Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

12 • 2007

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 532.536

А. А. Авраменко

Ренормгрупповой анализ нестационарной турбулентности

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Б. И. Баском)

Within the renormalization group approach, a two-parametric model of turbulence for unsteady streams is constructed. The model includes additional terms, taking into account unsteady processes whose time scales surpass much more the scales of turbulence.

Методы ренормализационной группы (ренормгруппы) были первоначально развиты в квантовой теории поля [1, 2]. Затем эти методы успешно использовались для анализа критических явлений при фазовых переходах второго рода [3–5]. Позже они нашли применение и для описания развитой турбулентности. Значительный вклад в развитие данного направления в исследовании турбулентности внесли Яхот и Оржег [6], которые получили замкнутую ренормализационную k-ε-модель турбулентной вязкости (RNG k-ε-модель). Обстоятельный обзор методов приложения ренормогруппы к проблемам турбулентности дан в работе [7].

Все указанные работы анализируют поведение турбулентности в предположении, что вся нестационарность процесса заключается в высокочастотных турбулентных пульсациях. Это позволяет при оценке интегралов по частоте, которые возникают из-за использования d-мерного преобразования Фурье, ограничиваться энергетическим пределом $\omega \to 0$. Такое упрощение приводит к неучету медленно протекающих (по сравнению с турбулентными пульсациями) нестационарных процессов, характерных для реальных проблем гидродинамики. В настоящем исследовании сделана попытка устранить этот недостаток и учесть нестационарность непосредственно самого потока.

Ренормгрупповой анализ используются для перенормировки уравнений Навье–Стокса с целью "перекачки" быстрых мод в эффективный коэффициент переноса — турбулентную вязкость. Уравнение Навье–Стокса в дивергентной форме имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_0 \bigtriangledown^2\right) u_n + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m} - f = 0, \tag{1}$$

где p — давление; t — время; u_n — компоненты скорости, соответствующие координатам x_n; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность. В (1) внешняя соленоидальная сила f представляет собой белый гауссовский шум, а индекс "0" в молекулярной вязкости используется, чтобы выделить этот параметр, так как далее с него начнется процедура перенормировки.

Процедуру перенормировки удобно проводить в пространстве волновых чисел и частоты. Поэтому необходимо "перевести" в это пространство уравнение (1). Это можно сделать с помощью комплексного d-мерного преобразования Фурье [7]. Фурье-образы слагаемых в уравнении (1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{k \leqslant k_c} d^d k \int d\omega U_n(\vec{k},\omega) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t),\\
p &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{k \leqslant k_c} d^d k \int d\omega P(\vec{k},\omega) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t),\\
u_n u_m &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{k \leqslant k_c} d^d k \int d\omega W_{nm}(\vec{k},\omega) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t),\\
f &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\limits_{k \leqslant k_c} d^d k \int d\omega F(\vec{k},\omega) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t),
\end{aligned} \tag{2}$$

где ω — частота; k — волновое число; $\vec{k}$ — вектор волнового числа; $\vec{x}$ — вектор координаты точки; W_{nm} — Фурье-образ произведения двух компонент скорости. В образах (2) k_c представляет собой величину ультрафиолетового обрезания в пространстве волновых чисел.

Далее вводим допущение, что моды скорости исчезают при $k_c > k$ [6]. Это равносильно предположению, что влияние отбрасываемых при этом мелкомасштабных мод сводится к замене молекулярной вязкости ν_0 на некоторое, зависящее от параметра обрезания, перенормированное значение $\nu_0 = \nu_0(k_c)$.

В Фурье пространстве уравнение Навье–Стокса имеет вид

$$G_0^{-1}(k) U_n(\vec{k},\omega) = F(\vec{k},\omega) + \lambda_0 M_{nml}(\vec{k}) \int\limits_{k \leqslant k_c} \frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d} \int \frac{d\vec{\omega}}{2\pi} U_m(\vec{\sigma},\omega) U_l(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega}'), \tag{3}$$

где $G_0 = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1}$ — пропагатор нулевого порядка, символический параметр λ_0 введен для удобства при построении теории возмущений. В окончательном результате следует принять $\lambda_0 = 1$.

