УДК 681.142.35

И.С. МИКАДЗЕ, Н.В. АРАБУЛИ, З.И. МИКАДЗЕ

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОМБИНИРОВАННЫМ КОНТРОЛЕМ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

Ключевые слова: *надежность, отказ, коэффициент готовности.*

ВВЕДЕНИЕ

В статье предлагается метод определения оптимального правила проверки работоспособности, обеспечивающего максимальное значение коэффициента готовности системы, подверженной двум типам отказов: внезапному (катастрофическому) отказу, обнаруженному аппаратурным контролем в момент его возникновения, и параметрическому (износовому), обнаруживаемому только периодическим контролем. Здесь будем рассматривать те системы длительного использования, при эксплуатации которых возможно оперативное вмешательство обслуживающего персонала для приведения системы в исправное состояние и для которых основной характеристикой является коэффициент готовности.

Внезапный отказ, как правило, подчиняется пуассоновскому закону, а параметрический отказ — общему закону. Это объясняется тем, что технические системы (ТС), которые работают длительное время, непрерывно подвергаются влиянию физического старения или износа, что выражается в возрастании опасности отказа во времени. Одним из способов повышения эффективности использования системы является своевременное обнаружение и замена отказавших элементов, а также замена элементов, достигающих определенного уровня износа. Для этого требуется проводить периодические проверки, осмотры и т.д. для прогнозирования наступающего отказа. Эти виды отказа, как правило, не являются пуассоновскими. Они имеют общий закон распределения, и их использование в таком виде для аналитического моделирования связано с непреодолимыми математическими трудностями. Поэтому в настоящей статье с целью марковизации случайных процессов предлагается аппроксимация общего закона распределения параллельно-последовательными этапами (фазами), каждый из которых распределен по показательному закону с постоянной интенсивностью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С учетом вышеизложенного рассмотрим следуюшую модель. Пусть система подвержена двум видам отказов:

1) внезапному с интенсивностью γ, обнаруживаемому в момент его возникновения;

2) параметрическим, постепенным, износовым и т.д., обнаруживаемым только в процессе периодического контроля, для его описания используется функция распределения, преобразование Лапласа которой имеет вид

$$a(s) = \sum_{i=1}^{n} \left[p_i \prod_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} / (s + \alpha_{ij}) \right].$$

Здесь $a(s)$ — преобразование Лапласа плотности функции распределения (ФР) времени возникновения отказа; n — количество параллельных ветвей, каждая из которых состоит из l_i $(i = \overline{1, n})$ последовательных фаз; a_{ij}— интенсивность пребывания наступающего отказа в фазе (ij) (i — номер ветви, j — номер этапа (фазы)); отметим, что одновременно может быть занята только одна фаза; p_i — вероятность попадания наступающего отказа в первую фазу i-й ветви.

В процессе проверки и восстановления отказы не проявляются. После внезапного отказа, а также в момент окончания периодического контроля, если имеет место необнаруженный отказ, система сразу передается на восстановление, после чего рассматриваемая система становится совершенно обновленной.

Для описания функционирования системы введем случайный процесс $\nu(t)$ [1–3, 8, 9]: $\nu(t)=1$, если в момент t система работоспособна; $\nu(t)=2$ — система неработоспособна ввиду наличия необнаруженного отказа; $\nu(t)=3$ — система работоспособна и проходит периодический контроль; $\nu(t)=4$ — система неработоспособна и проходит периодический контроль, в конце которого будет установлен тип отказа (износовый отказ); $\nu(t)=5$ — система неработоспособна и восстанавливается; $\eta(t)$ — состояние системы по наступающему параметрическому отказу. Состояние $\eta(t)=(il_i^*)$, $l_i^*>l_i$, $i=\overline{1,n}$, является состоянием отказа системы в результате параметрического отказа (в момент t система продолжает функционировать в неисправном состоянии, так как до момента t (перед t) после последнего периодического контроля или восстановления возник параметрический отказ, который будет обнаружен только при периодических проверках или в процессе восстановления).

Введем обозначения: $F(u)$ — функции распределения (ФР) времени периодичности контроля (времени между соседними периодическими проверками, являющегося случайной величиной), $c(u)=F'(u)/[1-F(u)]$, $f(u)=F'(u)$; $\Gamma(u)$ — ФР времени периодического контроля $b(u)=\Gamma'(u)/[1-\Gamma(u)]$; $G_k(u)$, $k=1,2,3$, — ФР времени восстановления отказавшей системы ($\mu_k(u)=$ $=G_k'(u)/[1-G_k(u)]$, $g_k(u)=G_k'(u)$) в соответствии с видами отказов: $k=1$ — только при внезапном отказе; $k=2$ — только при параметрическом отказе; $k=3$ — при одновременном устранении обоих видов отказа.

