

Член-кореспондент НАН України В. А. Даниленко,  
С. І. Скуратівський

## Інваріантні розв'язки нелокальної моделі самогравітуючого геосередовища

*Розглянуто нелокальну модель самогравітуючого геосередовища. Особливу увагу було приділено аналізу режимів моделі в зонах, де швидкість звуку в середовищі є немонотонною функцією просторових координат. Якісний аналіз хвильових розв'язків моделі при значеннях параметрів, які відповідають астеносфері Землі, доводить наявність періодичних та хаотичних розв'язків. Існування локалізованих режимів свідчить про те, що особливості внутрішньої будови самогравітуючих систем можуть відповідати за утворення зон з автоколивальними властивостями, зумовлюючи динаміку системи в цілому.*

У даному повідомленні вивчається самогравітуюче середовище, яке в рівноважному стані описується відомою моделлю [1–3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u = 0, \quad \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u \right) + \nabla p = -g\rho, \quad 4\pi\rho G = \operatorname{div} g \quad (1)$$

з рівнянням стану в формі Тета

$$p + p_0 = 2p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n. \quad (2)$$

Тут  $u$  — швидкість;  $p$  — тиск;  $\rho$  — густина середовища;  $p_0$  і  $\rho_0$  — значення тиску й густини в стаціонарному стані;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ;  $n$  — показник політропи.

Після втрати стійкості середовище переходить у нерівноважний стан, який описується нелокальним динамічним рівнянням стану [4]:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma \varepsilon_r}{\rho^2 \tau_p \Gamma \beta} \left[ -\rho_{xx}(1+a) + \frac{\rho_x^2}{\rho}(1-an) \right] + \\ & + \frac{1}{\rho^2 \beta} \left[ -\frac{d^2 \rho}{dt^2}(1+a) + \frac{2}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 \left( 1 - \frac{a(n-1)}{2} \right) + \frac{1}{\tau_p \Gamma} \frac{d\rho}{dt}(1+a) \right] + 2p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n = \\ & = p + p_0 + \tau_{TV} \frac{dp}{dt} - \frac{\chi_{T0}}{\chi_{T\infty}} \tau_{TV}^2 \frac{d^2 p}{dt^2} - \Gamma \varepsilon_r \tau_{TV} \left( p_{xx} + \frac{\rho_x}{\rho} p_x \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\beta = \chi_{T0}/(\rho_0 \tau_p^2)$ ; доданки з  $a = T_0 \alpha_\infty n (\rho/\rho_0)^{n+1}$  пов'язані з врахуванням термічних ефектів.

В обох моделях стійкість розв'язків можна пов'язати із параметром  $n$ . Таким чином, постає задача про аналіз структури розв'язків моделі (1), (3) в околі нестійкого розв'язку моделі (1), (2) залежно від зміни параметра  $n$ .

Хоча проінтегрувати модель (1), (2) у загальному випадку досі не вдалося, однак відомо, що ця модель має часткові стаціонарні центрально-симетричні розв'язки такого вигляду [1–3]:

$$\rho = Qr^\alpha, \quad p = A Q^n r^{n\alpha}, \quad (4)$$

де  $\alpha = 2/(n - 2)$ ;  $Q^{n-2} = 2\pi G(n - 2)^2/(An(4 - 3n))$ .

Як показано в монографії [3], у лінійному наближенні стаціонарний розв'язок (4) при  $0 < n < 6/5$  є нестійким фокусом, при  $n = 6/5$  — центром, при  $6/5 < n < \sqrt{128} - 10$  — стійким фокусом, при  $\sqrt{128} - 10 < n < 4/3$  — стійким вузлом, при  $4/3 < n < 2$  — сідлом, при  $n > 2$  — стійким вузлом. Таким чином, надалі нас цікавитиме інтервал  $0 < n < 1,2$ , в якому розв'язок (4) моделі (1), (2) є нестійким, що передбачає використання моделі (1), (3).

Для визначеності розглянемо режими, які виникають у моделі (1), (3), при зміні параметра  $n$  уздовж радіуса Землі на глибинах до 300 км. У даному випадку слід наголосити, що в умовах проходження релаксаційних процесів показник політропи може відрізнятись від свого рівноважного значення [5].

