ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2011

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 530.3+550.344

Є. М. Бицань

Поширення плоских теплових і термопружних сейсмічних хвиль у в'язці реологічних тіл Фойгта

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Розглянуто задачу про поширення плоских теплових і термопружних сейсмічних хвиль у реологічному тілі, яке складається з довільного числа послідовно з'єднаних реологічних тіл (РТ) Фойгта (в узагальненому РТ Фойгта). Отримано аналітичні вирази для швидкостей і коефіцієнтів згасання теплових і термопружних сейсмічних хвиль. Доведено, що для цього РТ виконується принцип причинності.

Сейсмічні хвилі є важливим джерелом інформації про будову Землі, а тому дослідження їхніх властивостей — одна з основних задач геофізики. Між параметрами сейсмічних хвиль і властивостями фізичних середовищ, в яких вони поширюються, існують певні залежності, за допомогою яких можна одержати дані про їхній склад і структуру. Зауважимо, що реальні фізичні середовища є непружними, що враховується за допомогою реологічних моделей включенням в математичну модель поряд із пружними елементами в'язкі й пластичні [1, 2].

У цьому повідомленні розглядатиметься задача про поширення плоских теплових і термопружних хвиль в однорідному ізотропному середовищі, непружність якого апроксимується реологічним тілом, що схематично зображається послідовним об'єднанням n $(n > 2)$ реологічних тіл (РТ) Фойгта.

Реологічна формула РТ записується таким чином:

$$V_n^* = V_1 - V_2 - \cdots - V_n,$$

де $V = N|H$ — тіло Фойгта; H й N — пружний й в'язкий елементи, вертикальна риска означає паралельне, а горизонтальна — послідовне з'єднання.

Реологічне рівняння (РР) узагальненого тіла Фойгта виводиться рекурентно з умови

$$V_k^* = V_{k-1}^* - V_k, \qquad k = 2, \ldots, n, \tag{1}$$

враховуючи, що в досліджуваному тілі деформація дорівнює сумі деформацій у його складових, а напруга в ньому і в його складових однакова:

$$\sigma_k^* = \sigma_{k-1}^* = \sigma_k = \sigma, \qquad \varepsilon_k^* = \varepsilon_{k-1}^* + \varepsilon_k = \varepsilon, \tag{2}$$

де σ — напруга; ε — деформація; нижній індекс указує на належність до певного РТ.

Зв'язок між напругою й деформацією в ординарному РТ Фойгта описується так:

$$\sigma_i = E_i[(1 + \tau_i D)\varepsilon_i - \beta_i\theta_i], \tag{3}$$

а $\tau_i = \eta_i/E_i$ — час релаксації напруги при постійній деформації в i-му тілі Фойгта, η_i й E_i — його в'язкий і пружний модулі; $\beta_i = \alpha_{Ti}(1+\nu_i)/(1-\nu_i)$, α_{Ti} — коефіцієнт лінійного температурного розширення; ν_i — коефіцієнт Пуассона; $\theta_i = T_i - T_{0i}$, T_{0i} — температура недеформованого, а T_i — деформованого i-го тіла Фойгта в точці з поточною координатою x $(\theta_i/T_{0i} \ll 1)$; $D = d/dt$ — оператор диференціювання по часовій координаті t.

РР досліджуваного тіла отримаємо шляхом виключення із системи (1) за допомогою рівнянь (2) парціальних напруг й деформацій та припущення, що $\theta_n \cong \theta_{n-1} = \theta$:

$$P_{n-1}(D)\sigma = \widetilde{E}_n[Q_n(D)\varepsilon - \beta_n^* R_{n-1}\theta], \tag{4}$$

де P_{n-1}, Q_n і R_{n-1} — лінійні диференціальні вирази (ЛДВ) від D, адитивна константа в яких дорівнює одиниці, а інші виражаються через термомеханічні параметри досліджуваного РТ, нижній індекс вказує на порядок цих поліномів; $\widetilde{E}_n = \widetilde{E}_{n-1}E_n/(\widetilde{E}_{n-1} + E_n)$ — релаксуючий пружний модуль узагальненого РТ Фойгта; $\beta_n^* = \beta_{n-1}^* + \beta_n$ — константа зв'язності, малá порівняно з одиницею.

