УДК 517.98

М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн

Порядковая сходимость в эргодических теоремах в перестановочно инвариантных пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

Наведено необхідні і достатні умови порядкової збіжності чезаровських середніх для абсолютних стисків у перестановно інваріантних просторах. Розглянуто випадок простору з нескінченною мірою. Розгляд порядкової збіжності приводить як до домінантної, так і до індивідуальної ергодичної теореми. Класичні домінантна та індивідуальна ергодичні теореми в просторах $\mathbf{L}_p$ і класах Зигмунда $\mathbf{L}\log^r\mathbf{L}$ одержано як окремі випадки.

Пусть $(\mathbf{\Omega},\mu)$ — пространство с бесконечной σ-конечной неатомической мерой, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega},\mu)$ — пространство всех μ-измеримых почти всюду конечных функций f на $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbf{\Omega},\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

В случае, когда $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ и $\mu = \mathbf{m}$ — мера Лебега на $[0,+\infty)$, будем писать $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+,\mathbf{m})$.

Линейный оператор $T\colon \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ называется *абсолютным сжатием* или $(\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_\infty)$-*сжатием*, если T является сжатием как в $\mathbf{L}_1$, так и в $\mathbf{L}_\infty$. Обозначим через $\mathcal{PAC}$ множество всех положительных абсолютных сжатий.

Для любых $T\in\mathcal{PAC}$ и $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ рассмотрим чезаровские средние $A_{n,T}f = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}T^kf$ и соответствующую доминантную функцию $B_Tf = \sup\limits_{n\geqslant1}A_{n,T}|f|$.

Банахово пространство $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ измеримых функций из $\mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega},\mu)$ называется *перестановочно инвариантным (п. и.) или симметричным*, если из $f\in\mathbf{L}_0$, $g\in\mathbf{E}$ и $f^*\leqslant g^*$ следует, что $f\in\mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}}\leqslant\|g\|_{\mathbf{E}}$. Здесь f^* — невозрастающая, непрерывная справа перестановка функции $|f|$,

$$f^*(x) := \inf\{y\in[0,+\infty)\colon \mathbf{n}_f(y)\leqslant x\}, \qquad x\in[0,\infty),$$

где $\mathbf{n}_f$ — функция распределения $|f|$: $\mathbf{n}_f(y) = \mu\{w\in\mathbf{\Omega}\colon |f(w)|>y\}$.

Напомним, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbf{E}$ называется *порядково сходящейся* к $f\in\mathbf{E}$ ($f_n\xrightarrow{(o)}f$), если существуют такие $0\leqslant g_n\in\mathbf{E}$, что $|f_n-f|\leqslant g_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$.

Известно, что:

1) $\mathbf{E}$ является порядково полной подрешеткой порядково полной решетки $\mathbf{L}_0$;

2) последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ порядково сходится в $\mathbf{E}$ ($f_n\xrightarrow{(o)}f\in\mathbf{E}$) тогда и только тогда, когда $\{f_n, n\geqslant1\}$ (o)-ограничено в $\mathbf{E}$ и последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (o)-сходится в $\mathbf{L}_0$. Последнее условие означает, что $f_n\to f$ почти всюду на $(\mathbf{\Omega},\mu)$.

Далее будут рассмотрены две взаимосвязанные задачи.

Проблема 1. Описать подмножество

$$\mathbf{E}^T := \{f\in\mathbf{E}\colon \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty \text{ порядково сходится в } \mathbf{E}\},$$

где $\mathbf{E}$ — п. и. пространство и $T\in\mathcal{PAC}$.

Проблема 2. Описать подкласс всех п. и. банаховых пространств таких, что $\mathbf{E}^T = \mathbf{E}$ для всех $T \in \mathcal{PAC}$, т. е. таких, что последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T}f\}_{n=1}^{\infty}$ сходится порядково в $\mathbf{E}$ для всех $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$.

Последовательность $\{A_{n,T}f\}_{n\geqslant 1}$ (o)-сходится в $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $B_T f = \sup\limits_{n\geqslant 1} A_{n,T}|f|$ принадлежит $\mathbf{E}$, и $\{A_{n,T}f\}_{n\geqslant 1}$ сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$. Это означает, что приведенная постановка задачи включает как доминантную эргодическую теорему, так и индивидуальную эргодическую теорему в случае классических пространств $\mathbf{L}_p$, $1 \leqslant p < +\infty$ и классов Зигмунда $\mathcal{Z}_r = \mathbf{L}\log^r \mathbf{L}$ (см. [1, 2]).

В случае, когда $(\mathbf{\Omega}, \mu) = (\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, п. и. пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ будем называть *стандартным.* Для п. и. пространства $\mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ на произвольном пространстве с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ существует единственное стандартное п. и. пространство $\mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ на $(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ (называемое стандартной реализацией $\mathbf{E}$) такое, что $f \in \mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ тогда и только тогда, когда $f^* \in \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$.