В большинстве практически важных случаев продолжительность периодического контроля гораздо меньше, чем интервал времени между периодическими проверками (времени периодичности). Поэтому с целью упрощения будем считать, что в процессе периодического контроля система по износовым отказам не меняет состояния. Это допущение не носит принципиального характера. В случае необходимости можно отказаться от этого допущения.

С использованием методов случайных процессов с дополнительной переменной [6–10] опишем процесс функционирования системы следующими вероятностями:

1) $\tau_{ij}(t,u)du=\mathrm{P}\{\nu(t)=1,\ \eta(t)=(ij),\ u<\varepsilon(t)<u+du\}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,l_i}$, — вероятность того, что в момент t система находится в работоспособном состоянии; по наступающему износовому (параметрическому) отказу система находится в состоянии (ij), а время $\varepsilon(t)$, прошедшее с момента окончания последнего (перед t) периодического контроля или восстановления до момента t, заключено в интервале $(u,u+du)$ (здесь подразумевается, что $t=0$ является моментом окончания восстановления, т.е. в начальный момент $(t=0)$ система работоспособна);

2) $\tau_{il_i^*}(t,u)du=\mathrm{P}\{\nu(t)=2,\ \eta(t)=(i,l_i^*),\ u<\varepsilon(t)<u+du\}$ — вероятность того, что в момент t система находится в неработоспособном состоянии il_i^*, $i=\overline{1,n}$, и с последнего (перед t) момента окончания периодического контроля или восстановления до момента t прошло время $\varepsilon(t)$, заключенное в интервале $(u,u+du)$;

3) $q_{ij}(t,u)du=\mathrm{P}\{\nu(t)=3,\ \eta(t)=(i,j),\ u<\varepsilon(t)<u+du\}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,l_i}$, — вероятность того, что в момент t система работоспособна, проходит периодическую проверку в течение времени $\varepsilon(t)$ $(u<\varepsilon(t)<u+du)$, которая началась в интервале времени $(t-u,t-u+du)$;

4) $q_{il_i^*}(t,u)\,du = \mathrm{P}\{\nu(t)=4,\ \eta(t)=(i,l_i^*),\ u<\varepsilon(t)<u+du\},\ i=\overline{1,n},$ — вероятность того, что в момент t система неисправна (находится в состоянии (il_i^*)), проходит периодическую проверку в течение времени $\varepsilon(t)$ $(u<\varepsilon(t)<u+du)$, которая началась в интервале времени $(t-u, t-u+du)$;

5) $r_k(t,u)\,du = \mathrm{P}\{\nu(t)=5,\ u<\varepsilon(t)<u+du\},\ k=\overline{1,3}$, — вероятность того, что в момент t система находится в процессе восстановления уже в течение времени $\varepsilon(t)$ $(u<\varepsilon(t)<u+du)$, которое началось в интервале времени $(t-u,\ t-u+du)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Используя вероятностные рассуждения о возможных изменениях состояний системы в малом интервале времени $(t,\ t+\Delta t)$, относительно введенных вероятностей составим следующие системы дифференциально-разностных уравнений в частных производных [4–8, 10]:

$$\partial\tau_{ij}(t,u)/\partial t + \partial\tau_{ij}(t,u)/\partial u = \\ = -[a_{ij}+\gamma+c(u)]\tau_{ij}(t,u) + (1-\delta_{j1})\,a_{ij-1}\tau_{ij-1}(t,u); \tag{1}$$

$$\partial\tau_{il_i^*}(t,u)/\partial t + \partial\tau_{il_i^*}(t,u)/\partial u = -[\gamma+c(u)]\,\tau_{il_i^*}(t,u) + a_{il_i}\tau_{il_i}(t,u); \tag{2}$$

$$\partial q_{ij}(t,u)/\partial t + \partial q_{ij}(t,u)/\partial u = -b(u)\,q_{ij}(t,u); \tag{3}$$

$$\partial q_{il_i^*}(t,u)/\partial t + \partial q_{il_i^*}(t,u)/\partial u = -b(u)\,q_{il_i^*}(t,u); \tag{4}$$

$$\partial r_k(t,u)/\partial t + \partial r_k(t,u)/\partial u = -\mu_k(u)\,r_k(t,u), \tag{5}$$

$$i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,l_i};\ k=\overline{1,3};\ l_i^*=l_i+1 \text{ или } l_i^*>l_i.$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij}=\begin{cases}1\ \text{при}\ i=j,\\ 0\ \text{при}\ i\neq j.\end{cases}$

