n_a > 1$, то каждая структура оценивается как данная и выбирается тот вариант, иерархическая структура которого получила наилучшую оценку. Поэтому при дискретной многокритериальной оптимизации в качестве базовой здесь рассматривается задача оценки данной иерархической структуры. Однако это возможно только в случае относительно небольшого числа альтернатив n_a, когда метод простого перебора не вызывает значительных вычислительных трудностей. При больших объемах множеств альтернатив следует применять другие методы оптимизации, например изложенные в [4].

Качественная (лингвистическая) оценка альтернативы происходит сопоставлением аналитической оценки с обращенной нормированной фундаментальной шкалой. Общее понятие о порядковой фундаментальной шкале изложено в [7]. Интервальная нормированная обращенная шкала представлена в табл. 1. Здесь показана связь между качественными градациями свойств объектов и соответствующими количественными оценками y_0. Можно сказать, что в терминах теории нечетких множеств [8] фундаментальная шкала выступает как универсальная функция принадлежности для перехода от числа к соответствующей качественной градации и обратно. Осуществляется переход от лингвистической переменной (удовлетворительное качество, высокое качество и т.д.) к соответствующим количественным оценкам по шкале баллов, т.е. переход от нечетких качественных градаций к числам и обратно.

Оценка вариантов по единой нормированной фундаментальной шкале дает возможность решать многокритериальные задачи, кроме традиционных постановок, и в том случае, когда требуется выбрать альтернативу из множества неоднородных альтернатив, для которых нельзя сформулировать единого множества количественных критериев оценки, а также для оценки единственной (уникальной) альтернативы.

Таблица 1

Категория качества	Интервалы обращенной нормированной фундаментальной шкалы оценок y_0
Неприемлемое	1,0–0,7
Низкое	0,7–0,5
Удовлетворительное	0,5–0,4
Хорошее	0,4–0,2
Высшее	0,2–0,0

МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Требуется найти количественную $y_0^* = y_0^{(3)}$ и качественную оценки проекта самолета по двум основным свойствам: комфортность, характеризуемая неизвестной пока оценкой критерия $y_{01}^{(2)}$, и надежность, которой сопоставляется неизвестная пока оценка критерия $y_{02}^{(2)}$. В свою очередь, свойство комфортности в пассажирском салоне оценивается по трем критериям: расстояние между креслами y_{01}, уровень шума y_{02} и уровень вибрации пола y_{03}. Надежность оценивается вероятностью отказов оборудования y_{04} и прочностью конструкции y_{05}. В оценке надежности принимает также участие критерий уровня вибрации пола y_{03}, т.е. имеет место одна перекрестная связь. Указанные критерии нормированы и приведены к одному способу экстремизации, а именно все они подлежат минимизации. Критерии низшего уровня принимают участие в оценке свойств высшего уровня с коэффициентами приоритета $p_{ik}^{(j-1)}$, $j \in [2, m]$. Структурная схема трехуровневой иерархии критериев для оцениваемого проекта представлена на рис. 2. Заданы следующие числовые значения величин. Критерии нижнего (первого) уровня иерархии: $y_{01} = 0{,}3$; $y_{02} = 0{,}5$; $y_{03} = 0{,}7$; $y_{04} = 0{,}2$; $y_{05} = 0{,}1$. Коэффициенты приоритета: $p_{11}^{(1)} = 0{,}7$; $p_{21}^{(1)} = 0{,}2$; $p_{31}^{(1)} = 0{,}1$; $p_{32}^{(1)} = 0{,}1$; $p_{42}^{(1)} = 0{,}45$; $p_{52}^{(1)} = 0{,}45$; $p_{13}^{(2)} = 0{,}5$; $p_{23}^{(2)} = 0{,}5$.

