УДК 517.929

Т. А. Лукьянова

Об экспоненциальной устойчивости нейронной сети Хопфилда на временной шкале

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Отримано достатні умови рівномірної експоненціальної стійкості в цілому стану рівноваги нейронної системи на часовій шкалі. Ефективність отриманих достатніх умов проілюстровано на прикладі.

Изучению динамики нейронной сети на временной шкале посвящен целый ряд работ. Экспоненциальная устойчивость нейронной сети Коско была рассмотрена в [1, 2]. Случай особой временной шкалы $\mathbb{P}_{1,1} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$ изучен в [3]. Устойчивость нейронной сети Хопфилда общего вида изучена в работах [4–6], где получены условия равномерной асимптотической и экспоненциальной устойчивости.

Целью данной работы является получение достаточных условий экспоненциальной устойчивости нейронной сети Хопфилда на временной шкале. В теории динамических уравнений на временной шкале существует несколько разных определений такой устойчивости. В определении экспоненциальной устойчивости, использованном в работах [5, 6], для любой временной шкалы решения системы оцениваются при помощи функции e^t. Это определение совпадает с общепринятым только в случае, когда $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, в то время как определение 1 данной работы совпадает с общепринятыми определениями как в непрерывном $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (и в этом случае оно эквивалентно определению из работ [5, 6]), так и в дискретном $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ случаях.

1. Основные обозначения и определения. Временной шкалой $\mathbb{T}$ называется произвольное непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Основные понятия и теоремы математического анализа на временной шкале, такие как определения производной и интеграла, правила дифференцирования и интегрирования, определение и свойства rd-непрерывной функции, функции скачка $\sigma(t)$, зернистости $\mu(t)$ временной шкалы, экспоненциальной функции подробно изложены в работах [7, 8]. Приведем только некоторые самые необходимые понятия и определения.

Функция $f\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется регрессивной, если при любом $t \in \mathbb{T}^k$ оператор $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, действующий по формуле $Fx = x + \mu(t)f(t, x)$, обратим.

Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется регрессивной, если $1 + \mu(t)f(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$ и положительно регрессивной, если $1 + \mu(t)f(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$. Множество всех rd-непрерывных и положительно регрессивных функций $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{R}^+$.

Через $e_p(t, t_0)$ будем обозначать экспоненциальную функцию на временной шкале. В дальнейшем будут необходимы такие свойства экспоненциальной функции.

Теорема 1. *Если $p \in \mathcal{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, тогда при всех $t_0 \in \mathbb{T}$ и $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$:*

1) $e_p(t_0, t_0) = 1$, $e_p(t, t_0) > 0$;

2) $e_p^{\Delta}(t, t_0) = p(t)e_p(t, t_0)$;

3) $e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, t_0)$;

4) $\dfrac{1}{e_p(t,t_0)} = e_{\ominus p}(t,t_0)$, *где* $\ominus p \in \mathcal{R}^+$, $(\ominus p)(t) = -\dfrac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}$*;*

5) $\lim\limits_{t\to+\infty} e_{\ominus\lambda}(t,t_0) = 0$ *(см. [9]);*

6) если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *то* $e_{\ominus\lambda}(t,t_0) = e^{-\lambda(t-t_0)}$*;*

7) если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *то* $e_{\ominus\lambda}(t,t_0) = (1+\lambda)^{-(t-t_0)}$.

Кроме того, будут необходимы такие свойства Δ-производной.

Теорема 2. *Если функции* f, g Δ*-дифференцируемы в точке* $t \in \mathbb{T}^k$, *то верны следующие утверждения:*

1) произведение fg Δ*-дифференцируемо в точке* $t \in \mathbb{T}^k$ *и*

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t));$$

2) $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$*;*

3) если $f^{\Delta}(t) \geqslant 0$, *то функция* f *неубывающая на* $\mathbb{T}^k$ *(см. [8, теорема 1.76]).*

Обозначим через $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ евклидову норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $\|A\| = (\lambda_M(A^{\mathrm{T}}A))^{1/2}$ — норму матрицы $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_M(A)$ — наибольшее собственное значение матрицы A, $[a,+\infty)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} \colon t \geqslant a\}$ при $a \in \mathbb{T}$, $\underline{b} = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $\overline{b} = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется M-матрицей, если все ее внедиагональные элементы неположительные, а все главные миноры положительные.

2. Нейронная сеть на временной шкале. Рассмотрим нейронную сеть на временной шкале, динамика которой описывается уравнениями вида

$$x^{\Delta}(t) = -Bx(t) + Ts(x(t)) + u, \qquad t \in \mathbb{T}_\tau. \tag{1}$$

Решение $x(t; t_0, x_0)$ при $t = t_0$ принимает значение x_0, т. е.