Треба сказати, що можуть бути вироджені випадки об'єднання РТ Фойгта у випадку, коли один з елементів останнього РТ Фойгта буде дорівнювати нулю:

$$V_n^{*H} = V_n^* - E, \qquad V_n^{*N} = V_{n-1}^* - \eta.$$

РР цих РТ запишемо таким чином:

$$P_n^H\sigma = \widetilde{E}_n^H(Q_n\varepsilon - \beta_n^H R_n^H\theta), \qquad P_{n-1}^N\sigma = \eta D(Q_{n-1}\varepsilon - \beta_{n-1}^* R_{n-2}\theta), \tag{5}$$

звідки $P_n^H = (Q_n\widetilde{E}_n + P_{n-1}E)/(E + \widetilde{E}_n)$, $\widetilde{E}_n^H = E\widetilde{E}_n/(E + \widetilde{E}_n)$, $\beta_n^H = \beta_n^* + \beta_0$, $R_n^H = (\beta_n^* R_{n-1} + \beta_0 Q_n)/\beta_n^H$, $P_{n-1}^N = Q_{n-1} + \tau_{0,n-1}P_{n-2}$, $\tau_{0,n-1} = \eta/\widetilde{E}_{n-1}$, а P_{n-1}, Q_n й R_{n-1} — коефіцієнти відповідно при напрузі, деформації і температурі в РР РТ Фойгта V_n^*.

Система рівнянь зв'язаної динамічної задачі термопружності складається з рівняння руху в переміщеннях та рівняння теплопровідності.

Рівняння руху для плоскої поздовжньої одновимірної хвилі отримаємо за допомогою другого закону Ньютона, який встановлює зв'язок між напругою і переміщенням:

$$\rho\ddot{u} = \sigma', \tag{6}$$

де u — поздовжнє зміщення середовища в напрямі поширення сейсмічної хвилі; ρ — питома густина; штрихом позначено диференціювання по лінійній змінній x.

Продиференціюємо співвідношення (4) по змінній x та підставимо σ з рівняння (6). Враховуючи, що $\varepsilon = u'$, отримаємо в підсумку рівняння руху в переміщеннях для досліджуваного тіла:

$$\rho D^2 P_{n-1}u = E_n(Q_n u'' - \beta_n^* R_{n-1}\theta). \tag{7}$$

Рівняння теплопровідності, згідно з публікаціями [3, 4], можна записати так:

$$\theta'' - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - m\dot{u}' = 0, \tag{8}$$

звідки κ — коефіцієнт температуропровідності; $m = \beta_0 E_0 T_0/\lambda_q$, λ_q — коефіцієнт теплопровідності, E_0 — пружний модуль.

Розв'язок системи рівнянь термопружності (7) й (8) шукаємо в такому вигляді [3, 4]:

$$u = u_0 e^{i(kx-\omega t)}, \qquad \theta = \theta_0 e^{i(kx-\omega t)}, \tag{9}$$

де u_0 й θ_0 — довільні сталі інтегрування; ω — колова частота; $k = \omega/c_0 + i\alpha$ — хвильове число, c_0 — фазова швидкість, а α — коефіцієнт згасання досліджуваних сейсмічних хвиль; $i = \sqrt{-1}$. Знак при часовій координаті t вибираємо так, щоб виконувався принцип причинності [5, 6].

Підставимо u й θ в формі (9) у співвідношення (7), (8) та отримаємо однорідну лінійну систему рівнянь відносно сталих інтегрування u_0 й θ_0:

$$\begin{aligned} &\left(-k^2 + \frac{i\omega}{\kappa}\right)\theta_0 - m\omega k u_0 = 0, \\ &i\widetilde{E}_n \beta_n^* R_{n-1} k\theta_0 + [-\rho\omega^2 P_{n-1} + \widetilde{E}_n k^2 Q_n]u_0 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Згідно з умовою нетривіальності розв'язку системи рівнянь (7), (8), маємо характеристичне біквадратне рівняння для хвильових чисел

$$E_n Q_n k^4 - \left[\rho\omega^2 P_{n-1} + i\frac{\omega E_n}{\kappa} Q_{n1} + im\omega\beta_n^*\right]k^2 - \frac{i\rho\omega^3 P_{n-1}}{\kappa Q_n} = 0,$$

яке можна записати у формі

$$k^4 - \left[\frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{\omega}{\kappa}(1+\delta_0)i\right]k^2 - \frac{i\omega^3}{\kappa c_0^2} = 0, \tag{11}$$

де $c_0^2 = E/\rho$ — комплексна швидкість; $E = \widetilde{E}_n Q_n/P_{n-1} = \widetilde{E}_0(1 - i\beta)$ — комплексний, а $\widetilde{E}_0 = \mathrm{Re}(E)$ — динамічний модуль; $\beta = \mathrm{arctg}(\mathrm{Im}(E)/\mathrm{Re}(E))$ — фазова характеристика комплексного модуля, яка для більшості гірських порід є малою відносно одиниці і називається кутом втрат або внутрішнім тертям [7–9]; $\delta_0 = m\kappa\beta^*{}_n R_{n-1}/Q_n$ — константа зв'язності, яка є малою порівняно з одиницею [3, 4].