Относительно граничных условий выведем следующие соотношения:

$$\tau_{ij}(t,0) = \sum_{\nu=1}^{3}\delta_{j1}p_i\int_0^t r_\nu(t,u)\,\mu_\nu(u)du + \int_0^t q_{ij}(t,u)\,b(u)du + \delta_{i\tilde{i}}\,\delta_{j\tilde{j}}\,\delta(t); \tag{6}$$

$$\tau_{il_i^*}(t,0)=0; \tag{7}$$

$$q_{ij}(t,0)=\int_0^t \tau_{ij}(t,u)\,c(u)du; \tag{8}$$

$$q_{il_i^*}(t,0)=\int_0^t \tau_{il_i^*}(t,u)\,c(u)du; \tag{9}$$

$$r_1(t,0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\int_0^t \gamma\,\tau_{ij}(t,u)du = \gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}T_{ij}(t); \tag{10}$$

$$r_2(t,0)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^t q_{il_i^*}(t,u)\,b(u)\,du; \tag{11}$$

$$r_3(t,0)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \gamma\tau_{il_i^*}(t,u)\,du = \sum_{i=1}^{n}\gamma T_{il_i^*}(t), \tag{12}$$

$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,l_i}.$$

Здесь $(\tilde{i}\,\tilde{j})$ является начальным состоянием системы в момент $t=0$; $\delta(t)$ — импульсная функция Дирака: $\delta(t)=\begin{cases}\infty, \text{ если } t=0;\\ 0, \text{ если } t\neq 0;\end{cases}$ $\int\limits_0^\infty \delta(t)dt=1$; $\tau_{ij}(0,0)=$ $=\lim\limits_{t\to 0}\delta_{i\tilde{i}}\,\delta_{j\tilde{j}}\,\delta(t)$; $T_{ij}(t)$ и $T_{il_i^*}(t)$ — вероятности состояний (ij) и (il_i^*). (В качестве примера в приложении 1 приводится вывод соотношений (1) и (6).)

В результате решения систем уравнений (1)–(5) имеем

$$\tau_{ij}(t,u)=\sum_{k=1}^{j}\tau_{ik}(t-u,0)\,\overline{F}(u)\,e^{-\gamma u}\,l_{ik}^{(ij)}(u); \tag{13}$$

$$\tau_{il_l^*}(t,u)=\sum_{k=1}^{l_i}\tau_{ik}(t-u,0)\,\overline{F}(u)\,e^{-\gamma u}\,\tilde{l}_{ik}^{(il_i)}(u); \tag{14}$$

$$q_{ij}(t,u)=q_{ij}(t-u,0)\,\overline{\Gamma}(u); \tag{15}$$

$$q_{il_l^*}(t,u)=q_{il_l^*}(t-u,0)\,\overline{\Gamma}(u); \tag{16}$$

$$r_\nu(t,u)=r_\nu(t-u,0)\,\overline{G}_\nu(u),\ \nu=\overline{1,3}, \tag{17}$$

$$i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,l_i};\ l_i^*>l_i.$$

Здесь $\overline{F}(u)=1-F(u)$; $\overline{G}(u)=1-G(u)$; $\overline{\Gamma}(u)=1-\Gamma(u)\,(\nu=\overline{1,3})$; $l_{ik}^{(ij)}(u)$ — вероятность того, что за время u система по износовому отказу изменила фазу с k-й (в момент $t-u$) на j-ю (в момент t) по i-й ветви; $\tilde{l}_{ik}^{(il_i)}(u)$ — вероятность того, что за время u система по износовому отказу покинет l_i-ю фазу и окажется в состоянии (il_i^*) при условии, что в момент $t-u$ по износовому отказу система находилась в состоянии (ik).

Соответствующие преобразования Лапласа имеют вид

$$l_{ik}^{(ij)}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\,l_{ik}^{(ij)}(t)\,dt=\left[\frac{1}{s+\alpha_{ij}}\prod_{\eta=k}^{j-1}\frac{\alpha_{i\eta}}{s+\alpha_{i\eta}}\right]; \tag{18}$$

$$\tilde{l}_{ik}^{(il_i)}(s)=\frac{1}{s}\prod_{\eta=k}^{l_i}\frac{\alpha_{i\eta}}{s+\alpha_{i\eta}}. \tag{19}$$

(В качестве примера в приложении 2 приводится решение уравнения (1).)

Подставляя (13)–(17) в граничные условия (6)–(12) и переходя к преобразованию Лапласа, получаем

$$\tau_{ij}(s,0)=\sum_{\nu=1}^{3}\delta_{j1}\,p_i r_\nu(s,0)\,g_\nu(s)+\gamma(s)\sum_{k=1}^{j}f_{ik}^{(ij)}(s+\gamma)\,\tau_{ik}(s,0)+\delta_{i\tilde{i}}\,\delta_{j\tilde{j}}; \tag{20}$$

$$\tau_{il_i^*}(s,0)=0;\ q_{ij}(s,0)=\sum_{k=1}^{j}f_{ik}^{(ij)}(s+\gamma)\,\tau_{ik}(s,0);$$

$$q_{il_i^*}(s,0)=\sum_{k=1}^{l_i}\alpha_{il_i}\tilde{f}_{ik}^{(il_i)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0); \tag{21}$$

$$r_1(s,0)=\gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\sum_{k=1}^{j}F_{ik}^{(ij)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0);$$

$$r_2(s,0)=\gamma(s)\sum_{i=1}^{n}\alpha_{il_i}\sum_{k=1}^{l_i}\widetilde{f}_{ik}^{(il_i)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0); \tag{22}$$

$$r_3(s,0)=\gamma\sum_{i=1}^{n}\alpha_{il_i}\sum_{k=1}^{l_i}\widetilde{F}_{ik}^{(il_i)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0);\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,l_i};\ l_i^*=l_i+1. \tag{23}$$