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \qquad t_0 \in \mathbb{T}_\tau, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

В системе (1) $\mathbb{T}_\tau = [\tau, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $\tau \in \mathbb{T}$, вектор $x \in \mathbb{R}^n$ характеризует состояние нейронов, $T = \{t_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, компоненты t_{ij} описывают связи между i-м и j-м нейронами, $s \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $s(x) = (s_1(x_1), s_2(x_2), \ldots, s_n(x_n))^{\mathrm{T}}$, функция s_i описывает ответ i-го нейрона, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = \operatorname{diag}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $u \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор внешнего входа.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, тогда $x^{\Delta} = d/dt$ и начальная задача (1)–(2) эквивалентна начальной задаче для непрерывной нейронной системы типа Хопфилда [10]

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Bx(t) + Ts(x(t)) + u, \qquad t \geqslant \tau,$$

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \qquad t_0 \geqslant \tau, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, тогда $x^{\Delta}(k) = x(k+1) - x(k) = \Delta x(k)$, $\mathbb{T}_\tau = \{\tau, \tau+1, \tau+2, \ldots\}$ и начальная задача (1)–(2) эквивалентна следующей [11]:

$$\Delta x(k) = -Bx(k) + Ts(x(k)) + u, \qquad t \in \mathbb{T}_\tau,$$

$$x(k_0; k_0, x_0) = x_0, \qquad k_0 \in \mathbb{T}_\tau, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

О системе (1) введем следующие предположения.

S_1. Вектор-функция $f(x) = -Bx + Ts(x) + u$ является регрессивной.

S_2. Существуют положительные постоянные $l_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $|s_i(r) - s_i(v)| \leqslant l_i|r - v|$ при всех $r, v \in \mathbb{R}$.

Если выполняются предположения S_1, S_2, то при любых начальных данных $(t_0, x_0) \in \mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}^n$ задача (1)–(2) имеет точно одно решение на $[t_0, +\infty)_\mathbb{T}$ [8].

В работе [5] получено такое условие регрессивности:

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* S_2. *Если при каждом фиксированном* $t \in \mathbb{T}$ *матрица* $(I - \mu(t)B)\Lambda^{-1} - \mu(t)|T|$ *является* M*-матрицей, то функция* $f(x) = -Bx + Ts(x) + u$ *регрессивна при любом* $u \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $x = x^*$ — изолированное состояние равновесия системы (1), $L = \max\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$.

Определение. Состояние равновесия $x = x^*$ системы (1) называется *равномерно экспоненциально устойчивым в целом*, если существуют постоянные $p > 0$, $\alpha > 0$ и $N = N(x_0) > 0$ такие, что $\|x(t; t_0, x_0) - x^*\| < N(e_{\ominus p}(t, t_0))^\alpha$ при всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$ и $t \in [t_0, +\infty)_\mathbb{T}$.

В работе [4] приведено такое условие существования равновесия.

Теорема 4. *Пусть выполняется предположение* S_2 *и имеет место неравенство* $\underline{b} - L\|T\| > 0$. *Тогда существует состояние равновесия системы* (1), *и это состояние равновесия единственно.*

3. Основной результат. Сделаем замену переменных $y(t) = x(t) - x^*$ и перепишем начальную задачу (1)–(2) в виде

$$y^\triangle(t) = -By(t) + Tg(y(t)), \qquad t \in \mathbb{T}_\tau, \tag{3}$$

$$y(t_0; t_0, y_0) = y_0, \qquad t_0 \in \mathbb{T}_\tau, \qquad y_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $g(y) = (g_1(y_1), g_2(y_2), \ldots, g_n(y_n))^\mathrm{T}$, $g(y) = s(y + x^*) - s(x^*)$.

Если для системы (1) выполняются предположения S_1, S_2, то для системы (3) верны следующие утверждения.

G_1. Вектор-функция $g_1(y) = -By + Tg(y)$ является регрессивной.

G_2. Существуют положительные постоянные $l_i > 0$ такие, что $|g_i(r) - g_i(v)| \leqslant l_i|r - v|$, при всех $r, v \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

G_3. $G(0) = 0$.

Заметим, что если выполняются условия G_1–G_3, то при любых начальных данных $(t_0, x_0) \in \mathbb{T}_\tau \times \mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи (3)–(4) при всех $t \in [t_0, +\infty)_\mathbb{T}$ [8].

Теорема 5. *Предположим, что для системы* (1) *выполняются предположения* S_1, S_2 *и существует постоянная* $\mu^* > 0$ *такая, что* $\mu(t) \leqslant \mu^*$ *при всех* $t \in \mathbb{T}_\tau$. *Если выполняется неравенство*

$$2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu^*(\overline{b} + L\|T\|)^2 > 0, \tag{5}$$

то существует единственное состояние равновесия системы (1), *и это состояние равновесия равномерно экспоненциально устойчиво в целом.*

Доказательство. Из неравенства (5) следует, что $\underline{b} - L\|T\| > 0$ и, в соответствии с теоремой 4, существует единственное состояние равновесия $x = x^*$ системы (1).