Зауважимо, що для вироджених випадків процедура отримання характеристичних рівнянь відрізняється тим, що рівняння руху в переміщеннях оцінимо за допомогою рівнянь (5).

Корені біквадратного рівняння (10) знаходимо за формулою

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0) \pm \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{i\omega}{\kappa}(1+\delta_0)\right)\sqrt{1+\delta}\right], \tag{12}$$

де $\delta = 4i\delta_0\xi/[\xi - i(1-\delta_0)]^2 \ll 1$, $\xi = \omega\kappa/c_0^2 \ll 1$.

Рівняння (12) дає дві пари хвильових чисел. Перша пара відноситься до термопружної хвилі, а друга — до теплової. Додатна величина береться для хвилі, що рухається в позитивному напрямі осі x, а від'ємна — для хвилі, що рухається у зворотному напрямі.

Модуль комплексної константи δ є малим порівняно з одиницею, і це дозволяє лінеаризувати радикал у формулі (12) та отримати в підсумку лінеаризовані формули для хвильових чисел, за допомогою яких можна записати такі вирази для фазових швидкостей і коефіцієнтів згасання термопружних й теплових сейсмічних хвиль [4]:

$$V_1 = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_1)} = \frac{\widetilde{c}_0}{1-\delta_0/2}, \qquad \alpha_1 = \mathrm{Im}(k_1) = \frac{\omega\beta}{2\widetilde{c}_0},$$

$$V_2 = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k_2)} = \sqrt{\frac{2\kappa(1+\delta_0)}{\omega}}, \qquad \alpha_2 = \mathrm{Im}(k_2) = \sqrt{\frac{\omega(1+\delta_0)}{2\kappa}}.$$

Повернемося до питання про знак при часовій компоненті в формулі (9). Необхідною і достатньою умовою дотримання принципу причинності [5, 6] є аналітичність хвильових чисел, яка зводиться до вимоги, щоб хвильове число $k(\omega)$ не мало особливостей в нижній півплощині ($\mathrm{Im}\,\omega < 0$). Переконаємося, що ця умова буде виконуватися у випадку, коли показник степеня у виразі (9) для часової складової буде від'ємним.

Наявність особливостей в хвильовому числі $k(\omega)$ визначається структурою коренів комплексного модуля

$$\widetilde{E}_n = \frac{\widetilde{E}_n Q_n(D)}{P_{n-1}(D)}. \tag{13}$$

Із запису видно, що точками розгалуження хвильового числа $k(\omega)$ є корені полінома Q_n.

Характеристичні поліноми P й Q розкладаються на множники таким чином:

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{i=0}^{n} b_i D^i = b_n \prod_{i=1}^{n} (D-\mu_i), \\ P_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i = a_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (D-\lambda_i) \end{aligned} \tag{14}$$

(тут $a_0 = b_0 = 1$, $\lambda_i = -\tau_i^{-1}$, $\mu_i = -\nu_i^{-1}$ — корені характеристичних рівнянь $P(D)$ й $Q(D)$; τ_i й ν_i — часи релаксацій й післядії відповідно). Підставимо в формулу (13) вирази для характеристичних поліномів P й Q, згідно з формулами (14), і враховуючи, згідно з теоремою Вієта, що $b_n = \prod\limits_{i=1}^{n} \nu_i$, $a_{n-1} = \prod\limits_{i=1}^{n-1} \tau_i$, отримаємо при $D = -i\omega$ такий вираз для комплексного модуля:

$$E = \frac{\widetilde{E}_n \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\omega + \dfrac{i}{\nu_i}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \left(\omega + \dfrac{i}{\tau_i}\right)},$$

звідки випливає, що комплексний модуль, а отже, і хвильове число не мають коренів у нижній півплощині.

Далі розглянемо поведінку досліджуваного РТ у стандартних випадках для фіксованої точки $x = x_0$.

1. Якщо в РТ V_n^* підтримується постійна напруга $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$, то в цьому випадку в тілі відбувається процес повзучості. Рівняння теплопровідності (8) дає залежність між температурою й деформацією

$$\theta = -m\kappa\varepsilon, \tag{15}$$

а реологічне рівняння (4) зводиться до такого диференціального рівняння відносно деформації ε:

$$(Q_n + \widetilde{\delta}_0^{(n)} R_{n-1})\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\widetilde{E}_n}, \tag{16}$$

розв'язок якого (функція повзучості) можна записати так:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-t/\lambda_i} + \frac{\sigma_0}{(1 + \widetilde{\delta}_0^{(n)})\widetilde{E}_n}, \tag{17}$$