Мы будем использовать максимальную функцию Харди–Литлвуда, которая определяется для $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)$ следующим образом:

$$f^{**}(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f^*(s)\,ds, \qquad x \in (0, +\infty).$$

Обозначим

$$\mathbf{E_H} = \mathbf{E_H}(\mathbf{\Omega}, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)\colon f^{**} \in \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})\}$$

и положим $\|f\|_{\mathbf{E_H}} = \|f^{**}\|_{\mathbf{E}}$. Тогда пространство $(\mathbf{E_H}, \|\cdot\|_{\mathbf{E_H}})$ — п. и. и $\mathbf{E_H}$ — замкнутое подпространство в $\mathbf{E}$.

В случае, когда $(\mathbf{\Omega}, \mu) = (\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, пространство $\mathbf{E_H}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ является наибольшим п. и. пространством, для которого оператор Харди

$$(Hf)(x) := \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(u)\,du, \qquad x \in (0, \infty)$$

является положительным сжатием из $\mathbf{E_H}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ в $\mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ (см. [3]).

Следует отметим, что $T(\mathbf{E_H}) \subseteq \mathbf{E_H}$ для любого п. и. пространства $\mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$ и сужение $T|_{\mathbf{E_H}}\colon \mathbf{E_H} \to \mathbf{E_H}$ является сжатием. Действительно, по теореме Калдерона–Митягина $(Tf)^{**} \leqslant f^{**}$ для всех $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ (см., например, [4, 5] или [3, гл. 2, § 3.4]). Отсюда следует

$$\|Tf\|_{\mathbf{E_H}} = \|(Tf)^{**}\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f^{**}\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E_H}}.$$

Таким образом, каждое п. и. пространство вида $\mathbf{E_H}$ является интерполяционным относительно банаховой пары $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$. С другой стороны, п. и. пространство не обязательно является интерполяционным. Существуют п. и. пространства $\mathbf{E}$ такие, что $T\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{E}$ для некоторого $T \in \mathcal{PAC}$ (см. [3, § 2.5]). Поэтому Tf и $A_{n,T}f$ могут не принадлежать $\mathbf{E}$ при некоторых $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$. С другой стороны, для любого $f \in \mathbf{E_H}$ и $T \in \mathcal{PAC}$, Tf и $A_{n,T}f$ принадлежат $\mathbf{E_H}$.

Пусть п. и. пространство $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{R}_0 = \Big\{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty\colon f^*(+\infty)\colon = \lim_{x\to+\infty} f^*(x) = 0\Big\}.$$

Пространство $\mathcal{R}_0$ является ядром Орлича пространства $(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega},\mu)$, рассматриваемого как пространство Орлича (см. [6]).

Следующая теорема является решением проблемы 1.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}$ *— п. и. пространство. Тогда для всех* $f\in\mathbf{E}_\mathbf{H}\bigcap\mathcal{R}_0$ *и* $T\in\mathcal{PAC}$ *последовательность средних* $A_{n,T}f$ *порядково сходится в* $\mathbf{E}$.

Обратно, пусть $\mathbf{E}$ *— такое п. и. пространство, что* $\mathbf{E}\neq\mathbf{E}_\mathbf{H}\bigcap\mathcal{R}_0$. *Тогда существуют* $f\in\mathbf{E}$ *и* $T\in\mathcal{PAC}$ *такие, что последовательность* $A_{n,T}f$ *не является порядково сходящейся в* $\mathbf{E}$.

Из условия $f\in\mathbf{E}_\mathbf{H}$ следует, что $B_Tf\in\mathbf{E}$, т. е. для всех $f\in\mathbf{E}_\mathbf{H}$ справедлива доминантная эргодическая теорема.

Из условия $f\in\mathcal{R}_0$ следует, что последовательность $A_{n,T}f$ сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega},\mu)$, т. е. на $\mathcal{R}_0$ имеет место индивидуальная эргодическая теорема.

Вторую часть теоремы 1 можно уточнить следующим образом. Пусть θ — обратимое, сохраняющее меру преобразование пространства $(\mathbf{\Omega},\mu)$ и $T=T_\theta\in\mathcal{PAC}$ оператор вида: $T_\theta f=f\circ\theta$. Тогда $T_\theta\in\mathcal{PAC}$ и $T_\theta\mathbf{E}=\mathbf{E}$ для каждого п. и. пространства $\mathbf{E}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}$ *— п. и. пространство и* $T=T_\theta\in\mathcal{PAC}$, *где* θ *— эргодическое, консервативное, сохраняющее меру преобразование* $(\mathbf{\Omega},\mu)$. *Тогда:*

1) если $f\in\mathbf{E}$ *и* $B_Tf\in\mathbf{E}$, *то* $f\in\mathbf{E}_H$;

2) если $\mathbf{E}\nsubseteq\mathcal{R}_0$, *то существует такая функция* $f\in\mathbf{E}$, *что последовательность* $A_{n,T}f$ *не сходится почти всюду на* $(\mathbf{\Omega},\mu)$ *и потому не является* (o)*-сходящейся в* $\mathbf{E}$.

