

Академик НАН Украины **В. П. Шевченко, Е. В. Алтухов,**  
**М. В. Фоменко**

## Упругие колебания трехслойных пластин в случае плоского торца

*Розглянуто тривимірну задачу про усталені коливання тришарових ізотропних пластин, на плоских гранях яких виконуються умови плоского торця. На межі поділу шарів виконуються умови ідеального контакту. Одержано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях і досліджено дисперсійні рівняння. Наведено діаграми спектральних кривих, графіки зміни фазових і групових швидкостей. Знайдено асимптотичні значення фазових швидкостей для великих та малих частот.*

В работах [1–5] проведен анализ основных методов и полученных на их основе решений частных задач теории упругости для однородных и слоистых пластин. В частности, отмечается, что актуальным является развитие известных и создание новых аналитических методов решения трехмерных краевых задач теории упругости для слоистых тел. Переход от однородных упругих волноводов к неоднородным по толщине пластинам связан с резким возрастанием трудностей при исследовании по трехмерной теории упругости. В задачах равновесия и колебания трехслойных пластин важную роль сыграли однородные решения [5–7], предложенные в работе [8]. Колебания трехслойных пластин с использованием однородных решений рассматривались в [9–11].

В данной работе получены и исследованы однородные решения уравнений упругих колебаний трехслойной пластины при скользящей заделке торцов и идеальном контакте слоев.

**Постановка задачи.** Рассмотрим трехслойную пластину толщиной  $2h$  симметричного строения относительно ее срединной плоскости. Внешние одинаковые и внутренний слой пластины находятся в условиях идеального контакта и являются изотропными. На внешних гранях пластины выполняются условия плоского торца, а колебания вызваны внешними усилиями, приложенными к боковой поверхности и гармонически изменяющимися во времени.

Построение однородных решений рассматриваемой задачи сводится к интегрированию известной системы уравнений движения

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{j(m)} + \left( D^2 + \frac{\Omega_m^2}{\lambda^2} \right) u_{j(m)} + \nu_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + \left( D^2 + \frac{\Omega_m^2}{\lambda^2} \right) u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом краевых условий

$$\begin{aligned} u_{3(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, \quad \sigma_{j3(1)}(x_1, x_2, 1) = 0 \quad (j = 1, 2), \\ u_{i(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{i(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) \quad (i = \overline{1, 3}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Omega_m = \omega h / c_{Sm}$ ,  $c_{Sm} = \sqrt{\tilde{G}_m / \rho_m}$ . Другие обозначения здесь и ниже соответствуют принятым в работах [9–11].

**Однородные решения задачи.** Значения векторов перемещений представим суммой вихревого и потенциального состояний [7]

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)B}(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = \overline{1,3}; m = 1, 2).$$

Вихревое решение имеет вид

$$u_{1(m)B}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2),$$

$$u_{2(m)B}(x_1, x_2, x_3) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), \quad u_{3(m)B}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Здесь

$$p_{(1)k}^+(x_3) = \cos l_{(2)k}^+ \lambda_2 \cos l_{(1)k}^+ (\lambda_2 - x_3) + \frac{1}{G l_{(1)k}^+} \sin l_{(2)k}^+ \lambda_2 \sin l_{(1)k}^+ (\lambda_2 - x_3),$$

$$p_{(1)k}^-(x_3) = \frac{1}{l_{(2)k}^-} \sin l_{(2)k}^- \lambda_2 \cos l_{(1)k}^- (\lambda_2 - x_3) - \frac{1}{G l_{(1)k}^-} \cos l_{(2)k}^- \lambda_2 \sin l_{(1)k}^- (\lambda_2 - x_3),$$

$$p_{(2)k}^+(x_3) = \cos l_{(2)k}^+ x_3, \quad p_{(2)k}^-(x_3) = \frac{1}{l_{(2)k}^-} \sin l_{(2)k}^- x_3, \quad l_{(m)}^2 = \Omega_m^2 + \delta^2,$$

$$D^2 B_k(x_1, x_2) = \left( \frac{\delta_k}{\lambda} \right)^2 B_k(x_1, x_2).$$

Счетные множества собственных значений  $\delta_k$  соответственно для симметричных и кососимметричных колебаний определяются из дисперсионных уравнений

$$l_{(2)k} \cos l_{(1)k} \lambda_1 \sin l_{(2)k} \lambda_2 + G l_{(1)k} \sin l_{(1)k} \lambda_1 \cos l_{(2)k} \lambda_2 = 0,$$

$$l_{(2)k} \cos l_{(1)k} \lambda_1 \cos l_{(2)k} \lambda_2 - G l_{(1)k} \sin l_{(1)k} \lambda_1 \sin l_{(2)k} \lambda_2 = 0.$$

