

О. С. Богданова, А. А. Каминский

Об одной модели мезомеханики разрушения ортотропного материала с разными пределами прочности при растяжении и сжатии

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

On the basis of the model proposed by the authors, the problem of the fracture of an orthotropic plate with crack under biaxial loading is solved in the case where the material of a plate has different ultimate stresses under tension and compression. The fracture of a material can be described by the Goldenblat–Kopnov criterion. The strength diagrams for the orthotropic plate with crack for different parameters of strength and crack resistance are obtained.

Во второй половине XX столетия в основном завершилось формирование линейной и некоторых разделов нелинейной механики разрушения. Линейная механика разрушения, которая базируется на теориях Гриффитса–Ирвина и концепции коэффициентов интенсивности напряжений, а также нелинейная механика разрушения, в основе которой лежит теория Черепанова–Райса и концепция энергетического инвариантного J -интеграла, являются макротеориями, поскольку они не рассматривают физические особенности разрушения разных классов материалов. В связи с этим механика процесса разрушения для этих теорий основывается лишь на макромеханических свойствах материалов.

В последние годы в механике разрушения получил развитие двухуровневый подход, когда на макроуровне, в большей части тела с трещиной, применяются методы механики сплошной среды, а на втором уровне, в зонах предразрушения вблизи фронта трещины, в которых произошло частичное разрушение материала, исследование процесса разрушения проводится с помощью специфического моделирования физических особенностей конкретных материалов. Такой подход в настоящее время называют мезомеханикой разрушения [1, 2]. Методы мезомеханики разрушения позволяют изучать процессы разрушения разнообразных естественных и искусственных материалов, таких как горные породы, древесина, бетоны, керамика, полимеры, композиты и др.

Как показывают эксперименты, во многих случаях зоны предразрушения в тонких пластинах представляют собой узкие клинообразные области на продолжении трещин из несплошного полуразрушенного материала [3, 4]. Основываясь на этих экспериментальных данных, в работе [5] предложена модель зоны предразрушения, которая аналогично модели Леонова–Панасюка–Дагдейла рассматривает зону предразрушения в виде разреза, к берегам которого приложены самоуравновешенные сжимающие напряжения. Однако в отличие от последней, параметры предлагаемой модели определяются на основе выполнения критерия прочности материала в зоне предразрушения, что позволяет учитывать влияние усилий, действующих вдоль плоскости расположения трещины, поскольку этого нельзя достичь, применяя модель Леонова–Панасюка–Дагдейла.

В настоящей работе на основе модели [5] и критерия прочности Гольденבלата–Копнова [6] исследуется разрушение тонкой ортотропной пластины с трещиной, материал которой имеет различные пределы прочности при растяжении и сжатии. К таким материалам,

в первую очередь, относятся бетоны, армированные бетоны, горные породы, некоторые виды композитов.

Рассмотрим тонкую ортотропную пластину с трещиной длиной $2l$, расположенной вдоль оси ортотропии Ox , под действием нормальных нагрузок на бесконечности $\sigma_x^\infty = q$, $\sigma_y^\infty = p > 0$.

Разрушение материала пластины описывается критерием прочности общего вида:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, C_i) = 0, \quad (1)$$

где σ_1, σ_2 — главные напряжения; C_i — постоянные материала.

Зоны предразрушения, возникающие вблизи вершин трещин, моделируются дополнительными разрезами на продолжении трещины длиной d , к берегам которых приложены самоуравновешенные напряжения σ_x^0, σ_y^0 . Вследствие симметрии задачи направления x, y являются главными и, следовательно, напряжения σ_x^0, σ_y^0 удовлетворяют условию прочности (1).

Для исследования влияния свойств материала на предельное состояние пластины с трещиной воспользуемся решением задачи о напряженно-деформированном состоянии ортотропной пластины с трещиной, находящейся под действием двухосного нагружения на бесконечности, полученным в [5]. Приведем соотношения для определения основных параметров рассматриваемой задачи, полученные в [5].