Корреляционная функция эффективных случайных сил имеет вид [6]

$$\overline{F_n(\vec{k},\omega) F_m(\vec{k}',\omega')} = \frac{2(2\pi)^{d+1}}{k^{d-4+\varepsilon^*}} D_0 M_{nm}(\vec{k}) \delta(\vec{k}+\vec{k}') \delta(\omega+\omega'),$$

где дельта-функция Дирака δ гарантирует статистическую однородность корреляционной функции в пространстве и времени. Величина D_0 пропорциональна скорости диссипации энергии ε, а параметр ε^* равен четырем [6]. Перейдем к непосредственной процедуре ренормализационного анализа. Как уже отмечалось, основы этой процедуры были разработаны в работе [6]. Согласно идеологии этой работы, данная процедура включает два этапа.

1. Разбиение поля скоростей и силы на медленную и быструю части

$$U(\vec{k},\omega) = \begin{cases} U^{<}(\vec{k},\omega), & 0 < k < k_c \exp(-\tau),\\ U^{>}(\vec{k},\omega), & k_c \exp(-\tau) < k < k_c, \end{cases} \tag{4}$$

$$F(\vec{k},\omega)=\begin{cases} F^{<}(\vec{k},\omega), & 0<k<k_c\exp(-\tau),\\ F^{>}(\vec{k},\omega), & k_c\exp(-\tau)<k<k_c \end{cases} \tag{5}$$

с последующим исключением высокочастотных мод $U^{<}$ путем решения уравнения для них и подстановкой полученного решения в уравнение для медленных мод $U^{>}$.

2. Перенормировка U, F и k_c таким образом, чтобы вновь полученное уравнение выглядело как исходное уравнение движения (1). На этом этапе производится ренормализация коэффициентов переноса (эффективной вязкости). В соответствии с изложенным, подставим (4) и (5) в (3). В результате получим

$$G_0^{-1}(k)U_n^{<}(\vec{k},\omega)=F^{<}(\vec{k},\omega)+\lambda_0 M_{nml}^{<}(\vec{k})\int\limits_{k\leqslant k_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\vec{\omega}}{2\pi}[U_m^{<}(\vec{\sigma},\omega)U_l^{<}(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega})+$$
$$+2U_m^{<}(\vec{\sigma},\omega)U_l^{>}(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega})+U_m^{>}(\vec{\sigma},\omega)U_l^{>}(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega})],$$
$$G_0^{-1}(k)U_n^{>}(\vec{k},\omega)=F^{>}(\vec{k},\omega)+\lambda_0 M_{nml}^{>}(\vec{k})\int\limits_{k\leqslant k_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\vec{\omega}}{2\pi}[U_m^{<}(\vec{\sigma},\omega)U_l^{<}(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega})+$$
$$+2U_m^{<}(\vec{\sigma},\omega)U_l^{>}(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega})+U_m^{>}(\vec{\sigma},\omega)U_l^{>}(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega})]$$

с соответствующей интерпретацией верхнего индекса M_{nml}.

Теперь необходимо исключить быстрые моды из уравнения для медленных мод. Эта процедура изложена в работе [7]. В результате ее выполнения получаем

$$\begin{gathered} G^{-1}(k)U_n^{<}(\vec{k},\omega)=F^{<}(\vec{k},\omega)+\lambda_0 M_{nml}^{<}(\vec{k})\int\limits_{k\leqslant k_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\vec{\omega}}{2\pi}[U_m^{<}(\vec{\sigma},\omega)U_l^{<}(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega})],\\ G(k)=[-i\omega+k^2(\nu_0+R)]^{-1}, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} R=8\lambda_0^2k^{-2}D_0M_{hml}^{<}(\vec{k})\int\frac{d^d\vec{\sigma}}{(2\pi)^d}\times\\ \times\int\frac{d\vec{\omega}}{2\pi}G_0(\vec{k}-\vec{\sigma},\omega-\vec{\omega})\frac{|G_0(\vec{\sigma},\vec{\omega})|^2M_{lth}^{>}(\vec{k}-\vec{\sigma})M_{mt}^{>}(\vec{\sigma})}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}}\ - \end{gathered} \tag{7}$$

ренормализованный пропогатор, отличающийся от G_0 на ренормализационную поправку. Если теперь переименовать переменные в (6), убрав символ медленных мод, то сразу приходим к исходному уравнению (3).