Потенциальное решение введем с помощью соотношений

$$u_{j(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) = n_{(m)}(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2),$$

$$u_{3(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) = q_{(m)}(x_3) C(x_1, x_2). \quad (3)$$

Из выражений (1)–(3) следует, что функция  $C(x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению

$$D^2 C(x_1, x_2) - \left( \frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а для неизвестных функций  $n_{(m)}(x_3)$ ,  $q_{(m)}(x_3)$  получаем задачу на собственные значения

$$n_{(m)}'' + [\Omega_m^2 + \gamma^2(1 + \nu_{0(m)})] n_{(m)} + \lambda \nu_{0(m)} q_{(m)}' = 0,$$

$$q_{(m)}'' + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + \nu_{0(m)}} q_{(m)} + \frac{\gamma^2 \nu_{0(m)}}{\lambda(1 + \nu_{0(m)})} n_{(m)}' = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
q_{(1)}(1) + \lambda^{-1}n'_{(1)}(1) &= 0, & q_{(1)}(1) &= 0, & n_{(1)}(\lambda_2) &= n_{(2)}(\lambda_2), \\
q_{(1)}(\lambda_2) &= q_{(2)}(\lambda_2), & G[q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1}n'_{(1)}(\lambda_2)] &= q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1}n'_{(2)}(\lambda_2), \\
G[\lambda^{-1}\gamma^2(\nu_{0(1)-1})n_{(1)}(\lambda_2) + (\nu_{0(1)} + 1)q'_{(1)}(\lambda_2)] &= \\
&= \lambda^{-1}\gamma^2(\nu_{0(2)} - 1)n_{(2)}(\lambda_2) + (\nu_{0(2)+1})q'_{(2)}(\lambda_2),
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $\gamma$  — параметр разделения переменных.

Общим решением системы (4) для симметричных и кососимметричных колебаний являются функции

$$\begin{aligned}
n_1^\pm(x_3) &= H_1^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + H_2^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + H_3^\pm \cos \gamma_{2(1)}^\pm x_3 + H_4^\pm \sin \gamma_{2(1)}^\pm x_3, \\
q_1^\pm(x_3) &= Q_1^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + Q_2^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + Q_3^\pm \sin \gamma_{2(1)}^\pm x_3 + Q_4^\pm \cos \gamma_{2(1)}^\pm x_3, \\
n_2^+(x_3) &= H_5^+ \cos \gamma_{1(2)}^+ x_3 + H_6^+ \cos \gamma_{2(2)}^+ x_3, \\
q_2^+(x_3) &= Q_5^+ \sin \gamma_{1(2)}^+ x_3 + Q_6^+ \sin \gamma_{2(2)}^+ x_3, \\
n_2^-(x_3) &= H_5^- \sin \gamma_{1(2)}^- x_3 + H_6^- \sin \gamma_{2(2)}^- x_3, \\
q_2^-(x_3) &= Q_5^- \cos \gamma_{1(2)}^- x_3 + Q_6^- \cos \gamma_{2(2)}^- x_3.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\gamma_{1(m)}^2 &= \frac{\Omega_m^2}{(1 + \nu_{0(m)})} + \gamma^2, & \gamma_{2(m)}^2 &= \Omega_m^2 + \gamma^2, & Q_i^\pm &= \lambda^{-1}a_i^\pm H_i^\pm \quad (\overline{1,6}), \\
a_1^\pm &= -\gamma_{1(1)}^\pm, & a_2^\pm &= \gamma_{1(1)}^\pm, & a_3^\pm &= -\frac{\gamma^2}{\gamma_{2(1)}^\pm}, \\
a_4^\pm &= \frac{\gamma^2}{\gamma_{2(1)}^\pm}, & a_5^\pm &= \mp \gamma_{1(2)}^\pm, & a_6^\pm &= \mp \frac{\gamma^2}{\gamma_{2(2)}^\pm}.
\end{aligned}$$