Здесь $\tau_{ij}(s,0)$; $r_\nu(s,0)$ $(\nu=\overline{1,3})$; $g_\nu(s)$ $(\nu=\overline{1,3})$; $\gamma(s)$; $q_{ij}(s,0)$; $q_{il_i^*}(s,0)$; $f(s)$ являются преобразованиями Лапласа функций $\tau_{ij}(t,0)$, $r_\nu(t,0)$ $(\nu=\overline{1,3})$, $g_\nu(t)$ $(\nu=\overline{1,3})$, $\gamma(t)$, $q_{ij}(t,0)$, $q_{il_i^*}(t,0)$, $f(t)$ соответственно;

$$f_{ik}^{(ij)}(s+\gamma)=\alpha_{ik-1}(\tau)\left[\frac{f(\nu_{ij})}{d_{kj-1}}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{f(\nu_{ij})}{(\alpha_{ij}-\alpha_{ip})b_{kj-1}(\tau,p)}\right];$$

$$\widetilde{f}_{ik}^{(il_i)}(s+\gamma)=\alpha_{kl_i-1}(\tau)\left[-\frac{f(s+\alpha_{il_i})}{\alpha_{il_i}d_{kl_i-1}(\tau)}+\frac{f(s)}{\alpha_{ij}(\tau)}-\sum_{p=k}^{l_i-1}\frac{f(s+\alpha_{ip})}{\alpha_{ip}(\alpha_{il_i}-\alpha_{ip})b_{kl_i-1}(\tau,p)}\right];$$

$$F_{ik}^{(ij)}(s+\gamma)=\alpha_{ik-1}(\tau)\left[\frac{1-f(\nu_{ij})}{\nu_{ij}d_{kj-1}(\tau)}+\sum_{p=k}^{j-1}\frac{1-f(\nu_{ip})}{\nu_{ip}(\alpha_{ij}-\alpha_{ip})b_{kj-1}(\tau,p)}\right];$$

$$\widetilde{F}_{ik}^{(il_i)}(s+\gamma)=$$

$$=\alpha_{kl_i-1}(\tau)\left[\frac{1-f(s+\gamma)}{(s+\gamma)\alpha_{il_i}\alpha_{kl_i-1}(\tau)}+\frac{1-f(\nu_{il_i})}{\nu_{il_i}\alpha_{il_i}d_{kl_i-1}(\tau)}-\sum_{p=k}^{l_i-1}\frac{1-f(\nu_{ip})}{\alpha_{ip}(\alpha_{il_i}-\alpha_{ip})b_{kl_i-1}(\tau,p)}\right];$$

$$\nu_{ij}=s+\gamma+\alpha_{ij};\ \alpha_{kj}(\tau)=\prod_{\tau=k}^{j}\alpha_{i\tau};\ d_{kj}(\tau)=\prod_{\substack{\tau=k\\ \tau\neq j}}^{j}(\alpha_{i\tau}-\alpha_{ij});$$

$$b_{kj}(\tau,p)=\prod_{\substack{\tau=k\\ \tau\neq p}}^{j}(\alpha_{i\tau}-\alpha_{ip}).$$

В результате решения системы уравнений (20)–(23) определяем все ранее введенные плотности вероятности в терминах преобразования Лапласа (вначале находим $\tau_{ij}(s,0)\,(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,l_i})$). Далее можно выразить в терминах преобразования Лапласа следующие вероятности:

$$\tau_{ij}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t\tau_{ij}(t,u)du=\sum_{k=1}^{j}F_{ik}^{(ij)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0);$$

$$\tau_{il_i^*}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t\tau_{il_i^*}(t,u)du=\alpha_{il_i}\sum_{k=1}^{l_i}\widetilde{F}_{ik}^{(il_i)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0);$$

$$q_{ij}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t q_{ij}(t,u)du=\frac{1-\gamma(s)}{s}\sum_{k=1}^{j}f_{ik}^{(ij)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0);$$

$$q_{il_i^*}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t q_{il_i^*}(t,u)du=\frac{1-\gamma(s)}{s}\alpha_{il_i}\sum_{k=1}^{l_i}\widetilde{f}_{ik}^{(il_i^*)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0);$$

$$r_1(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dt\int_0^{t} r_1(t,u)du=\frac{1-g_1(s)}{s}\gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\sum_{k=1}^{j}F_{ik}^{(ij)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0);$$

$$r_2(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dt\int_0^{t} r_2(t,u)du=\frac{1-g_2(s)}{s}\gamma(s)\sum_{i=1}^{n}\alpha_{il_i}\sum_{k=1}^{l_i}\tilde{f}_{ik}^{(il_i)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0);$$

$$r_3(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dt\int_0^{t} r_3(t,u)du=\frac{1-g_3(s)}{s}\gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l_i}\alpha_{il_i}\tilde{F}_{ik}^{(il_i)}(s+\gamma)\tau_{ik}(s,0).$$