Для оцінки зміни параметра  $n$  з глибиною використаємо співвідношення [6, 7]:

$$c_{S0}^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S0} = \frac{n(p + p_0)}{\rho} = \Phi = v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2$$

(тут  $\Phi$  — гравітаційний параметр). Тоді

$$n = \left( v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2 \right) \frac{\rho}{p + p_0}. \quad (5)$$

В умовах Землі розподіл швидкостей  $v_p$  й  $v_s$  з глибиною вимірюється достатньо точно. Як свідчать результати вимірювань, в окремих (часто сейсмоактивних) зонах Землі спостерігається аномальне зниження цих швидкостей. Існування таких зон на глибинах до 300 км пов'язують з особливостями структури оболонки Землі [6], а саме, з наявністю суміші частково розплавленої породи, твердих частинок та речовини на межі фазових переходів [7]. Цій зоні властиве зменшення коефіцієнта в'язкості, що пов'язують з полегшеною здатністю розміщених вище шарів ковзати в межах цієї області. Така зона проявляє істотно нелінійні й дисипативні властивості та в кінцевому рахунку має значний вплив на утворення дисипативних структур земної кори.

Поліноміальний вигляд функцій  $v_{s,p}$  можна оцінити методом найменших квадратів за даними розподілів швидкостей поздовжніх та поперечних хвиль:

$$V_s(z) = (5,0505 - 0,0097za + 4,5413 \cdot 10^{-5}[za]^2 - 7,0526 \cdot 10^{-8}[za]^3 + 3,9804 \cdot 10^{-11}[za]^4) \cdot 10^3,$$

$$V_p(z) = (8,6187 - 0,0185za + 1,4434 \cdot 10^{-4}[za]^2 - 3,9799 \cdot 10^{-7}[za]^3 + 3,9674 \cdot 10^{-10}[za]^4) \cdot 10^3;$$

при  $a = 10^{-3}$ ;  $z \in (0,6 \cdot 10^5)$  м.

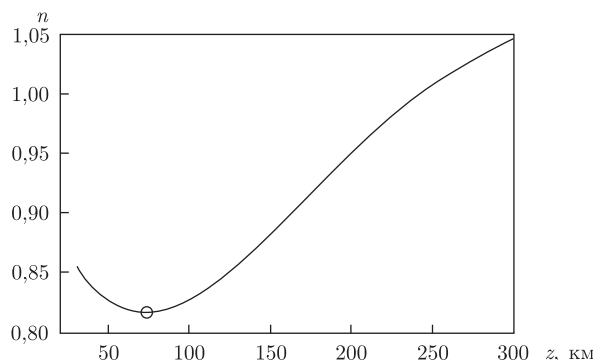


Рис. 1. Залежність параметра  $n$  від глибини

Використовуючи відомі моделі розподілу густини та тиску з глибиною [6–8], апроксимуємо дані про густину та тиск поліноміальними функціями:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= (3,3754 + 9,1972 \cdot 10^{-5}za - 2,318 \cdot 10^{-6}[za]^2 + 1,2315 \cdot 10^{-8}[za]^3 - \\ &\quad - 9,237 \cdot 10^{-12}[za]^4) \cdot 10^3, \\ p(z) &= (-0,0186 + 0,4931 \cdot 10^{-3}za - 0,148 \cdot 10^{-6}[za]^2 + 0,0699 \cdot 10^{-9}[za]^3 - \\ &\quad - 0,0071 \cdot 10^{-12}[za]^4) \cdot 10^{11}. \end{aligned}$$

Таким чином, за виразом (5) можна визначити залежність параметра  $n$  від глибини  $z$  (рис. 1). Аналізуючи графіки залежності  $n(z)$  можна перекоонатись, що їх форма залежить від параметра  $p_0$ . Виберемо значення  $p_0$  так, щоб координата точки мінімуму  $n(z)$  збігалася з координатою точки мінімуму функції  $\Phi(z)$ . Тоді  $p_0 = 1,393 \cdot 10^{11}$ . Густина при такому тиску має значення  $\rho_0 = 5,461 \cdot 10^3$  на глибині  $z_0 = 2,93398 \cdot 10^6$  м.

