



ЩОДРО О.Є.

УДК 532.5:519.63

ЩОДРО О.Є., канд. техн. наук, доц. Національний університет водного господарства та природокористування
 БАРАНОВСЬКИЙ С.В., канд. техн. наук, доц. Рівненський державний гуманітарний університет
 НАКОНЕЧНИЙ І.М., інженер-програміст, Національний університет водного господарства та природокористування

ПОБУДОВА ПЛАНОВОЇ КАРТИНИ ТЕЧІЇ ТА ПРОСТОРОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

В роботі розроблено алгоритм побудови планової картини течії на основі методу конформних відображень та просторових деформацій русла довільної форми на основі дифузійної теорії розмиву.



БАРАНОВСЬКИЙ С.В.

Метою роботи є розробка алгоритму і програми для побудови трьохвимірного зображення деформованого дна русла довільної конфігурації з врахуванням реальної форми його поперечних перерізів.

Об'єктом досліджень є процес деформації річкового русла, пов'язаний з гідравлічною структурою потоку в ньому.

Предметом досліджень є вплив реальної геометрії русла на кінематичну структуру і розмивну спроможність потоку.



НАКОНЕЧНИЙ І.М.

При дослідженні кінематичних характеристик потенціальних течій традиційним є застосування методу конформних відображень. У випадку розрахунку характеристик внутрішніх течій у плоскому криволінійному каналі (Рис. 1) ефективним з обчислювальної точки зору є застосування перетворення Кристофеля-Шварца, яке дозволяє область, обмежену многокутником у фізичній площині Z , відобразити на верхню півплощину площини W (Рис. 1). Межа многокутника при цьому співпадає в даній площині з дійсною віссю.

Перетворення Кристофеля – Шварца для відображення каналу у площині Z на площину має вигляд

$$\frac{dZ}{dw} = \frac{M}{w} \left(\prod_{j=1}^N (w - b_j)^{-\alpha_j/\pi} \right) w^{-\alpha_e/\pi}, \quad (1)$$

де α_j – кути повороту під час переходу кожної кутової точки (відлік проти годинникової стрілки); b_j – невідомі положення точок межі на дійсній осі в перетвореній площині; три значення b_j можуть бути вибрані довільним чином. Ці величини

невідомі і визначаються шляхом повторного інтегрування рівняння (1). Величина M пов'язана з висотою каналу і його орієнтацією щодо осі x . Рівняння (1) містить лише кути і полюси b_j , які дійсно наявні в каналі.

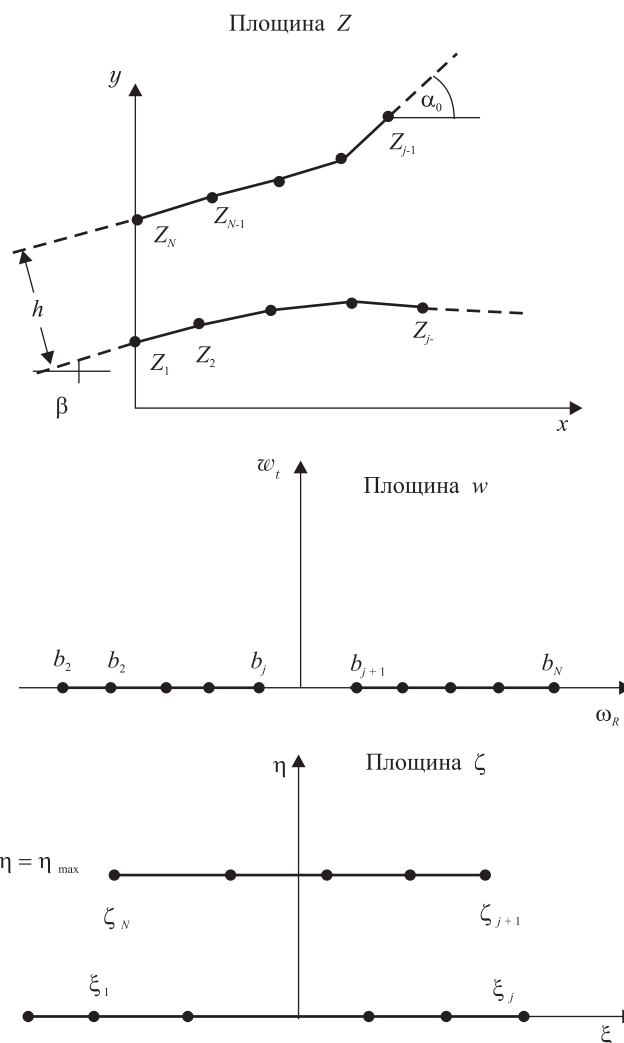


Рис. 1. Схеми відображення для розрахунків обмеженої області (канала, русла)