Напряжения в зонах предразрушения σ_x^0, σ_y^0 определяются из решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sigma_x^0 = \beta(\sigma_y^0 - p) + q, \\ F(\sigma_x^0, \sigma_y^0, C_i) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\beta = \sqrt{E_1/E_2}$, E_1, E_2 — модули упругости вдоль осей ортотропии.

Очевидно, что напряжения в зонах предразрушения зависят от соотношения модулей упругости E_1/E_2 и постоянных материала C_i , входящих в критерий прочности (1).

Длина зоны предразрушения d определяется соотношением

$$\frac{l}{L} = \frac{l}{l+d} = \cos \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}. \quad (3)$$

Раскрытие в вершинах трещины $|x| = l, y = 0$ имеет вид:

$$\delta(l) = \frac{4T_0\sigma_y^0 l}{\pi} \ln \sec \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}, \quad (4)$$

где

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \nu_{12} \right) + \frac{E_1}{G_{12}}}, \quad (5)$$

(E_1, E_2 — модули упругости вдоль осей ортотропии; ν_{12} — коэффициент Пуассона; G_{12} — модуль сдвига).

Если в качестве критерия разрушения выбрать критерий критического раскрытия трещины, то страгивание трещины произойдет, когда раскрытие в вершине трещины достигнет некоторого предельного значения

$$\delta(l) = \delta_c. \quad (6)$$

Тогда на основании (5) поле предельных нагрузок (p_*, q_*) определим соотношением

$$\frac{4T_0\sigma_y^0(p_*, q_*)l}{\pi} \ln \sec \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = \delta_c, \quad (7)$$

где $\sigma_y^0(p_*, q_*)$ находим из решения системы уравнений (2) при $p = p_*$, $q = q_*$.

Если пластина подвергнута одноосному растяжению ($q = 0$), то предельная нагрузка при одноосном растяжении $p_*^{(0)}$ определяется из соотношения:

$$\frac{4T_0\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)l}{\pi} \ln \sec \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)} = \delta_c. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), получаем:

$$\frac{\sigma_y^0(p_*, q_*)}{\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)} \ln \cos \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = \ln \cos \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)}. \quad (9)$$

Соотношение (9) определяет поле предельных нагрузок (p_*, q_*) в зависимости от предельной нагрузки при одноосном нагружении. Изменение $p_*^{(0)}$ от 0 до σ_{0y} (предела прочности материала в направлении y) соответствует изменению длины трещины от бесконечности до 0, т. е. охватывает весь диапазон изменения длины трещины.

Поскольку в определяющее соотношения (7), (9) входят напряжения σ_y^0 , зависящие от постоянных, характеризующих механические свойства материала, то очевидно, что предельное состояние пластины также будет зависеть от этих постоянных.

Рассмотрим в качестве критерия прочности критерий Гольденבלата–Копнова [6], учитывающий различие в сопротивлении растягивающим и сжимающим нагрузкам и зависимость прочности материала от знака касательных напряжений. Для плоского напряженного состояния этот критерий имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_1^c - \sigma_1^p}{2\sigma_1^c\sigma_1^p}\sigma_1 + \frac{\sigma_2^c - \sigma_2^p}{2\sigma_2^c\sigma_2^p}\sigma_2 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^c + \sigma_1^p}{\sigma_1^c\sigma_1^p} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\sigma_2^c + \sigma_2^p}{\sigma_2^c\sigma_2^p} \right)^2 \sigma_2^2 - \right. \\ & \left. - \left[\left(\frac{\sigma_1^c + \sigma_1^p}{\sigma_1^c\sigma_1^p} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^c + \sigma_2^p}{\sigma_2^c\sigma_2^p} \right)^2 - \left(\frac{\tau_{45}^+ + \tau_{45}^-}{\tau_{45}^+\tau_{45}^-} \right)^2 \right] \sigma_1\sigma_2 + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_0^2} \right\}^{1/2} = 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где σ_1^p, σ_2^p — пределы прочности при растяжении вдоль осей 1, 2; σ_1^c, σ_2^c — пределы прочности при сжатии вдоль осей 1, 2; τ_{45}^+, τ_{45}^- — пределы прочности при сдвиге по площадкам, наклоненным под углом $+45^\circ$ и -45° к главным направлениям; τ_0 — предел прочности при сдвиге по главным направлениям.