де $\widetilde{\delta}_0^{(n)} = mk\delta_n^*$; c_i — сталі інтегрування, що знаходяться з початкових умов, а λ_i — часи релаксації деформації при постійній напрузі, які визначаються за допомогою характеристичного рівняння

$$Q_n(\lambda) + \delta_n^* R_{n-1}(\lambda) = 0.$$

Якщо в момент $t = t_1$ тіло розвантажити, то в ньому буде відбуватись післядія. Деформацію (функцію післядії) в цьому випадку опишемо виразом

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-t'/\lambda_i},$$

де d_i — сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов; $t' = t - t_1$, і вона буде змінюватися від $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ при $t = t_1$ до 0 при $t = \infty$.

Зауважимо, що для узагальненого РТ Фойгта V_n^{*N} відмінності функцій повзучості та післядії від аналогічних у РТ Фойгта V_n^* будуть визначатись різницею коефіцієнтів у лівих частинах їхніх РР. Деформацію в узагальненому РТ Фойгта V_n^{*N} опишемо диференціальним рівнянням

$$\eta D(Q_{n-1}^N - \delta_{n-1}^* R_{n-2})\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E(1 + \widetilde{\delta}_0^{n-1})},$$

за допомогою якого можна отримати такі вирази:
для функції повзучості

$$\varepsilon^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i' e^{-t/\lambda_i} + \frac{\sigma_0}{E(1 + \delta_0)};$$

для функції післядії

$$\varepsilon^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} c_i' e^{-t'/\lambda_i}.$$

2. У випадку, коли в узагальненому РТ Фойгта V_n^* підтримується постійна деформація $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$, має місце релаксація напруг, а реологічне рівняння (4) перетворюється в диференціальне рівняння для напруг σ

$$P_n(D)\sigma = 0, \tag{18}$$

розв'язок якого (функція релаксації) наведемо виразом

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-t/\tau_i}, \tag{19}$$

де d_i — сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов, а часи релаксації напруг при постійній деформації τ_i (часи післядії) задовольняють характеристичному рівнянню

$$P_n(\tau) = 0. \tag{20}$$

З рівняння (19) випливає, що напруга буде релаксувати від σ_0 при $t = 0$ до 0 при $t = \infty$.

Релаксація напруг в узагальненому РТ Фойгта V_n^{*N} зводиться до розглянутого вище випадку при показнику в ЛДВ P, що дорівнює $n-1$, для узагальненого РТ Фойгта V_n^{*H} рівняння (18) матиме вигляд

$$P_n(D)\sigma = \widetilde{E}_n^H \varepsilon_0 (1 + \widetilde{\delta}_0^{(n)}),$$

а функцію релаксації запишемо виразом

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-t/\tau_i} + \widetilde{E}_n^H \varepsilon_0 (1 + \widetilde{\delta}_0^{(n)}).$$

Тоді напруга буде релаксувати від σ_0 при $t = 0$ до $\widetilde{E}_n^H \varepsilon_0 (1 + \widetilde{\delta}_0^{(n)})$ при $t = \infty$.

3. Якщо в тілі підтримується гармонічна напруга $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$, то деформація в цьому випадку буде запізнюватись по фазі від напруги:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \phi)}. \tag{21}$$

Зсув фаз ϕ між деформацією й напругою та початкову деформацію ε_0 знаходимо за формулами

$$\phi = \beta, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{|E|}, \tag{22}$$

де E — комплексний в'язкопружний модуль.

1. *Кондратьев О. К.* Сейсмические волны в поглощающих средах. – Москва: Недра, 1986. – 176 с.
2. *Рейнер М.* Реология. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 239 с.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – Москва: Мир, 1970. – 165 с.
5. *Коган С. Я.* Краткий обзор теорий поглощения сейсмических волн // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1966. – № 11. – С. 1–28.
6. *Futterman W. I.* Dispersive body waves // J. Geoph. Res. – 1962. – **67**. – P. 5279–5291.
7. *Уайт Дж.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. – Москва: Недра, 1986. – 261 с.
8. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения. – Москва: Госстройиздат, 1960. – 152 с.
9. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. – Москва: Госстройиздат, 1968. – 416 с.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 24.02.2011

Je. M. Bytsan'

Propagation of plane thermal and thermoelastic seismic waves in Voigt's rheological bodies' cluster

The problem of propagation of plane thermal and thermoelastic seismic waves in a rheological body, which consists of an arbitrary number of connected in series Voigt's rheological bodies (extended Voigt's rheological body), is solved. The analytic expressions for velocities and the extinction coefficient of thermal and thermoelastic waves are obtained. It is proved that, for this rheological body, the causality principle is realized.