Из спектральной задачи (4), (5) получаем уравнения для нахождения собственных значений  $\gamma$

$$\begin{aligned}
F^+(\gamma, \Omega) &= G\Omega_1^2\Omega_2^2(\gamma_{2(1)}\gamma_{1(2)}C_{11}C_{21}S_{12}S_{22} + \gamma_{1(1)}\gamma_{2(2)}S_{11}S_{21}C_{12}C_{22}) + \\
&+ G^2(\zeta_1^2C_{11}S_{21} - \tau_1S_{11}C_{21})(t_2S_{12}C_{22} - \gamma^2C_{12}S_{22}) + \\
&+ 2G\gamma^2(\zeta_1C_{11}S_{21} - 2t_1S_{11}C_{21})(\zeta_2C_{12}S_{22} - 2t_2S_{12}C_{22}) + \\
&+ (t_1S_{11}C_{21} - \gamma^2C_{11}S_{21})(\zeta_2^2C_{12}S_{22} - \tau_2S_{12}C_{22}) = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
F^-(\gamma, \Omega) &= -G\Omega_1^2\Omega_2^2(\gamma_{2(1)}\gamma_{1(2)}C_{11}C_{21}C_{12}C_{22} + \gamma_{1(1)}\gamma_{2(2)}S_{11}S_{21}S_{12}S_{22}) + \\
&+ G^2(\zeta_1^2C_{11}S_{21} - \tau_1S_{11}C_{21})(t_2C_{12}S_{22} - \gamma^2S_{12}C_{22}) + \\
&+ 2G\gamma^2(\zeta_1C_{11}S_{21} - 2t_1S_{11}C_{21})(\zeta_2S_{12}C_{22} - 2t_2C_{12}S_{22}) + \\
&+ (t_1S_{11}C_{21} - \gamma^2C_{11}S_{21})(\zeta_2^2S_{12}C_{22} - \tau_2C_{12}S_{22}) = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\tau_m = 4\gamma^2\gamma_{1(m)}\gamma_{2(m)}, \quad t_m = \gamma_{1(m)}\gamma_{2(m)}, \quad \zeta_m = \gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2,$$

$$S_{jm} = \sin \gamma_{j(m)}\lambda_m, \quad C_{jm} = \cos \gamma_{j(m)}\lambda_m \quad (j, m = 1, 2).$$

Важной характеристикой колебаний являются критические частоты [4]. Для их определения полагаем в уравнениях (6), (7)  $\gamma = 0$  и получаем следующие трансцендентные уравнения:

$$F^+(0, \Omega) = (G\Omega_1 s_{21} c_{22} + \Omega_2 c_{21} s_{22})(Gk_2 \Omega_1 c_{11} s_{12} + k_1 \Omega_2 s_{11} c_{12}) = 0, \quad (8)$$

$$F^-(0, \Omega) = (G\Omega_1 s_{21} s_{22} - \Omega_2 c_{21} c_{22})(Gk_2 \Omega_1 c_{11} c_{12} - k_1 \Omega_2 s_{11} s_{12}) = 0, \quad (9)$$

где

$$s_{1m} = \sin(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad s_{2m} = \sin(\Omega_m \lambda_m),$$

$$c_{1m} = \cos(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad c_{2m} = \cos(\Omega_m \lambda_m), \quad k_m = \sqrt{\frac{1 - 2\nu_m}{2 - 2\nu_m}}.$$

Каждое из уравнений (8), (9) определяет по две независимые серии критических частот. Причем частоты первой серии не зависят от значений коэффициентов Пуассона  $\nu_1, \nu_2$ , в отличие от частот второго семейства.

**Асимптотический анализ уравнений и предельные соотношения.** Для определения корней дисперсионных уравнений (6), (7) важным является поиск точек их пересечения с плоскостью  $\Omega = 0$ . Предельный переход к задаче статики осуществляется с помощью разложений функций  $F^\pm(\gamma, \Omega)$ , порождающих дисперсионные уравнения, в ряд Тейлора в окрестности точки  $\Omega = 0$ . Если  $\Omega \rightarrow 0$ , то уравнения (6), (7) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} F^+(\gamma, 0) &\equiv G^2(\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)((3 - 4\nu_2) \sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) + \\ &+ 2G(4(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)(1 - \cos 2\gamma\lambda_1 \cos 2\gamma\lambda_2) + \\ &+ ((1 - 2\nu_1) \sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1)((1 - 2\nu_2) \sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2)) + \\ &+ ((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^-(\gamma, 0) &\equiv G^2(\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)((3 - 4\nu_2) \sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) + \\ &+ 2G(-4(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)(1 + \cos 2\gamma\lambda_1 \cos 2\gamma\lambda_2) + \\ &+ ((1 - 2\nu_1) \sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1)((1 - 2\nu_2) \sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2)) + \\ &+ ((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) = 0. \end{aligned}$$