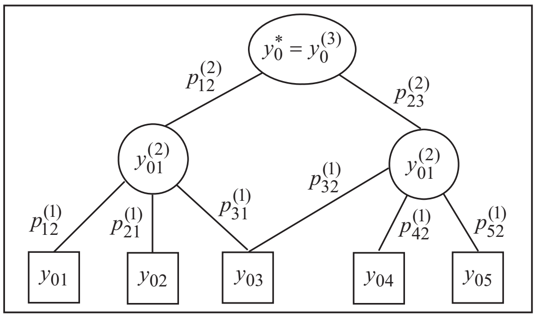

Рис. 2

На первом этапе композиции критериев, исходя из рекуррентной формулы (4), получим выражение для аналитической оценки свойства комфортности (второй уровень иерархии):

$$y_{01}^{(2)} = 1 - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n_1^{(1)}} p_{i1}^{(1)} (1 - y_{0i1}^{(1)})^{-1}},$$

где $n_1^{(1)} = 3$ и $y_{011}^{(1)} = y_{01}$; $y_{021}^{(1)} = y_{02}$; $y_{031}^{(1)} = y_{03}$. Подставляя числовые значения, получаем

$$y_{01}^{(2)} = 1 - \frac{1}{0{,}7\frac{1}{1-0{,}3} + 0{,}2\frac{1}{1-0{,}5} + 0{,}1\frac{1}{1-0{,}7}} = 0{,}42.$$

Из сопоставления этой аналитической оценки с табл. 1 следует, что свойство комфортности для данного проекта самолета качественно оценивается как удовлетворительное.

Выражение для аналитической оценки свойства надежности (второй уровень иерархии) имеет вид

$$y_{02}^{(2)} = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_2^{(1)}} p_{i2}^{(1)} (1 - y_{0i2}^{(1)})^{-1}},$$

где с учетом перекрестной связи $n_2^{(1)} = 3$ и $y_{012}^{(1)} = y_{03}$; $y_{022}^{(1)} = y_{04}$; $y_{032}^{(1)} = y_{05}$. Коэффициенты приоритета: $p_{12}^{(1)} = p_{32}^{(1)}$; $p_{22}^{(1)} = p_{42}^{(1)}$; $p_{32}^{(1)} = p_{52}^{(1)}$. Подставим приведенные выше числовые значения и получим

$$y_{02}^{(2)} = 1 - \frac{1}{0{,}1\frac{1}{1-0{,}7} + 0{,}45\frac{1}{1-0{,}2} + 0{,}45\frac{1}{1-0{,}1}} = 0{,}16.$$

В соответствии с табл. 1 качество свойства надежности для данного проекта оценивается как высокое.

На заключительном (втором) этапе композиции критериев формула (4) приобретает вид

$$y_0^* = y_0^{(3)} = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_3^{(2)}} p_{i3}^{(2)} (1 - y_{0i3}^{(2)})^{-1}},$$

где $n_3^{(2)} = 2$ и $y_{013}^{(2)} = y_{01}^{(2)}$; $y_{023}^{(2)} = y_{02}^{(2)}$. Подставляя числовые значения, получаем

$$y_0^* = 1 - \frac{1}{0{,}5\frac{1}{1-0{,}42} + 0{,}5\frac{1}{1-0{,}16}} = 0{,}32.$$

По этой аналитической оценке качество данного проекта самолета в целом оценивается как хорошее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губанов В.А., Захаров В.В., Коваленко А.Н. Введение в системный анализ. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. — 232 с.
2. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б. Теория выбора и принятия решений. — М.: Наука, 1982. — 328 с.
3. Воронин А.Н. Вложенные скалярные свертки векторного критерия // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 5. — С. 10–21.
4. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И. Векторная оптимизация динамических систем. — К.: Техніка, 1999. — 284 с.
5. Воронин А.Н. Многокритериальная оценка и оптимизация иерархических систем // Proceedings of the XIII International Conf. «Knowledge-Dialogue-Solution», vol. 1. — Varna, 2007. — P. 174–183.
6. Воронин А.Н. Метод многокритериальной оценки и оптимизации иерархических систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 3. — С. 84–92.
7. Saaty T.L. Multicriteria decision making: The analytical hierarchy process. — N.Y.: McGraw-Hill, 1990. — 380 p.
8. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.

Поступила 22.02.2008