Знайдену залежність  $n(z)$  підставимо в модель (1), (3), де гравітаційну силу в системі (1) оцінимо за допомогою стаціонарного розв'язку (4):

$$g\rho = -A\sqrt{Q^{n-2}}\frac{2n}{n-2}\rho^{n/2+1} = -\frac{|n-2|}{n-2}\rho^{n/2+1}\sqrt{\frac{8\pi AGn}{4-3n}}.$$

Виконаємо знерозмірення моделі (1)–(3), використовуючи такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1\bar{\rho}, & t &= t_1\bar{t}, & p + p_0 &= p_1\bar{p}, & u &= u_1\bar{u}, & x &= x_1\bar{x}, & \frac{x_1}{t_1} &= u_1 = \sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}}, \\ \sigma &= \frac{\Gamma\varepsilon_r\tau_{TV}}{(t_1u_1)^2}, & \tau &= \frac{\tau_{TV}}{t_1}, & h &= \frac{\chi T_0}{\chi T_\infty}\tau^2, & \chi &= \frac{1}{\rho_1u_1^2\chi T_\infty}, & \kappa &= 2\frac{p_0}{p_1}. \end{aligned}$$

Отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho u_x &= 0, & \rho \dot{u} + p_x &= \gamma(n)\rho^{n/2+1}, \\ \sigma\chi\rho^{-2}[-\rho_{xx}(1+a) + \rho_x^2\rho^{-1}(1-na)] + h\chi\rho^{-2}[-\ddot{\rho}(1+a) + 2\dot{\rho}^2\rho^{-1}(1-0,5a(n-1)) + \\ &\quad + \tau h^{-1}\dot{\rho}(1+a)] + \kappa\rho^n &= p + \tau\dot{p} - h\ddot{p} - \sigma(p_{xx} + \rho_x p_x \rho^{-1}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{де } \gamma(n) = -\frac{|n-2|}{n-2}\sqrt{\frac{8\pi AGn}{4-3n}}\rho_1^{(n+1)/2}\frac{t_1}{\sqrt{p_1}}; \quad a = \delta n\rho^{n+1}; \quad A = 2p_0\rho_0^{-n}.$$

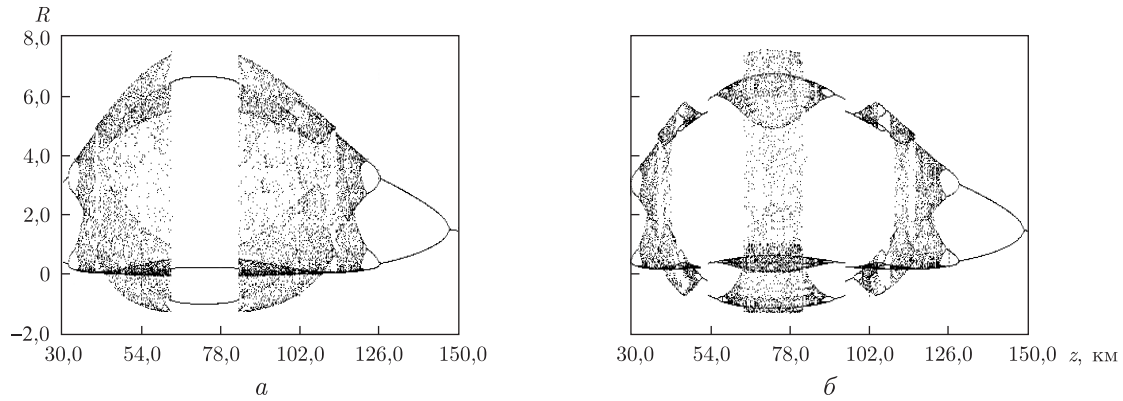


Рис. 2. Біфуркаційні діаграми розвитку коливань в околі стаціонарної точки (9) залежно від глибини  $z$ :  $a - \sigma = 0,5$ ;  $b - \sigma = 0,7$

Не обмежуючи загальності, прийнемо, що  $p_1 = p_0$ ,  $\rho_1 = \rho_0$ .