Для симметричных колебаний в особом положении оказывается первая ветвь, проходящая через начало координат  $\gamma = 0, \Omega = 0$ . Соответствующая мода оказывается распространяющейся при любой частоте. Для анализа скоростей этой моды при малых частотах в окрестности начала координат можно существенно упростить дисперсионное уравнение (6) за счет малости величин  $\gamma, \Omega$ . При этом для безразмерной фазовой скорости  $v_p = c_p/c_{S2}$  имеем

$$v_p(0) = \sqrt{\frac{4\lambda_1\lambda_2(G-1)(Gk_2^2(1-k_1^2) - k_1^2(1-k_2^2)) + G}{(\eta\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 k_1^2 + G\lambda_2 k_2^2)}}.$$

Из данной формулы следует, что в низкочастотном диапазоне симметричная волна является бездисперсной.

При  $\gamma \rightarrow \infty$  в пределе из (6), (7) для первой распространяющейся моды получаем алгебраическое уравнение

$$G((s_1^2 - 1)(s_2^2 - 1)(s_1 r_2 + r_1 s_2) + 2(1 + s_1^2 - 2r_1 s_1)(1 + s_2^2 - 2r_2 s_2)) + G^2((1 + s_1^2)^2 - 4r_1 s_1)(r_2 s_2 - 1) + (r_1 s_1 - 1)((1 + s_2^2)^2 - 4r_2 s_2) = 0, \quad (10)$$

где  $r_m = \sqrt{1 - c^2/c_{Pm}^2}$ ,  $s_m = \sqrt{1 - c^2/c_{Sm}^2}$ ,  $m = 1, 2$ . Уравнение (10) приводится к известному [4] для нахождения скорости  $c_{St}$  волны Стоунли

$$\left(\frac{c^2}{c_{S2}^2} - G\frac{c^2}{c_{S1}^2} - 2(1 - G)\right)^2 - G\frac{c^4}{c_{S1}^2 c_{S2}^2}(r_2 s_1 + r_1 s_2) - r_1 s_1 \left(\frac{c^2}{c_{S2}^2} - 2(1 - G)\right)^2 - r_2 s_2 \left(G\frac{c^2}{c_{S1}^2} + 2(1 - G)\right)^2 + 4(1 - G)^2 r_1 r_2 s_1 s_2 = 0.$$

Таким образом, для обоих случаев симметрии фазовая скорость первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом высокочастотном пределе значение скорости поверхностной волны Стоунли. Для остальных ветвей при  $\gamma \rightarrow \infty$  получаем

$$c = \min\{c_{S1}, c_{S2}\}.$$

Если  $G \rightarrow 0$  (внешний слой — мягкий), то из уравнений (6) и (7) следует

$$(\gamma_{1(1)}\gamma_{2(1)} \sin \gamma_{1(1)}\lambda_1 \cos \gamma_{2(1)}\lambda_1 - \gamma^2 \cos \gamma_{1(1)}\lambda_1 \sin \gamma_{2(1)}\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) = 0,$$

$$(\gamma_{1(1)}\gamma_{2(1)} \sin \gamma_{1(1)}\lambda_1 \cos \gamma_{2(1)}\lambda_1 - \gamma^2 \cos \gamma_{1(1)}\lambda_1 \sin \gamma_{2(1)}\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) = 0.$$

В результате каждый дисперсионный спектр состоит из двух. Один соответствует колебаниям внешних слоев, а другой — равновесию внутреннего слоя.