При вивченні течії у каналі доцільно здійснити друге перетворення, що переводить верхню півплощину площини w у прямий канал, паралельний дійсній осі в площині ξ (Рис. 1)



Відображення площини w на площину ξ визначається співвідношенням

$$\xi = - (1/\pi) \ln w + i. \quad (2)$$

Якщо припустити, що канал розміщений далеко вгору по потоку як прямий канал (що еквівалентно $w \rightarrow \infty$), то рівність (1) прийме вигляд

$$\frac{dZ}{dw} = \frac{M}{w}, \quad (3)$$

Проінтегрувавши (3) і здійснивши відображення (2), одержимо

$$Z = \pi M (i - \zeta) + Z_0. \quad (4)$$

Застосовуючи (4) до верхньої і нижньої поверхонь каналу, одержимо вираз для M :

$$Z_u - Z_l = iHe^{i\theta} = -\pi Mi. \quad (5)$$

Значення H і θ визначені на Рис. 1.

Якщо положення полюсів b_j знайдено, то для побудови сітки можна здійснити чисельне інтегрування рівняння (1). Проте, більш ефективним з обчислювальної точки зору є використання змішаної маршевої схеми другого порядку, в якій використовується аналітичне інтегрування у кожному полюсі. Ця схема може бути представлена у вигляді

$$\frac{Z_{k+1} - Z_k}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} = \frac{-\pi M}{w_{k+\frac{1}{2}}^{\frac{\alpha_e}{\pi}}} \prod_{j=1}^N \frac{(w_{k+1} - b_j)^{1-\frac{\alpha_j}{\pi}} - (w_k - b_j)^{1-\frac{\alpha_j}{\pi}}}{(1 - \frac{\alpha_j}{\pi})(w_{k+1} - w_k)} \quad (6)$$

Скінченнорізницевий аналог виразу (2) має такий вигляд:

$$w_{k+1} - w_k = -\pi w_{k+\frac{1}{2}} (\xi_{k+1} - \xi_k). \quad (7)$$

Співвідношення (3) і (4) представляють прямий зв'язок між фізичною площиною Z і розрахунковою площиною ζ справедливий для будь-якого шляху інтегрування в розрахунковій області.

Положення полюсів b_j шукається ітеративно за такою процедурою. Шляхом інтегрування рівняння (6) знаходяться значення $Z_j^v - Z_{j-1}^v$, де v – номер ітерації. Далі визначаються нові оцінки для ζ_j^{v+1} ,

$$\zeta_j^{v+1} = \zeta_{j-1}^{v+1} + \frac{|Z_j^c - Z_{j-1}^c|}{|Z_j^v - Z_{j-1}^v|} (\zeta_j^v - \zeta_{j-1}^v) \quad (8)$$

де величини Z_j^c , які визначають положення кутових точок у фізичній площині є відомими. Нові

значення b_j^{v+1} отримуємо з (2):

$$b_j^{v+1} = \exp[\pi(i - \zeta_j^{v+1})]. \quad (10)$$

Весь процес (6)–(10) повторюється до тих пір, поки для всіх j величини Z_j^v не стануть достатньо близькими до Z_j^c .

Після відшукування значень b_j , інтегрування (6) вздовж ліній постійного значення ξ і η у розрахунковій області дозволяє побудувати сітку у фізичній області.

Зазначимо, що потенціальні течії в каналі визначатимуться виразом

$$\phi + i\psi = \zeta, \quad (11)$$

де ϕ – потенціал швидкості, ψ – функція течії, а модуль швидкості дорівнює одиниці.

Алгоритм числової реалізації наближеного методу розв'язання різницевого аналогу модельної задачі, що описує потенціальну плоску течію у криволінійному каналі полягає у здійсненні таких кроків.

1. Задаємо координати кутових точок каналу Z_1, Z_2, \dots, Z_N кут втікання течії у канал θ (Рис. 2).

2. Задаємо початкові наближення значень точок $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ (образів кутових точок каналу у фізичній області) (Рис. 1).

3. За формулою (10) обчислюємо образи кутових точок у площині w .

4. Зафіксувавши початкову точку каналу та використовуючи змішану маршову схему (6) інтегрування вздовж розрахункових границь, за ітеративною схемою (8) встановлюємо відповідність між кутовими точками у фізичній та розрахунковій областях.

5. При відомих значеннях b_j , шляхом інтегрування (6) вздовж ліній постійного значення ξ і η у розрахунковій області будуємо конформну сітку у фізичній області (Рис. 1).

Програмна реалізація розглянутої вище модельної задачі здійснена в середовищі Delphi. В програмному комплексі для зручності реалізовано власний модуль основних дій над комплексними числами, оскільки площина, в якій розглядається канал є комплексною. Крім того, з метою уніфікації методу для довільних випадків конфігурації каналів реалізована процедура автоматизованого визначення координат кутових точок та побудови зображення каналу. Вигляд програмного вікна зображено на Рис. 2.