Будем говорить, что в пространстве $\mathbf{E}$ выполнена *порядковая эргодическая теорема* ($\mathbf{E}\in$ $\in\mathcal{OET}$), если последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T}f\}_{n\geqslant1}$ (o)-сходится в $\mathbf{E}$ для всех $f\in\mathbf{E}$ и $T\in\mathcal{PAC}$.

Из теорем 1 и 2 следует решение проблемы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{E}$ *— п. и. пространство. Тогда*

$$\mathbf{E}\in\mathcal{OET}\Longleftrightarrow\mathbf{E}=\mathbf{E}_\mathbf{H}\qquad\text{и}\qquad\mathbf{E}\subseteq\mathcal{R}_0.$$

Отметим, что поскольку $\mu(\mathbf{\Omega})=+\infty$, то

$$\mathbf{E}\subseteq\mathcal{R}_0\Longleftrightarrow\mathbf{1}\notin\mathbf{E}\Longleftrightarrow\mathbf{E}\nsupseteq\mathbf{L}_\infty.$$

В случае, когда $\mu(\mathbf{\Omega})<\infty$, $\mathbf{E}\in\mathcal{OET}\Longleftrightarrow\mathbf{E}=\mathbf{E}_\mathbf{H}$, т. е. $\{A_{n,T}f\}$ (o)-сходится в $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда она (o)-ограничена в $\mathbf{E}$ [7].

Пусть для любой функции $f\in\mathbf{L}_0=\mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+,\mathbf{m})$:

$$D_tf(x):=f(x/t),\qquad 0<x,t<\infty.$$

Тогда $\{D_t,0<t<\infty\}$ — группа ограниченных линейных операторов $D_t\colon\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ на стандартном п. и. пространстве $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{R}_+,\mathbf{m})$, соответствующем $\mathbf{E}(\mathbf{\Omega},\mu)$. Отметим, что $\mathbf{E}_\mathbf{H}=$ $=\mathbf{E}\Longleftrightarrow p_\mathbf{E}>1\Longleftrightarrow\int\limits_0^1 d_\mathbf{E}(1/t)\,dt<\infty\Longleftrightarrow d_\mathbf{E}(t)=o(t)$ при $t\to+\infty$, где $d_\mathbf{E}(t)=\|D_t\|_{\mathbf{E}\to\mathbf{E}}$ и $p_\mathbf{E}$ — нижний индекс Бойда пространства $\mathbf{E}$ (см. [3, 8]).

Случаи, когда пространство $\mathbf{E}$ является пространством Орлича или пространством Лоренца, подробно рассмотрены в работах [9, 10].

Работа выполнена при частичной поддержке гранта ГФФИ, проект № 40.1/008.

1. *Dunford N., Schwarts J. T.* Convergence almost everywhere of operator averages // J. Rat. Mech. Anal. – 1956. – No 5. – P. 129–178.
2. *Krengel U.* Ergodic theorems. – Berlin: de Gruyter, 1985. – 357 p.
3. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
4. *Calderon A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkewicz // Studia Math. – 1966. – **26**. – P. 273–299.
5. *Mityagin B. S.* An interpolation theorem for modular spaces // Mat. Sb. – 1965. – **66**. – P. 473–482.
6. *Edgar G. A., Sucheston L.* Stopping times and directed processes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. – 430 p.
7. *Braverman M., Rubshtein B., Veksler A.* Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Math. – 1998. – No 128. – P. 145–157.
8. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Spaces I. Sequence spaces. Spaces II. Function spaces. – Berlin: Springer, 1979. – 327 p.
9. *Муратов М. А., Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.* Порядковая сходимость в эргодических теоремах в пространствах Орлича // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та. – 2010. – **23(62)**, № 1. – С. 96–111.
10. *Муратов М. А., Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.* Порядковая сходимость в эргодических теоремах в пространствах Лоренца // Динамич. системы. – 2010. – Вып. 28. – С. 79–86.

Таврический национальный университет
им. В. И. Вернадского, Симферополь

Поступило в редакцию 29.10.2010

M. A. Muratov, J. S. Pashkova, B. A. Rubshtein

Order convergence of ergodic theorems for permutatively invariant spaces

We find necessary and sufficient conditions for the order convergence of Cesáro averages of positive absolute contractions in permutatively invariant spaces. We study the case where the measure is infinite. The investigation of the order convergence includes both dominated and individual ergodic theorems. The classical dominated and individual ergodic theorems for spaces L_p and Zygmund classes $L\log^p L$ are obtained as particular cases.