Условие нормировки в терминах преобразования Лапласа имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\tau_{ij}(s)+\sum_{i=1}^{n}\tau_{il_i^*}(s)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}q_{ij}(s)+\sum_{i=1}^{n}q_{il_i^*}(s)+\sum_{i=1}^{3}r_i(s)=1/s.$$

Переход к стационарному значению осуществляется обычным способом. Для примера возьмем уравнение (20) в стационарном виде

$$\tau_{ij}(0)=\sum_{\nu=1}^{3}\delta_{i1}p_i r_\nu(0)+\sum_{k=1}^{i}f_{ik}^{(ij)}(\gamma)\tau_{ik}(0).$$

Здесь $\tau_{nm}(0)=\lim\limits_{s\to 0} s\tau_{nm}(s,0)$; $r_\nu(0)=\lim\limits_{s\to 0} s\tau_\nu(s,0)$; коэффициент готовности имеет вид $\mathrm{K}_{\Gamma}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{l_i}\lim\limits_{s\to 0} s\tau_{ij}(s)$.

Приведем пример определения коэффициента готовности, когда $n=1$; $l_1=1$, $\gamma=0$, $\tau_{11}(0)=1$. Тогда

$$r_1(s,0)=r_3(s,0)=0;$$

$$\tilde{f}_{11}^{(11)}(s)=\frac{f(s)-f(s+\alpha_{11})}{\alpha_{11}};\ f_{11}^{(11)}(s)=f(s+\alpha_{11});\ r_2(s,0)=\gamma(s)\alpha_{11}\tilde{f}_{11}^{(11)}(s)\tau_{11}(s,0);$$

$$\tau_{11}(s,0)=\gamma(s)\alpha_{11}\tilde{f}_{11}^{(11)}(s)g_2(s)\tau_{11}(s,0)+\gamma(s)f_{11}^{(11)}(s)\tau_{11}(s,0)+1.$$

После подстановки получим

$$\tau_{11}(s,0)=1/\{1-\gamma(s)[(f(s)-f(s+\alpha_{11}))g_2(s)+f(s+\alpha_{11})]\}.$$

Стационарные значения:

$$\tau_{11}(0)=\lim_{s\to 0} s/\{1-\gamma(s)[f(s)-f(s+\alpha_{11})]g_2(s)+f(s+\alpha_{11})\}=$$
$$=1/[\tau_k+\tau_{\text{п}}+(1-f(\alpha_{11}))\tau_b];$$

$$K_{\Gamma}=\tau_{11}=\lim_{s\to 0} s\tau_{11}(s)=[(1-f(\alpha_{\text{п}}))\alpha_{\text{п}}]\tau_{11}(0).$$

Здесь $\tau_{\text{п}}=-f'(0)$; $\tau_k=-\gamma'(0)$; $\tau_b=-g'(0)$ — математические ожидания времени периодичности контроля, длительности контроля и восстановления соответственно.

Пусть $f(s)=\exp(-s\tau_{\text{п}})$; $\gamma(s)=\exp(-s\tau_k)$, тогда

$$K_{\Gamma}=(1-e^{-\alpha_{11}\tau_{\text{п}}})/\alpha_{11}[\tau_k+\tau_{\text{п}}+(1-e^{-\alpha_{11}\tau_{\text{п}}})\tau_b].$$

Максимальное значение K_{Γ} в зависимости от времени периодичности контроля определяется решением уравнения $\alpha_{11}\tau_{\text{п}}+(1+\alpha_{11}\tau_k)=\exp(\alpha_{11}\tau_{\text{п}})$ относительно $\tau_{\text{п}}$, которое имеет единственный корень. Это уравнение получено из условия $\partial K_{\Gamma}/\partial\tau_{\text{п}}=0$.

Таким образом, предлагаемая аппроксимация функции распределения износового отказа смесью показательных распределений обеспечивает значительное улучшение точности полученных результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Уравнение (1) вытекает из следующих рассуждений.