При дослідженні потенціальних течій у криволінійному каналі за допомогою створеного про-

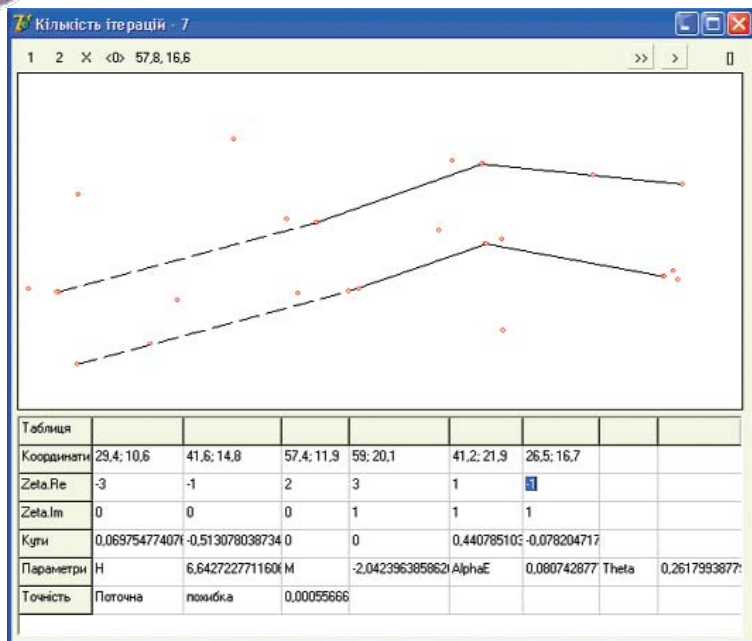


Рис. 2. Завдання границь області

грамного комплексу, користувач після запуску програми, використовуючи маніпулятор мишу, на спеціально створеній графічній поверхні (полотні) вказує положення кутових точок каналу. Для зображення кутових точок у програмному вікні також передбачені два режими, яким відповідають кнопки: 1 – точки нижнього берега, 2 – точки верхнього берега. При цьому програмний комплекс автоматично будує ламані відповідних берегів та висвітлює числові значення координат цих кутових точок в рядку "Координати" розрахункової таблиці (Рис. 2).

Після цього, в рядку "Zeta.Re" необхідно вказати дійсну частину для кожного початкового наближення, а саме значення точок $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ (у рядку "Zeta.Im" уявна частина заповнюється автоматично). Далі здійснюється запуск програми на виконання (за допомогою кнопки \geq), після чого в таблиці автоматично висвітлюються значення: кутів повороту сегментів каналу α_j ("Кути"), висоти каналу H ("H"), величини M , пов'язаної з висотою каналу і його орієнтацією щодо осі x ("M"), кута α_e , який відповідає нескінченно віддаленій точці каналу ("AlphaE"), кута відкриття течії у канал θ ("Theta").

В останньому рядку таблиці програмного вікна виводиться значення точності наближення кутових точок. Кількість ітерацій висвітлюється в рядку заголовка форми. Зазначимо, що при проведенні числових експериментів для різних випадків отримувана нами кількість ітерацій не перевищувала 10.

Після досягнення заданої точності будується ортогональна сітка (Рис. 3). В програмному комплексі закладена можливість виведення обчислювальних результатів після кожного ітераційного кроку (за допомогою кнопки \geq).

В останньому рядку таблиці програмного вікна виводиться значення точності наближення кутових точок. Кількість ітерацій висвітлюється в рядку заголовка форми. Зазначимо, що при проведенні числових експериментів для різних випадків отримувана нами кількість ітерацій не перевищувала 10.

Після досягнення заданої точності будується ортогональна сітка (Рис. 4). В програмному комплексі закладена можливість виведення обчислювальних результатів після кожного ітераційного кроку (за допомогою кнопки \geq).

Врахування форми поперечних перерізів русла здійснюємо за відомою наближеною методикою М. А. Великанова. Його ідея полягає у тому, що границі рівно витратних струмин в плані русла можуть бути побудовані на основі традиційного рівняння Шезі (12)

$$v = C\sqrt{RI}; Q = v\omega, R = \omega / \chi, \quad (12)$$

якщо його записувати для кожної вертикалі в межах розглядуваної ділянки з врахуванням осереднених по вертикалях швидкостей потоку $v(b)$, де R та Q – швидкості та витрати потоку при заданій його глибині в умовах рівномірного руху у призматичному руслі з постійним ухилом дна I .