Для получения дифференциального уравнения, описывающего эффективную вязкость, необходимо вычислить интеграл (7). Сначала берется интеграл по всему спектру частот. С учетом проведенного интегрирования по частотам можно переписать выражение (7) следующим образом:

$$R=4\lambda_0^2k^{-2}D_0M_{hml}^{<}(\vec{k})\int\frac{d^d\vec{\sigma}}{(2\pi)^d}\frac{M_{lth}^{>}(\vec{k}-\vec{\sigma})M_{mt}^{>}(\vec{\sigma})\sigma^{-d+2-\varepsilon^*}}{\sigma^2\nu^2+\nu^2(k-\sigma)^2-i\nu\omega}.$$

Во всех предыдущих работах интеграл по волновым числам анализировался при $\omega = 0$. В отличие от указанного подхода, оценим интеграл по волновым числам в пределе $\omega \to 0$. Тогда, используя биномиальный ряд, представим предыдущее выражение так:

$$R \approx \frac{2\lambda_0^2 k^{-2} D_0 M^{<}_{hml}(\vec{k})}{(2\pi)^d \nu^2} \int d^d\vec{\sigma} \left(1 + \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\sigma^2} + i\frac{\omega}{2\sigma^2\nu}\right) M^{>}_{lth}(\vec{k}-\vec{\sigma}) M^{>}_{mt}(\vec{\sigma})\sigma^{-y-4}, \tag{8}$$

где $y = d - 4 + \varepsilon^*$.

Интеграл (8) можно разбить на два интеграла $R \approx R_1 + R_2$, где

$$R_1 = \frac{2\lambda_0^2 k^{-2} D_0 M^{<}_{hml}(\vec{k})}{(2\pi)^d \nu^2} \int d^d\vec{\sigma} \left(1 + \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\sigma^2}\right) M^{>}_{lth}(\vec{k}-\vec{\sigma}) M^{>}_{mt}(\vec{\sigma})\sigma^{-y-4}, \tag{9}$$

$$R_2 = i\frac{\lambda_0^2 k^{-2} D_0 M^{<}_{hml}(\vec{k})\omega}{(2\pi)^d \nu^3} \int d^d\vec{\sigma} M^{>}_{lth}(\vec{k}-\vec{\sigma}) M^{>}_{mt}(\vec{\sigma})\sigma^{-y-6}. \tag{10}$$

Интеграл (9) оценен в ряде работ [8, 10, 11] и имеет следующее значение:

$$R_1 = A_d \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 k_c^{\varepsilon^*}} \frac{\exp(\varepsilon^*\tau) - 1}{\varepsilon^*},$$

где $A_d = \widetilde{A}_d \dfrac{S_d}{(2\pi)^d}$, $\widetilde{A}_d = \dfrac{d^2 - d}{2d(d+2)}$, $S_d = \dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$.

Интеграл (10) равен

$$R_2 = iB_d \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 k_c^{\varepsilon^*}} \frac{\omega}{\nu k_c^2} \frac{\exp[(\varepsilon^* + 2)\tau] - 1}{\varepsilon^* + 2},$$

где

$$B_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{d^2 - d - 2}{4d(d+2}.$$

Таким образом,

$$R \approx A_d \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 k_c^{\varepsilon^*}} \frac{\exp(\varepsilon^*\tau) - 1}{\varepsilon^*} + iB_d \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 k_c^{\varepsilon^*}} \frac{\omega}{\nu k_c^2} \frac{\exp[(\varepsilon^* + 2)\tau] - 1}{\varepsilon^* + 2}.$$