Критерий Гольденבלата–Копнова справедлив для материалов, прочностные характеристики которых подчиняются условию совместности [6]:

$$\frac{1}{\sigma_1^p} - \frac{1}{\sigma_2^p} - \frac{1}{\sigma_1^c} + \frac{1}{\sigma_2^c} = \frac{1}{\tau_{45}^+} - \frac{1}{\tau_{45}^-}. \quad (11)$$

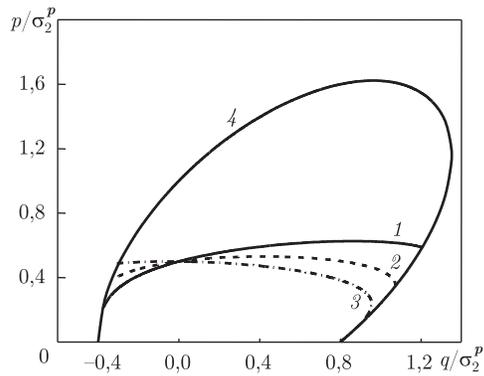


Рис. 1

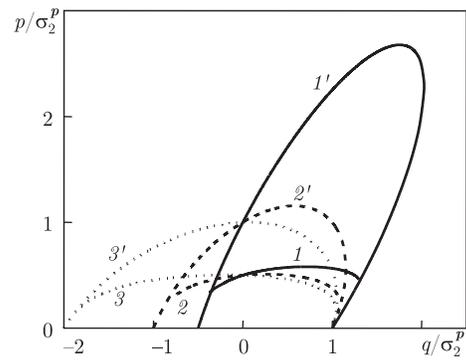


Рис. 2

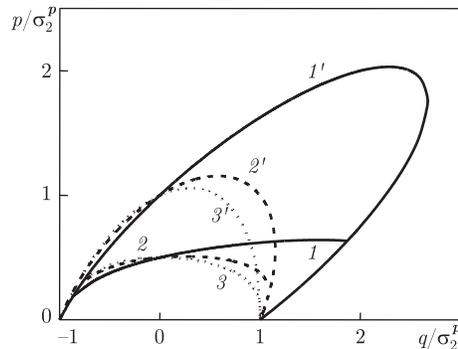


Рис. 3

На рис. 1 приведены предельные кривые разрушения, полученные на основании (9), для $\beta = 0,1$ (кривая 1), $\beta = 0,5$ (кривая 2), $\beta = 0,9$ (кривая 3) при $p_*^{(0)}/\sigma_2^p = 0,5$ и предельная кривая прочности (10) для бездефектного материала при $\sigma_1^p/\sigma_2^p = 0,8$, $\sigma_1^c/\sigma_2^p = 0,4$, $\sigma_2^c/\sigma_2^p = 0,44$, $\tau/\sigma_2^p = 0,5$ (кривая 4). Увеличение степени анизотропии материала по модулям упругости приводит к росту предельной нагрузки в области растягивающих нагрузок, действующих вдоль линии расположения трещины, и к снижению предельной нагрузки в области сжимающих нагрузок, действующих вдоль линии расположения трещины.

На рис. 2 изображены предельные кривые разрушения, полученные на основании (9), и соответствующие предельные кривые прочности (10) для бездефектного материала для $\sigma_1^c/\sigma_1^p = 0,5$ (кривые 1, 1'), $\sigma_1^c/\sigma_1^p = 1,0$ (кривые 2, 2'), $\sigma_1^c/\sigma_1^p = 2,0$ (кривые 3, 3') при $\beta = 0,5$, $p_*^{(0)}/\sigma_2^p = 0,5$, $\sigma_1^p/\sigma_2^p = 1,0$, $\tau/\sigma_2^p = 1,0$.