Вказаний розрахунок проводиться на основі

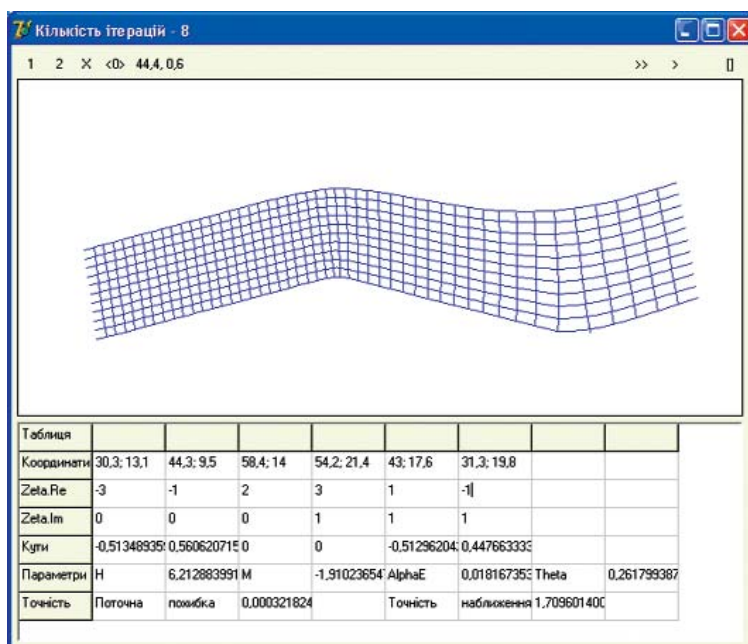


Рис. 3. Побудована гідродинамічна сітка



наступних формул

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{h db}{d\chi}, \quad - \text{гідралічний радіус живого}$$

перерізу потоку, ω – площа зазначеного перерізу, C – коефіцієнт Шезі, $C = 1/n (R^y)$; показник у останній формулі знаходиться за формулою М.М. Павловського

$$y = -0,13 + 2,5 \cdot n^{0,5} - 0,75 \cdot (n^{0,5} - 0,1) \cdot R^{0,5}, \quad (13)$$

де n – коефіцієнт шорсткості, $\chi = \int_0^B \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{db}\right)^2} db$

– змочений периметр русла у даному його перерізі, b та B – поперечна координата розглядуваної вертикалі у руслі та ширина русла по верху,

$\left|\frac{dh}{db}\right|$ – поперечний нахил дна русла на даній вертикалі, (Рис. 2.)

Границі рівно витратних струмин згідно зазначеної методики визначаються на основі чисельного розв'язання наступного рівняння для кожного i

$$Q_i = \int_0^{b_i} q db, \quad q = \frac{1}{n} R_i^y h_i \sqrt{R_i \cdot I}, \quad (14)$$

де b_i та Q_i – координати границь рівно-витратних струмин та відповідні їм витрати; i – номери струмин, ($i = 1, N$), N – кількість струмин, q – питома витрата на вертикалі, h_i – глибина на вертикалі,

$R_i = \frac{h_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh_i}{db}\right)^2}}$ – гідралічний радіус на

вертикалі.

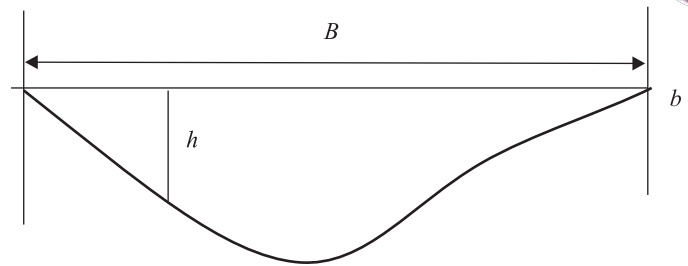


Рис. 4. Схема живого перерізу русла

Після отримання границь рівно-витратних струмин проводиться перерахунок швидкостей отриманих з гідродинамічної сітки і на їх основі проводиться розрахунок деформацій русла за методикою [1–3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Барановський С.В. Про один підхід до моделювання тривимірного процесу деформації дна під впливом турбулентного потоку // Актуальні проблеми водного господарства. – Рівне: УДАВГ, 1997. – Том 1. – С. 7–10.
2. Шинкарук Л.А., Щодро О.Є., Барановський С.В. До розрахунку місцевого розмиву біля регуляційних струмененаправляючих дамб // Матеріали ювілейної конференції УДАВГ, присвяченій 75-річчю академії. – Рівне: УДАВГ, 1997. – С. 80–82.
3. Бомба А.Я., Барановський С.В., Щодро О.Є. Покрокова асимптотика розв'язку сингулярно збурених задач конвективної дифузії в скінченних областях з вільними межами та проблеми моделювання планових деформацій дна русла // Вісник УДАВГ, – Рівне: – 1998. – № 1. – С. 21–27.

© Щодро О.Є., Барановський С.В., Наконечний І.М., 2010