Рассмотрим событие, когда в момент $t+\Delta t$ система работоспособна и находится в рабочем состоянии; по наступающему износовому отказу система находится в состоянии (ij), а время v, прошедшее с момента проведения последнего перед t контроля, заключено в малом интервале $(u, u+du)$, т.е. $u<v<u+du$. Это событие представляется суммой следующих несовместимых событий (в дальнейшем Δt заменим на h):

1) система находится в момент t в рабочем состоянии и по износовому отказу в состоянии (ij); в течение времени h не возникли как обнаруживаемые, так и не обнаруживаемые непрерывным контролем отказы; наступающий износовый отказ фазы не изменил; периодический контроль не наступит в случае, если время периодичности контроля составит u временных единиц; вероятность этого события равна $\tau_{ij}(t,u)\,du[1-(a_{ij}+\gamma+c(u))h]+0(h)$;

2) система в момент t работоспособна и находится в рабочем состоянии; по износовому отказу находится в состоянии $(i, j-1)$; за время h износовый отказ перешел в соседнюю фазу; периодический контроль не наступил и неисправности не возникли; вероятность этого события равна $(1-\delta_{j1})\,\tau_{ij-1}(t,u)\,du\cdot a_{ij-1}h+0(h)$.

Следует отметить, что износовый отказ не имеет нулевой фазы, это учитывается множителем $(1-\delta_{j1})$. Все другие возможные события имеют вероятность $0(h)$, поэтому ими можно пренебречь.

Таким образом,

$$\tau_{ij}(t+h,u+h)du=\tau_{ij}(t,u)du[1-(a_{ij}+\gamma+c(u))h]+(1-\delta_{j1})\,\tau_{ij-1}(t,u)du\cdot a_{ij-1}h+0(h).$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\frac{\tau_{ij}(t+h,u+h)-\tau_{ij}(t+h,u)+\tau_{ij}(t+h,u)-\tau_{ij}(t,u)}{h}=$$

$$=-[a_{ij}+\gamma+c(u)]\tau_{ij}(t,u)+(1-\delta_{j1})\tau_{ij-1}(t,u)\,a_{ij-1}+\frac{0(h)}{h}.$$

Поскольку при $h\to 0$ предел правой части этого равенства существует ($\lim 0(h)/h\to 0$ при $h\to 0$), то существует и предел его левой части. В результате перехода к пределу при $h\to 0$ получим (1). Аналогично выводятся уравнения (2)–(5).

Для обоснования (6) проведем следующие рассуждения.

Пусть $T_{ij}(t,h)$ — функции распределения вероятности того, что в момент t система находится в рабочем состоянии в течение времени, не превышающем h, т.е. $T_{ij}(t,h)=\int_0^h \tau_{ij}(t,u)\,du$ или $\partial T_{ij}(t,h)/\partial h=\tau_{ij}(t,h)$.

Рассмотрим момент времени $t+h$ и разложим $T_{ij}(t+h,h)$ в ряд Тейлора (ограничимся первыми двумя членами):

$$T_{ij}(t+h,h)=T_{ij}(t,0)+h\partial T_{ij}(t,0)/\partial h+0(h)=T_{ij}(t,0)+h\tau_{ij}(t,0)+0(h).$$

Так как $\tau_{ij}(t,u)$ — непрерывная функция от u при $t\neq 0$, то очевидно, что $T_{ij}(t,0)=0$ и

$$T_{ij}(t+h,h)=h\tau_{ij}(t,0)+0(h). \qquad (24)$$

Теперь из вероятностных рассуждений получим выражение для $T_{ij}(t+h,h)$.

Рассмотрим событие, когда в момент t система находится в рабочем состоянии (ij) и начинается отсчет времени после восстановления или после периодического контроля. Это событие можно представить в виде суммы следующих несовместимых событий.

1. В момент t система находится в состоянии восстановления в течение времени ε $(u<\varepsilon<u+du)$, за время h восстановление завершилось и система по износовому отказу перешла в состоянии $(i1)$ (заметим, что отсчет фаз после завершения восстановления принято с первой фазы). Вероятность этого события равна

$$\sum_{\nu=1}^{3}\delta_{i1}P_i\int_0^{t+h} r_\nu(t,u)du\cdot\mu(u)h+0(h).$$

2. Система в момент t находится в состоянии периодического контроля в течение времени $\varepsilon(u<\varepsilon<u+du)$, по износовому отказу находится в состоянии (ij) и в интервале времени $(u,u+h)$ периодический контроль завершается. Вероятность этого события равна

$$\int_0^{t+h} q_{ij}(t,u)du\cdot b(u)h+0(h).$$

Суммируя эти вероятности, получаем

$$T_{ij}(t+h,h)=\sum_{\nu=1}^{3}\delta_{i1}P_i\int_0^{t+h} r_\nu(t,u)du\cdot\mu(u)h+\int_0^{t+h} q_{ij}(t,u)du\cdot b(u)h+0(h).$$

Если разделить обе части последнего равенства на h и устремить h к нулю с учетом (24) и начальных условий, то получим (6).