Система (6) допускає такі розв'язки [9]:

$$\rho = R(\omega), \quad p = P(\omega), \quad u = 2\xi t + U(\omega), \quad \omega = x - \xi t^2, \quad (7)$$

де функції  $R$ ,  $P$ ,  $U$  задовольняють співвідношення  $UR = C = \text{const}$  та динамічну систему:

$$\begin{aligned} R' &= W, & P' &= \gamma R^m - 2\xi R + C^2 R^{-2} W, \\ W' &= - \left( R^3 (\kappa R^n - P) - P' (R^2 \tau C + h C^2 W - R^2 \sigma W) + \gamma m R^{2+m} \sigma W + \chi L C \tau W + \right. \\ &+ \gamma h m R^m C^2 W + h \chi L \left( \frac{C W}{R} \right)^2 - 2 C^2 \sigma W^2 + \chi M \sigma W^2 - 2 C^2 h U^2 W^2 + \\ &\left. + 2 h \chi N U^2 W^2 - 2 R^3 \sigma W \xi - 2 h R C^2 W \xi \right) ((C^2 - \chi L) R (\sigma + h U^2))^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

(тут  $(\cdot)' = d/d\omega(\cdot)$ ;  $L = 1 + a$ ;  $M = 1 - an$ ;  $N = 1 - 0,5a(n - 1)$ ;  $a = \delta n R^{n+1}$ ,  $m = n/2 + 1$ ).

Дослідимо структуру фазового простору цієї динамічної системи в околі стаціонарної точки

$$R_0 = \left( \frac{2\xi}{\gamma} \right)^{2/n}, \quad P_0 = \kappa R_0^n, \quad W_0 = 0 \quad (9)$$

методами якісного аналізу. Необхідні умови народження періодичних коливань пов'язані з наявністю у матриці лінеаризованої системи одного від'ємного та пари суто уявних власних значень. Ці умови в просторі параметрів можна зобразити у вигляді поверхні нейтральної стійкості. Поблизу поверхні нейтральної стійкості при значеннях параметрів  $h = 1,25$ ,  $\xi = 0,28$ ,  $\tau = 0,25$ ,  $C = -5$ ,  $\delta = 1$ ,  $\chi = 30$ ,  $t_1 = 100$  шляхом числового інтегрування системи (8) був виявлений граничний цикл (рис. 2).

Залежність структури околу стаціонарної точки (9) вивчалась за допомогою побудови перетинів Пуанкаре (див. рис 2). За біфуркаційний параметр виберемо глибину  $z$ , тоді параметр  $n$  обчислюється за формулою (5).

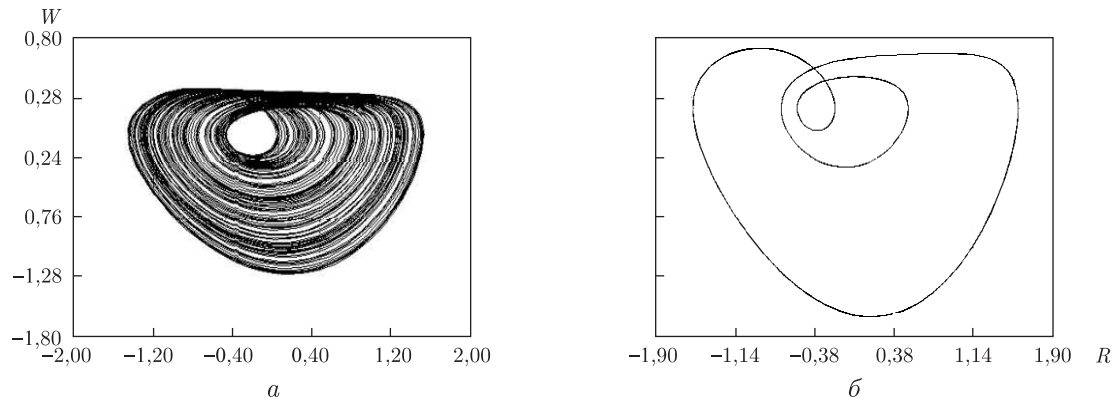


Рис. 3. Локалізовані траєкторії динамічної системи (8): хаотичний атрактор (а) та відокремлена періодична траєкторія (б) при  $\sigma = 0,9$ ,  $\xi = 0,197$

Аналіз діаграм Пуанкаре показав, що у випадку малих  $\sigma$  у фазовому просторі системи розвивається тільки граничний цикл, тоді як при більших  $\sigma$  діаграма істотно змінюється. На графіках видно, що в околі мінімуму параметра  $n$  залежно від параметра просторової нелокальності  $\sigma$  може спостерігатись як періодичний режим (див. рис. 2, а), так і хаотичні (рис. 2, б). Слід підкреслити, що області існування хаотичних атракторів розділені періодичними вікнами з фейгенбаумівськими масштабними характеристиками. На діаграмах присутня значна кількість точок, в яких період коливань змінюється стрибком. Такі переходи мають гістерезисний характер.