Следовательно, ренормализованный пропагатор принимает вид

$$G(k) = [-i\omega(1 - k^2\gamma) + k^2(\nu_0 + \Delta\nu)]^{-1},$$

где $\Delta\nu = R_1$ — поправка, ренормализующая вязкость и по сути представляющая собой турбулентную вязкость,

$$\gamma = \frac{R_2}{i\omega} = B_d \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 k_c^{\varepsilon^*}} \frac{1}{\nu k_c^2} \frac{\exp[(\varepsilon^* + 2)\tau] - 1}{\varepsilon^* + 2}.$$

Преобразуем поправку γ следующим образом:

$$\gamma = \frac{B_d}{A_d} A_d \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 k_c^{\varepsilon^*}} \frac{\exp(\varepsilon^*\tau) - 1}{\varepsilon^*} \frac{1}{\nu k_c^2} \frac{\varepsilon^* \exp[(\varepsilon^* + 2)\tau] - 1}{(\varepsilon^* + 2)[\exp(\varepsilon^*\tau) - 1]}.$$

Устремляя разницу между локальными волновыми числами обрезания к нулю, т. е. в предел $\tau \to 0$, получим

$$\gamma = \frac{B_d}{A_d} \frac{1}{k_c^2}.$$

В работе [6] показано, что в том же пределе $\tau \to 0$

$$\nu = \left(3A_d D_0 \frac{k_c^{-\varepsilon^*}}{\varepsilon^*}\right)^{1/3}. \tag{11}$$

Выражая отсюда волновое число k_c и подставляя полученный результат в выражение для γ, получим

$$\gamma = \frac{B_d}{A_d} \frac{1}{k_c^2} = B_d \left(\frac{\nu^3 \varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2} D_0}\right)^{2/\varepsilon^*}.$$

С учетом этого выражения преобразуем ренормализованный пропагатор, а затем подставим его в уравнения (6) и вернемся из пространства Фурье в физическую область. В результате получаем окончательную ренормализованную форму уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[B_d \left(\frac{\nu_t^3 \varepsilon^*}{3A_d^{(\varepsilon^*+2)/2} D_0}\right)^{2/\varepsilon^*} \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right] + \frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[(\nu_0 + \nu_t) \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right], \tag{12}$$

где турбулентная вязкость ν_t определяется по формуле [6]

$$\nu_t = 0{,}0847 \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Здесь k — кинетическая энергия турбулентности; ε — скорость диссипации.

Аналогичная процедура перенормировки для уравнения энергии

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\nabla^2\right) T + \lambda_0 \frac{\partial (T u_n)}{\partial x_n} = 0$$

дает (a — температуропроводность)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\left(\frac{\nu_t^3 \varepsilon^*}{3A_d D_0}\right)^{2/\varepsilon^*} \frac{\partial T}{\partial x_n}\right] + \frac{\partial u_n T}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \left[(a_0 + a_t) \frac{\partial T}{\partial x_n}\right], \tag{13}$$

где турбулентная температуропроводность определяется через турбулентное число Прандтля и турбулентную вязкость на основе трансцендентного уравнения

$$\left|\frac{\mathrm{Pr}_t^{-1} - a}{\mathrm{Pr}^{-1} - a}\right|^{(a+1)/(a+b)} \left|\frac{\mathrm{Pr}_t^{-1} + b}{\mathrm{Pr}^{-1} + b}\right|^{(b-1)/(a+b)} = \frac{\nu_0}{\nu_t},$$

где

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\frac{d-1}{d}\widetilde{A}_d^{-1} + 1} - 1\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\frac{d-1}{d}\widetilde{A}_d^{-1} + 1} + 1\right).$$