Покажем его экспоненциальную устойчивость. Поведение состояния $x(t)$ системы (1) в окрестности состояния равновесия $x = x^*$ эквивалентно поведению состояния $y(t)$ системы (3) в окрестности нуля. Для доказательства теоремы применим функцию Ляпунова

$v(t,y) = y^{\mathrm{T}} y e_p(t,t_0)$, где

$$0 < p < 2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu^*(\overline{b} + L\|T\|)^2. \tag{6}$$

Для производной функции $v(t,y(t))$ имеем выражение

$$v^{\Delta}(t,y(t)) = y^{\mathrm{T}}(t)y(t)(e_p(t,t_0))^{\Delta} + [y^{\mathrm{T}}(t)y(t)]^{\Delta} e_p(\sigma(t),t_0).$$

Подставляя

$$[y^{\mathrm{T}}(t)y(t)]^{\Delta} = 2y^{\mathrm{T}}(t)y^{\Delta}(t) + \mu(t)[y^{\Delta}(t)]^{\mathrm{T}} y^{\Delta}(t),$$

для производной функции v вдоль решений системы (3) получаем

$$\begin{aligned} v^{\Delta}(t,y(t))|_{(3)} &= (py(t)^{\mathrm{T}} y(t) + (1+\mu(t)p)(2y^{\mathrm{T}}(t)y^{\Delta}(t) + \mu(t)[y^{\Delta}(t)]^{\mathrm{T}} y^{\Delta}(t)))e_p(\sigma(t),t_0) = \\ &= (p\|y(t)\|^2 + (1+\mu(t)p)(2y^{\mathrm{T}}(t)[-By(t) + Tg(y(t))] + \\ &\quad + \mu(t)\|By(t) - Tg(y(t))\|^2))e_p(\sigma(t),t_0). \end{aligned} \tag{7}$$

Используя неравенства

$$y^{\mathrm{T}} Tg(y) \leqslant \|y\|\|T\|\|g(y)\| \leqslant \|y\|\|T\|L\|y\| = L\|T\|\|y\|^2,$$

$$\|By - Tg(y)\|^2 \leqslant (\|By\| + \|T\|\|g(y)\|)^2 \leqslant (\overline{b} + L\|T\|)^2\|y\|^2,$$

продолжим оценку (7)

$$\begin{aligned} v^{\Delta}(t,y(t))|_{(3)} &\leqslant (p\|y(t)\|^2 + (1+\mu(t)p)(-2\underline{b}\|y(t)\|^2 + 2L\|T\|\|y(t)\|^2 + \\ &\quad + \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2\|y(t)\|^2))e_p(\sigma(t),t_0) = (p + (1+\mu(t)p)(-2\underline{b} + 2L\|T\| + \\ &\quad + \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2))\|y(t)\|^2 e_p(\sigma(t),t_0). \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим квадратный трехчлен $\psi(z) = (\overline{b} + L\|T\|)^2 z^2 - (2\underline{b} - 2L\|T\|)z + 1$. Поскольку $D = (2\underline{b} - 2L\|T\|)^2 - 4(\overline{b} + L\|T\|)^2 = 4(\underline{b} + \overline{b})(\underline{b} - \overline{b} - 4L\|T\|) < 0$, то $\psi(z) > 0$ при всех $z \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$1 - \mu(t)(2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2) = (\overline{b} + L\|T\|)^2\mu^2(t) - (2\underline{b} - 2L\|T\|)\mu(t) + 1 > 0$$

при всех $t \in \mathbb{T}_{\tau}$. Кроме того, при всех $t \in \mathbb{T}_{\tau}$

$$2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2 \geqslant 2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu^*(\overline{b} + L\|T\|)^2 > 0.$$

Поэтому в силу выбора постоянной p верны неравенства

$$\begin{aligned} p &< 2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu^*(\overline{b} + L\|T\|)^2 \leqslant 2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2}{1} \leqslant \frac{2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2}{1 - \mu(t)(2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2)}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$p(1 - \mu(t)(2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2)) < 2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2,$$

$$p + (1 + p\mu(t))(-2\underline{b} + 2L\|T\| + \mu(t)(\overline{b} + L\|T\|)^2) < 0.$$

Продолжая оценку (8), будем иметь

$$v^{\Delta}(t, y(t))|_{(3)} \leqslant 0. \tag{9}$$

Тогда, согласно теореме 1.76 из [8], при всех $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ верно неравенство

$$v(t, y(t))| \leqslant v(t_0, y(t_0)).$$

Учитывая свойства экспоненциальной функции, получаем оценку

$$\|y(t)\| \leqslant \|y_0\|(e_{\ominus p}(t, t_0))^{1/2},$$

которая выполняется при всех $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$ и $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Теорема 5 доказана.