Дослідимо детальніше вплив на локалізовані розв'язки врахування температурних та релаксаційних ефектів, які особливо яскраво проявляються в цій зоні. Вони описуються в моделі (1), (3) параметрами  $\delta$  та  $h$ . Числові інтегрування динамічної системи (8) в околі стаціонарної точки (9) показали, що локалізовані структури існують при таких значеннях параметрів:

$$\xi = 0,197, \quad \tau = 0,25, \quad C = -4, \quad \chi = 30, \quad \sigma = 0,7, \quad t_1 = 80, \quad \kappa = 2 \quad (10)$$

та

$$\delta = 0, \quad h = 0.$$

У цьому випадку поблизу кривої нейтральної стійкості

$$\sigma(\xi) = \frac{C(C^2 - \chi)\tau(C^2 - \kappa n R_0^{1+n} + C n R_0 \tau \xi)}{n R_0^3 \xi (\chi + n R_0 \{C \tau \xi - \kappa R_0^n\})}$$

при  $z = 70000$  та  $n = 0,816245$ ,  $\gamma = 0,248305$  за допомогою числового інтегрування динамічної системи (8) переконуємось в існуванні граничного циклу праворуч від кривої нейтральної стійкості.

Біфуркації граничних циклів у цій області параметрів спричинюють утворення хаотичних атракторів (рис. 3, а). Також виявлено атрактори, на які можна потрапити лише з початкових умов (див. рис. 3, б). Зазначимо, що при  $\xi = 0,205641$  параметр  $\sigma = 0$ . Тоді розв'язки (7) описуються динамічною системою на площині, яка не має періодичних розв'язків.