Для практического применения предложенной модели необходимо также получить дифференциальные уравнения для величин, входящих в модель турбулентности, а именно, уравнения для кинетической энергии турбулентных пульсаций и скорости диссипации энергии. В данном приближении эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\left(\frac{\nu_t^3\varepsilon^*}{3A_dD_0}\right)^{2/\varepsilon^*}\frac{\partial k}{\partial x_n}\right]+\frac{\partial u_n k}{\partial x_n}=2\nu_t S_{nm}^2-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\nu_0+\nu_t}{\mathrm{Pr}_K}\frac{\partial k}{\partial x_n}\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\left(\frac{\nu_t^3\varepsilon^*}{3A_dD_0}\right)^{2/\varepsilon^*}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n}\right]+\frac{\partial u_n \varepsilon}{\partial x_n}=2C_{1\varepsilon}\nu_t\frac{\varepsilon}{k}S_{nm}^2-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\nu_0+\nu_t}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n}\right), \tag{15}$$

где Pr_K определяется из уравнения [6]

$$\left|\frac{\mathrm{Pr}_K^{-1}-a}{1-a}\right|^{(a+1)/(a+b)}\left|\frac{\mathrm{Pr}_K^{-1}+b}{1+b}\right|^{(b-1)/(a+b)}=\frac{\nu_0}{\nu_t}.$$

Здесь $\mathrm{Pr}_\varepsilon=\mathrm{Pr}_K$, $C_{1\varepsilon}=1{,}42$ и $C_{2\varepsilon}=1{,}68$ [12, 13].

Таким образом, предложена модель турбулентности для нестационарных течений, которая включает уравнения движения (12), уравнение неразрывности, уравнение энергии (13), уравнение кинетической энергии турбулентности (14) и уравнение скорости диссипации (15). Указанная система уравнений замыкается выражением для турбулентной вязкости, выражением для турбулентного числа Прандтля и выражениями для “числа Прандтля кинетической энергии турбулентности”.

1. *Stueckelberg E. C. G., Peterman A.* Ila normalisation des constantes dans la theorie des quanta // Helvetica Phys. Acta. – 1953. – **26**. – P. 499–520.
2. *Gell-Mann M., Low F.* Quantum electrodynamics at small distances // Phys. Rev. – 1954. – **95**, No 5. – P. 1300–1312.
3. *Wilson K. G.* Renormalization group and critical phenomena and the Kondo problem // Phys. Rev. B. – 1971. – **4**. – P. 3174–3187.
4. *Wilson K. G.* The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem // Rev. Mod. Phys. – 1975. – No 4. – P. 773–840.
5. *Wilson K. G., Fisher M.* Critical exponents in 3.99 dimensions // Phys. Rev. Letts. – 1972. – **28**, No 4. – P. 240–243.
6. *Yakhot V, Orszag S. A.* Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // J. Sci. Comp. 1986. – **1**, No 1. – P. 3–51.
7. *McComb W. D.* The physics of fluid turbulence. – Oxford: Clarendon Press, 1990. – 572 p.
8. *Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J.* Large-distance and longtime properties of a randomly stirred fluid // Phys. Rev. A. – 1977. – **16**, No 2. – P. 732–749.
9. *Коллинз Дж.* Перенормировка: Введение в теорию перенормировок, ренормализационной группы и операторных разложений. – Москва: Мир, 1988. – 446 с.
10. *Sukoriansky S., Galperin B., Staroselsky I.* Cross-term and ε-expansion in the RNG theory of turbulence // Fluid Dynamics Research. – 2003. – **33**. – P. 319–331.
11. *Xiao-Hong Wang, Feng Wu.* One modification to the Yakhot-Orszag calculation in the renormalization-group theory of turbulence // Phys. Rev. E. – 1993. – **48**, No 1. – P. 37–38.
12. *Smith L. M., Reynolds W. C.* On the Yakhot-Orszag renormalization group method for deriving turbulence statistics and models // Phys. Fluids A. – 1992. – **4**, No 2. – P. 364–390.
13. *Yakhot V., Smith L. M.* The renormalization group, the ε-expansion and derivation of turbulence models // J. Sci. Comput. – 1992. – **7**. – P. 35–52.

Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.04.2007