Принято считать, что в момент $t=0$ система работоспособна и находится в состоянии $\tilde{i}\,\tilde{j}$, т.е. $T_{\tilde{i}\,\tilde{j}}(0,0)=1$; поэтому $\tau_{\tilde{i}\,\tilde{j}}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\delta_{i\,\tilde{i}}\delta_{j\,\tilde{j}}\delta(t)$, так как $\int_0^\infty\delta(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}\delta(t)dt=1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Выполним решение уравнения (1)

$$\partial\tau_{ij}(t,u)/\partial t+\partial\tau_{ij}(t,u)/\partial u=-[a_{ij}+\gamma+c(u)]\tau_{ij}(t,u)+(1-\delta_{j1})\,a_{ij-1}\tau_{ij-1}(t,u). \quad (25)$$

Вначале положим $j=1$, так как состояния $(i0)$ не существует:

$$\partial\tau_{i1}(t,u)/\partial t+\partial\tau_{i1}(t,u)/\partial u=-[a_{i1}+\gamma+c(u)]\tau_{i1}(t,u). \quad (26)$$

Пусть $\tau_{i1}(t,u)=e^{\widetilde{W}_{i1}(t,u)}$. Подставляя это значение в (26), получаем

$$\frac{\partial\widetilde{W}_{i1}(t,u)}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{W}_{i1}(t,u)}{\partial u}=-[a_{i1}+\gamma+c(u)]. \quad (27)$$

Решение (27) имеет вид $\widetilde{W}_{i1}(t,u)=\widetilde{\widetilde{W}}_{i1}(t-u)-\int_0^u(a_{i1}+\gamma+c(\tau))d\tau$, соотвественно

$$\tau_{i1}(t,u)=W_{i1}(t-u)\cdot e^{-(\alpha_{i1}+\gamma)u}\cdot e^{\int_0^u c(\tau)d\tau}. \quad (28)$$

Здесь $W_{i1}(t-u)=e^{\widetilde{\widetilde{W}}_{i1}(t-u)}$.

С учетом того, что $c(\tau)=F'(\tau)/[1-F(\tau)]$, из (28) следует

$$\tau_{i1}(t,u)=W_{i1}(t-u)\cdot e^{-(\alpha_{i1}+\gamma)u}[1-F(u)],$$

при $u=0$ имеем $\tau_{i1}(t,0)=W_{i1}(t)$ или $W_{i1}(t-u)=\tau_{i1}(t-u,0)$.

На основании этого запишем

$$\tau_{i1}(t,u)=\tau_{i1}(t-u,0)\cdot e^{-(\alpha_{i1}+\gamma)u}\cdot[1-F(u)]. \tag{29}$$

Теперь положим $j=2$, тогда

$$\partial\tau_{i2}(t,u)/\partial t+\partial\tau_{i2}(t,u)/\partial u=-[a_{i2}+\gamma+c(u)]\tau_{i2}(t,u)+a_{i1}\tau_{i1}(t,u).$$

С учетом (29) имеем

$$\partial\tau_{i2}(t,u)/\partial t+\partial\tau_{i2}(t,u)/\partial u=$$
$$=-[a_{i2}+\gamma+c(u)]\tau_{i2}(t,u)+a_{i1}\tau_{i1}(t-u,0)\cdot e^{-(\alpha_{i1}+\gamma)u}\cdot[1-F(u)]. \tag{30}$$

Положим в (30) $\tau_{i2}(t,u)=x_{i2}(t,u)y_{i2}(t,u)=x_{i2}y_{i2}$, тогда

$$x_{i2}\frac{\partial y_{i2}}{\partial t}+y_{i2}\frac{\partial x_{i2}}{\partial t}+x_{i2}\frac{\partial y_{i2}}{\partial u}+y_{i2}\frac{\partial x_{i2}}{\partial u}=$$
$$=-[a_{i2}+\gamma+c(u)]x_{i2}y_{i2}+a_{i1}\tau_{i1}(t-u,0)\cdot e^{-(\alpha_{i1}+\gamma)u}\cdot[1-F(u)]. \tag{31}$$

Уравнение (31) можно разложить на систему из двух уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_{i2}}{\partial t}+\dfrac{\partial x_{i2}}{\partial u}=-[a_{i2}+\gamma+c(u)]x_{i2}, & (32)\\[2ex] \dfrac{\partial y_{i2}}{\partial t}+\dfrac{\partial y_{i2}}{\partial u}=[a_{i1}\tau_{i1}(t-u,0)\cdot e^{-(\alpha_{i1}+\gamma)u}\cdot[1-F(u)]]/x_{i2}. & (33)\end{cases}$$

В результате решения (32) имеем

$$x_{i2}=\widetilde{W}_{i2}(t-u)[1-F(u)]\cdot e^{-(\alpha_{i2}+\gamma)u}.$$

Подставляя это решение в (33), получаем

$$\frac{\partial y_{i2}}{\partial t}+\frac{\partial y_{i2}}{\partial u}=a_{i1}\tilde{\tilde{\tilde{W}}}_{i2}(t-u)\cdot e^{(\alpha_{i2}-\alpha_{i1})u}. \tag{34}$$

Здесь $\tilde{\tilde{\tilde{W}}}_{i2}(t-u)=\tau_{i1}(t-u,0)/\widetilde{W}_{i2}(t-u)$.