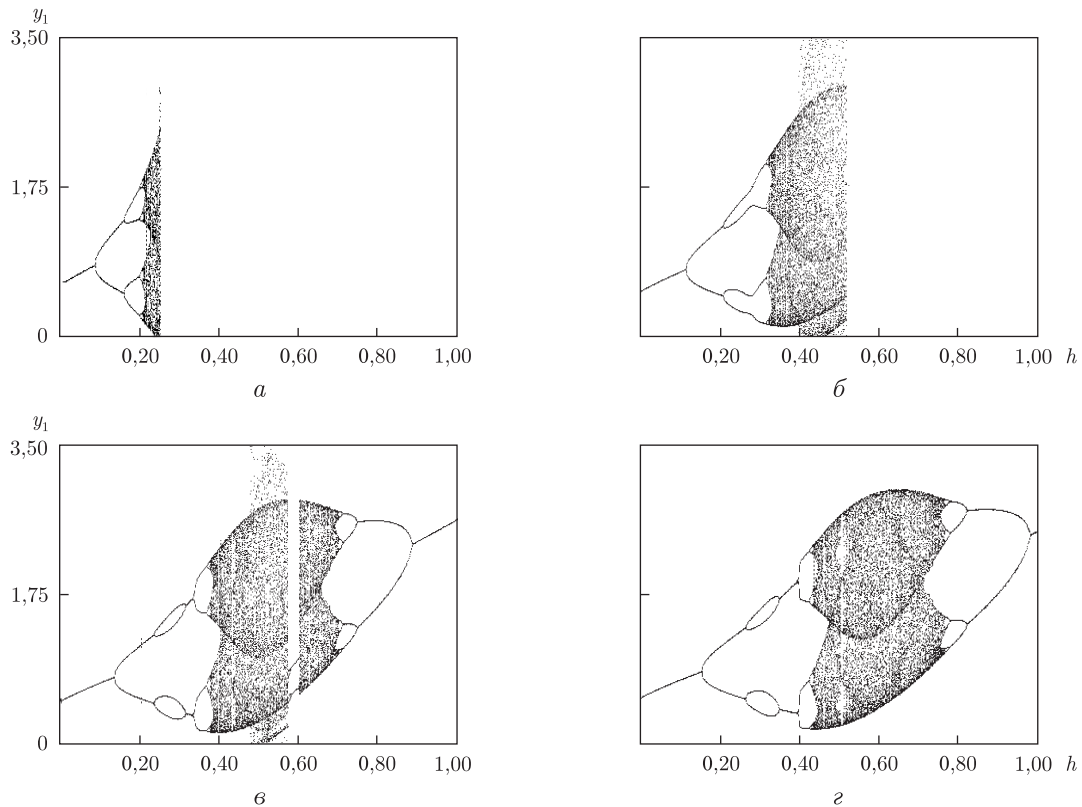


Рис. 4. Біфуркаційні діаграми Пуанкаре при значеннях параметрів (10),  $z = 7 \cdot 10^4$ : а —  $\delta = 0,03$ ; б —  $\delta = 0,08$ ; в —  $\delta = 0,09$ ; г —  $\delta = 0,10$

Розглянемо структуру локалізованих розв'язків динамічної системи (8) при фіксованих значеннях  $\sigma = 0,9$ ,  $\delta$  та змінному  $h$ . З аналізу біфуркаційних діаграм Пуанкаре рис. 4 випливає, що варіювання параметра  $h$  спричинює реалізацію сценарію подвоєння періоду граничного циклу з утворенням хаотичного атрактора. При достатньо малих  $\delta$  хаотичний аттрактор існує у вузькому інтервалі значень  $h$ . Із збільшенням  $\delta$  інтервал значень  $h$  з хаотичним аттрактором зростає. При цьому починає проявлятися інший хаотичний аттрактор (на діаграмі при  $\delta = 0,08$  присутні коливання значно більшої амплітуди, ніж основні). Врешті-решт, існує  $\delta$ , при якому хаотичний аттрактор не руйнується, а спостерігається зворотний каскад біфуркацій подвоєння.

За результатами дослідження динамічної системи (8), модель (1), (3) у зоні зниження швидкостей може мати як завгодно складні розв'язки, зокрема періодичні, мультиперіодичні, хаотичні хвильові (7).

Отже, згідно з наведеною вище обставиною, можна стверджувати, що ця зона поводить себе як джерело автоколивальних режимів рухів геофізичного середовища, обумовлюючи самоподібні, динамічні геофізичні явища у земній корі, в тому числі сейсмічні.

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — Москва: Наука, 1971. — 856 с.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — Москва: Наука, 1977. — 440 с.
3. Боголюбский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. — Москва: Наука, 1980. — 320 с.

4. Даниленко В. А., Даневич Т. Б., Скуратівський С. І. Нелінійні математичні моделі середовищ з часо-вою та просторовою нелокальністю. – Київ: Ін-т геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 2008. – 86 с.
5. Буевич Ю. А., Ясников Г. П. Релаксационные методы в исследованиях процессов переноса // Инж.-физ. журн. – 1983. – **44**, № 3. – С. 489–501.
6. Жарков В. Н. Внутреннее строение Земли и планет. – Москва: Наука, 1978. – 192 с.
7. Anderson Don L. Theory of the Earth. – Blackwell Scientific Publ., 1989. – 366 p.
8. Dziewonski A. M., Anderson D. L. Preliminary reference Earth model // Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 1981. – **25**. – P. 297–356.
9. Danilenko V. A., Skurativskyy S. I. Invariant chaotic and quasi-periodic solutions of nonlinear nonlocal models of relaxing media // Rep. Math. Phys. – 2007. – **59**, No 1. – P. 45–51.

Відділення геодинаміки вибуху Інституту геофізики  
ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ

Надійшло до редакції 13.05.2011

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. A. Danylenko, S. I. Skurativskyy**

### **Invariant solutions to a nonlocal model of self-gravitating geomedium**

*A nonlocal model for self-gravitating geomedium is studied. Special attention is paid to the analysis of model's regimes in zones in which the sound velocity in a medium is a nonmonotonic function of spatial variables. Qualitative analysis of the wave solutions to the model proves the availability of periodic and chaotic solutions at the parameters corresponding to the asthenosphere of the Earth. Existence of the localized regimes testifies that the peculiarities of an internal structure of self-gravitating systems can be responsible for the creation of zones with auto-oscillating properties stipulating the dynamics of a system in general.*