На рис. 3 приведены предельные кривые разрушения, полученные на основании (9), и соответствующие предельные кривые прочности (10) для бездефектного материала для $\sigma_2^c/\sigma_2^p = 0,5$ (кривые 1, 1'), $\sigma_2^c/\sigma_2^p = 1,0$ (кривые 2, 2'), $\sigma_2^c/\sigma_2^p = 2,0$ (кривые 3, 3') при $\beta = 0,5$, $p_*^{(0)}/\sigma_2^p = 0,5$, $\sigma_1^c/\sigma_1^p = 1,0$, $\tau/\sigma_2^p = 1,0$.

Зависимости безразмерной предельной нагрузки p_*/σ_2^p от соотношения пределов прочности при сжатии и растяжении вдоль оси y σ_2^c/σ_2^p и вдоль оси x σ_1^c/σ_2^p приведены на рис. 4, а и рис. 4, б соответственно для различных значений нагрузки, действующей вдоль линии расположения трещины $q/\sigma_2^p - 0,8$ (кривая 1), $-0,5$ (кривая 2), $-0,1$ (кривая 3), $0,1$ (кривая 4), $0,5$ (кривая 5), $0,8$ (кривая 6) при $\sigma_1^p/\sigma_2^p = 1,0$, $\tau/\sigma_2^p = 1,0$. Как следует из приведенных результатов, различие пределов прочности материала при растяжении и сжа-

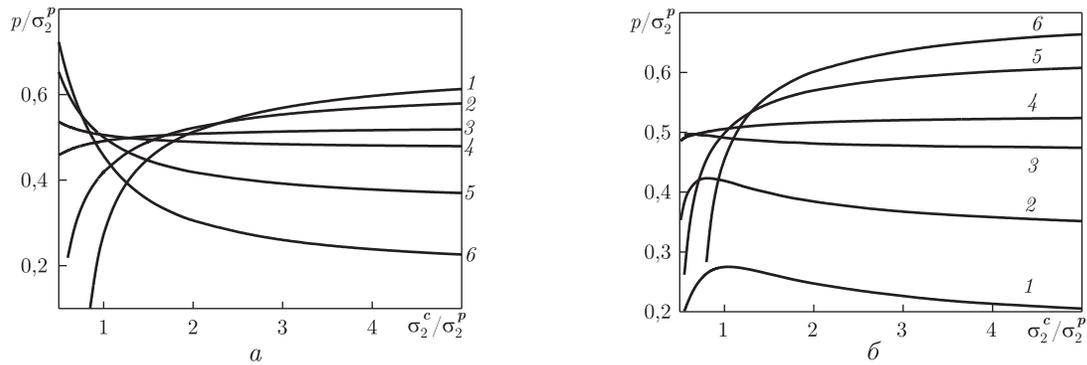


Рис. 4

тии по каждому направлению оказывает существенное влияние на предельное состояние ортотропной пластины с трещиной.

Таким образом, предложенная выше модель дает возможность исследовать предельное состояние материалов с разными пределами прочности на растяжение и сжатие, что является ее существенным преимуществом по сравнению с моделью Леонова–Панасюка–Дагдейла. Данная модель разрушения позволяет прогнозировать трещиностойкость многих конструкционных ортотропных материалов в условиях двухосного нагружения.

1. *Sih G. C., Liu B.* Mesofracture mechanics: a necessary link // *Theor. Appl. Fracture Mech.* – 2001. – **37**. – P. 371–395.
2. *Гузь А. Н.* Об одной двухуровневой модели мезомеханики разрушения композитов с трещинами при сжатии // *Прикл. механика.* – 2003. – **39**, № 3. – С. 27–44.
3. *Wu E. M.* Strength and fracture of composites. In: *Fracture and fatigue.* – V. 5 (Ed. Broutman, L. J.). – New-York: Academic Press, 1974. – P. 206–266.
4. *Каминский А. А.* Анализ закономерностей докритического стабильного роста трещин в полимерных материалах на основе моделей мехомеханики разрушения. Теория – эксперимент // *Прикл. механика.* – 2004. – **40**, № 8. – С. 3–25.
5. *Каминский А. А., Богданова О. С.* Моделирование процесса разрушения ортотропных материалов при двухосном нагружении // Там же. – 1996. – **32**, № 10. – С. 81–87.
6. *Гольденблат И. И., Копнов В. А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1968. – 191 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 07.06.2007