При  $G \rightarrow \infty$  (внутренний слой — мягкий) из уравнений (6) и (7) имеем

$$(\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)(\gamma_{1(2)}\gamma_{2(2)} \sin \gamma_{1(2)}\lambda_2 \cos \gamma_{2(2)}\lambda_2 - \gamma^2 \cos \gamma_{1(2)}\lambda_2 \sin \gamma_{2(2)}\lambda_2) = 0,$$

$$(\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)(\gamma_{1(2)}\gamma_{2(2)} \cos \gamma_{1(2)}\lambda_2 \sin \gamma_{2(2)}\lambda_2 - \gamma^2 \sin \gamma_{1(2)}\lambda_2 \cos \gamma_{2(2)}\lambda_2) = 0.$$

В случае  $\lambda_m = 0$  дисперсионные уравнения (6) и (7) сводятся к известным [6]

$$\sin \gamma_{1(m)} \sin \gamma_{2(m)} = 0, \quad \cos \gamma_{1(m)} \cos \gamma_{2(m)} = 0.$$

В случае однослойной пластины  $G = 1$ ,  $\eta = 1$ ,  $\nu_1 = \nu_2$  ( $\gamma_{1(1)} = \gamma_{1(2)} = \gamma_1$ ,  $\gamma_{2(1)} = \gamma_{2(2)} = \gamma_2$ ) получаем [6]

$$\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0, \quad \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0.$$

**Анализ результатов численных исследований.** Пусть внешние слои пластины изготовлены из алюминия и характеризуются параметрами среды  $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu_1 = 0,35$ ,  $c_{S1} = 3110$  м/с, а внутренний — из вольфрама:  $\rho_2 = 18,7 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu_2 = 0,29$ ,  $c_{S2} = 2860$  м/с. Расчеты производились для

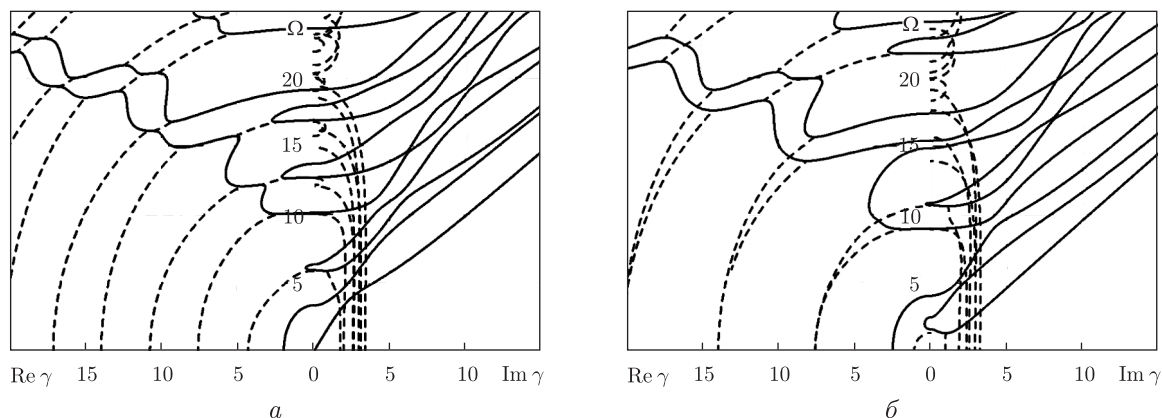


Рис. 1. Полный дисперсионный спектр симметричных (а) и косимметричных (б) продольных колебаний в трехслойной пластине

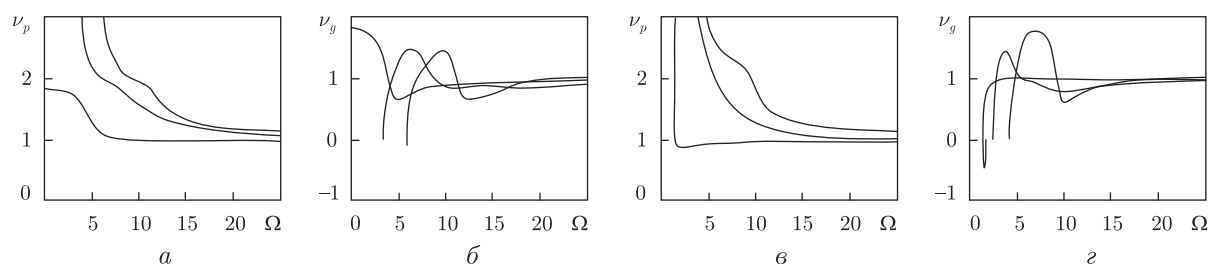


Рис. 2. Зависимость безразмерных фазовых и групповых скоростей продольных мод от безразмерной частоты  $\Omega$

варианта  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ . При этом входящие в уравнения (6), (7) частоты  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$  связаны соотношениями

$$\Omega_1 = \Omega \frac{c_{S2}}{c_{S1}}, \quad \Omega_2 = \Omega.$$

Трансцендентные уравнения (6) и (7) определяют счетное множество спектральных кривых — зависимостей частоты  $\Omega$  от параметра  $\gamma$ . На рис. 1 представлены дисперсионные кривые продольных мод соответственно для симметричных и косимметричных колебаний. На диаграммах сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые — проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ( $\text{Re } \gamma, \Omega$ ) и мнимую ( $\text{Im } \gamma, \Omega$ ) плоскости. Дисперсионные уравнения (6), (7) при фиксированной частоте имеют конечное число действительных и чисто мнимых корней и счетное множество комплексных корней.