4. Численный пример. Рассмотрим трехкомпонентную нейронную сеть вида

$$x^{\Delta}(t) = -Bx(t) + Ts(x(t)) + u, \tag{10}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0{,}5$, $s(x) = (s_1(x_1), s_2(x_2), s_3(x_3))^{\mathrm{T}}$, $s_i(x_i) = (1/2)\bigl(|x_i + 1| - |x_i - 1|\bigr)$, $i = 1, 2, 3$,

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\underline{b} = \overline{b} = 0{,}5$, $L = 1$, $\Lambda = I$, $\|T\| = 0{,}43990$, и, согласно теореме 4, существует единственное состояние равновесия системы (10) при любом $u \in \mathbb{R}^3$.

Функция $-Bx(t) + Ts(x(t)) + u$ будет регрессивной, если матрица

$$(I - \mu(t)B)\Lambda^{-1} - \mu(t)|T| = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}6\mu(t) & -0{,}1\mu(t) & 0 \\ -0{,}2\mu(t) & 1 - 0{,}6\mu(t) & -0{,}2\mu(t) \\ -0{,}1\mu(t) & -0{,}3\mu(t) & 1 - 0{,}8\mu(t) \end{pmatrix}$$

является M-матрицей при всех $t \in \mathbb{T}_\tau$. Отсюда имеем ограничения на зернистость временной шкалы $\mu(t) \in [0{,}13386) \bigcup (0{,}21535; 1{,}34876)$.

Неравенство (5) выполняется, если $\mu^* < 0{,}12788$. Из всего вышеприведенного делаем вывод, что если $\mu(t) < 0{,}12788$ при всех $t \in \mathbb{T}_\tau$, то для любого $u \in \mathbb{R}^3$ существует единственное состояние равновесия системы (10), и это состояние равновесия равномерно экспоненциально устойчиво в целом.

Таким образом, в рамках второго метода Ляпунова, получены достаточные условия равномерной экспоненциальной устойчивости в целом состояния равновесия нейронной системы Хопфилда на временной шкале. При этом использована скалярная функция Ляпунова, зависящая от времени.

Условия, приведенные в работе [1], предполагают существование параметра p, для которого должна выполняться система n неравенств, зависящих от времени. Теорема 5 данной работы дает достаточные условия экспоненциальной устойчивости в виде одного простого неравенства на коэффициенты и нормы матриц исходной системы. Кроме того, для верхней границы параметра p получена явная оценка вида (6).

Автор выражает благодарность академику НАН Украины А. А. Мартынюку за постановку задачи и обсуждение результатов.

1. *Chen A., Du D.* Global exponential stability of delayed BAM network on time scale // Neurocomputing. – 2008. – **71**. – P. 3582–3588.
2. *Li Y., Chen X., Zhao L.* Stability and existence of periodic solutions to delayed Cohen–Grossberg BAM neural networks with impulses on time scales // Ibid. – 2009. – **72**. – P. 1621–1630.
3. *Zheng F., Zhou Z., Ma C.* Periodic solutions for a delayed neural network model on a special time scale // Appl. Math. Lett. – 2010. – **23**. – P. 571–575.
4. *Лукьянова Т. А., Мартынюк А. А.* Об асимптотической устойчивости нейронной сети на временной шкале // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 3. – С. 346–360.
5. *Мартынюк А. А., Лукьянова Т. А.* Об устойчивости нейронной сети на временной шкале // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 21–26.
6. *Martynyuk A. A., Lukyanova T. A., Rasshyvalova S. N.* On stability of Hopfield neural network on time scales // Nonlin. dynamics and systems theory // Nonlinear Dynamics and systems theory. – 2010. – **10**, No 4. – P. 397–408.
7. *Bohner M., Martynyuk A. A.* Elements of stability theory of A. M. Liapunov for dynamic equations on time scales // Ibid. – 2007. – **7**, No 3. – P. 225–251.
8. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales: an introduction with applications. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 358 p.
9. *Peterson A. C., Raffoul Y. N.* Exponential stability of dynamic equations on time scales // Adv. Difference Equat. – 2005. – **2005**, No 2. – P. 133–144.
10. *Hopfield J. J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1984. – **81**. – P. 3088–3092.
11. *Feng Z., Michel A. N.* Robustness analysis of a class of discrete-time systems with applications to neural networks // IEEE Trans. Circuits and Syst. – 2003. – **46**, No 12. – P. 1482–1486.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 13.12.2010

T. A. Lukyanova

On exponential stability of a Hopfield neural network on the time scale

We present new stability results of neural systems on the time scale. The sufficient conditions of exponential stability are given. The efficiency of the obtained sufficient conditions is tested by a numerical example.