В результате подстановки убеждаемся, что $y_{i2}=\dfrac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i2}-\alpha_{i1}}e^{(\alpha_{i2}-\alpha_{i1})u}\times$ $\times\tilde{\tilde{\tilde{W}}}_{i2}(t-u)+W_{i2}^{(0)}(t-u)$ является решением уравнения (34).

Таким образом,

$$\tau_{i2}(t,u)= \tag{35}$$
$$=\widetilde{W}_{i2}(t-u)[1-F(u)]\cdot e^{-(\alpha_{i2}+\gamma)u}\cdot\left[\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i2}-\alpha_{i1}}e^{(\alpha_{i2}-\alpha_{i1})u}\frac{W_{i1}(t-u)}{\widetilde{W}_{i2}(t-u)}+W_{i2}^{(0)}(t-u)\right].$$

После несложного преобразования уравнение (35) сводится к виду

$$\tau_{i2}(t,u)= \tag{36}$$
$$=\tau_{i1}(t-u,0)[1-F(u)]\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i2}-\alpha_{i1}}e^{\gamma u}[e^{-\alpha_{i1}u}-e^{-\alpha_{i2}u}]+\tau_{i2}(t-u,\,0)\overline{F}(u)\cdot e^{-(\alpha_{i2}+\gamma)u}.$$

Заметим, что $\dfrac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i2}-\alpha_{i1}}[e^{-\alpha_{i1}u}-e^{-\alpha_{i2}u}]=\int\limits_0^u\alpha_{i1}e^{-\alpha_{i1}v}dve^{-\alpha_{i2}(u-v)}$ — вероятность того, что за время u система из состояния $(i1)$ (в момент $t-u$) перешла в состояние $(i2)$ и к моменту t находится в этом состоянии.

Продолжив этот процесс для $j = 3, 4, \ldots, l_i$ $(i = \overline{1, n})$, определим $\tau_{ij}(t, u)$ $(j = \overline{1, l_i})$. Поясним вероятностный смысл выражений (29) и (36). Можно представить $\tau_{i1}(t, u)du$ как вероятность следующего сложного события: процесс, который начался в момент времени $t-u$, продолжается в момент t, за время u не возникло ни износового, ни внезапного (обнаруживаемого) отказа и износовый отказ не изменил фазу; аналогично $\tau_{i2}(t, u)du$ является суммой вероятностей следующих несовместных событий:

1) процесс, начатый в момент времени $t-u$, продолжается в момент t, за время u обнаруживаемого отказа не произошло, наступающий износовый отказ из состояния $(i1)$ перешел в состояние $(i2)$;

2) второе событие отличается от первого тем, что система контроля по наступающему износовому отказу в момент времени $t-u$ находилась в состоянии $(i2)$ и в интервале $(0, u)$ отказ фазу не изменил.

Таким образом, решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\tau_{ij}(t, u) = \sum_{k=1}^{j} \tau_{ik}(t-u, 0)[1-F(u)]e^{-\gamma u} l_{ik}^{(ij)}(u). \quad (37)$$

Здесь $l_{ik}^{(ij)}(u)$ — вероятность того, что за время u система по износовому отказу изменит фазу с k-й на j-ю. Заметим, что (37) можно записать на основе вероятностных рассуждений, не использовав при этом уравнение (1).

Аналогично решаются уравнения (2)–(5), поэтому их решение приводить не будем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. — М.: Сов. радио, 1969. — 448 с.
2. Байхвелт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание — М.: Радио и связь, 1988. — 391 с.
3. Надежность технических систем / Под. ред. И.А. Ушакова. Справочник. — М.: Радио и связь, 1985. — 607 с.
4. Черкесов Г.Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. — М.: Сов. радио, 1974. — 295 с.
5. Бродецкий Г.Л. Об одной задаче периодического запоминания результатов // Кибернетика. — 1978. — № 3. — С. 70–74.
6. Королюк В.С., Трубин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. — Киев: Наук. думка. — 1976. — 184 с.
7. Королюк В.С. Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний // Укр. мат. журн. — 1965. — № 3. — С. 123–128.
8. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965.
9. Коваленко И.Н., Стойкова Л.С. О производительности системы и времени решения задачи при случайных отказах и периодическом запоминании результатов // Кибернетика. — 1974. — № 5. — С. 73–75.
10. Микадзе И.С., Куциава Н.А., Зауташвили И.З. Надежность технических систем, подверженных внезапным и постепенным отказам // Междунар. научно-техн. конф. «Системные проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий». — М., 2000. — С. 96–104.

Поступила 13.10.2006