На рис. 2 приведены графики изменения безразмерных фазовых  $v_p = c_p/c_{S2}$  (рис. 2, а, в) и групповых  $v_g = c_g/c_{S2}$  (рис. 2, б, г) скоростей первых трех распространяющихся мод. Рис. 2, а, б соответствуют симметричным колебаниям, а рис. 2, в, г — косимметричным.

Вблизи критических частот фазовая скорость  $c_p \rightarrow \infty$ , а групповая  $c_g = 0$ . В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными, и значения групповой скорости моды мало отличается от значений фазовой скорости.

Анализ дисперсионных кривых, графиков изменения фазовых и групповых скоростей показывает, что по сравнению с однородной пластиной с такими же граничными усло-

виями на торцах [6] происходят количественные и качественные изменения в характере колебаний. В частности, в трехслойной пластине в области низких частот для симметричного случая появляются одновременно действительная и мнимая моды, а для кососимметричного — только действительная. Первая симметричная мнимая мода оказывается распространяющейся при любой частоте и в низкочастотном пределе является бездисперсной. При  $\gamma = 0$  находим  $v_p^+(0) = v_g^+(0) = 1,843$ . Для остальных ветвей в обоих случаях симметрии групповая скорость на критических частотах равна нулю. Следует отметить, что в однослойной пластине дисперсионный спектр не содержит комплексных мод.

Одной из особенностей дисперсионных соотношений (6), (7) является то, что кривизна мнимых ветвей для определенных критических частот становится отрицательной — дисперсионная ветвь опускается ниже критической частоты, а вычисление групповой скорости  $v_g$  приводит к возникновению отрицательных участков на графике ее зависимости от  $\Omega$ . Комплексные участки дисперсионных ветвей пересекают плоскость  $\Omega = 0$  под прямым углом.

Уравнение (10) имеет вещественный корень, что указывает на существование поверхностной волны Стоунли вблизи поверхности контакта слоев. Значение скорости  $v_{St}$  волны Стоунли, отнесенной к  $c_{S2}$ , равно 0,968. Для симметричных колебаний величина фазовой скорости  $v_p$  для первой моды в коротковолновом пределе остается больше асимптотического значения  $v_{St}$ , а для кососимметричных — меньше. Остальные кривые приближаются к асимптоте  $v_p = 1$  сверху.

1. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика. — 2002. — **38**, № 2. — С. 22–56.
2. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review // Mech. of Composite Mater. — 1998. — **34**, No 3. — P. 243–252.
3. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mechan. Rev. — 2003. — **56**, No 3. — P. 287–308.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. — Киев: Наук. думка, 1981. — 284 с.
5. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. — Ростов-на-Дону: ООО ЦВВР, 2006. — 257 с.
6. Алтухов Е. В., Панченко Ю. В., Богатчук А. Ю. Колебания изотропных пластин с учетом краевых умов типу плоского торца або діафрагми // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2000. — № 1. — С. 41–45.
7. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. — 1967. — **31**, № 2. — С. 230–241.
8. Лурье А. И. К теории толстых плит // Там же. — 1942. — **6**, № 2–3. — С. 151–168.
9. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2009. — № 1. — С. 117–124.
10. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями // Теорет. и прикл. механика. — 2009. — Вып. 45. — С. 146–153.
11. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2009. — **18**. — С. 3–10.

Academician of the NAS of Ukraine **V. P. Shevchenko, E. V. Altukhov,**  
**M. V. Fomenko**

### **Elastic vibrations of three-layer plates with a flat end**

*The three-dimensional problem of steady-state vibrations of three-layer isotropic plates under conditions of a flat end is considered. Conditions of ideal contact are fulfilled on the interface of layers. The homogeneous solutions of the system of equations of motion in displacements are got, and the dispersive equations are researched. Diagrams of spectral curves and curves of phase and group velocities are presented. Asymptotic values for phase velocities for high and low frequencies are determined.*