УДК 519.1

Б. В. Олійник, В. І. Сущанський

Комбінаторика однорідних розшарувань скінченних метричних просторів

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Розглянуто конструкцію та деякі властивості однорідного розшарування над скінченними метричними просторами. Описано матрицю відстаней, граф сусідства та групу ізометрій розшарування.

У повідомленні розглядаються лише скінченні метричні простори, а тому далі під "метричним простором" розуміється "скінченний метричний простір". Метричний простір (X, d_X) назвемо розшаруванням кратності m над метричним простором (Y, d_Y), якщо простір X розбивається в диз'юнктне об'єднання m підпросторів, кожен з яких є ізометричним простору Y. Розглядатимемо спеціальний, порівняно вузький клас розшарувань, для яких відстань між кожними двома шарами є сталим числом. Формально ця конструкція визначається таким чином. Розшарування

$$X = \bigcup_{i=i}^{m} Y_i \tag{1}$$

назвемо однорідним з визначальною відстанню a, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, якщо для довільних i, j, $i \neq j$, існує ізометрична відповідність f_{ij} між підпросторами Y_i, Y_j така, що для довільних точок $u \in Y_i$, $v \in Y_j$ має місце рівність

$$d_X(u, v) = a + d_{Y_j}(f_{ij}(u), v). \tag{2}$$

Зокрема, відстань між відповідними точками шарів Y_i і Y_j дорівнює a. Легко зрозуміти, що конструкція однорідного розшарування є спрощеним варіантом прямого добутку метрик (див. [1, с. 141], а саме, простір X є ізометричним добутку метричного простору Y на еквідистантний простір над множиною $\{1, 2, \ldots, m\}$ з ненульовою відстанню a. А тому, з точністю до ізометрії, однорідне розшарування не залежить від вибору відповідностей f_{ij}. Це означає, що однорідне розшарування над простором Y однозначно задається парою чисел: кратністю розшарування m і визначальною відстанню a. Позначатимемо таке розшарування простору Y символом $(m, a)Y$.

Кожна метрика d на множині $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ однозначно визначається своєю матрицею відстаней $M_d = ||d(x_i, x_j)||_{i,j=1}^{n}$, яка є симетричною і має нульову головну діагональ. Матриця відстаней розшарування метричного простору може бути охарактеризована таким чином. Символом $M^{\otimes m}$ позначимо m-й кронекерівський степінь $n \times n$-матриці M, тобто блочно-діагональну матрицю виміру $nm \times nm$, вздовж головної діагоналі якої розташовано блоки, що дорівнюють M, а всі інші елементи цієї матриці — нульові. Покладемо також, що $M^{\times m}$ — матриця, що складається з m^2 блоків, кожен з яких дорівнює M:

$$M^{\times m} = \begin{pmatrix} M & M & \ldots & M \\ M & M & \ldots & M \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M & M & \ldots & M \end{pmatrix}.$$

Символом I_n позначимо $n \times n$-матрицю, усі елементи якої дорівнюють одиниці.

Твердження 1. *Нехай (X, d) є m-кратним розшаруванням над простором (Y, d_Y), $|Y| = n$, з визначальною відстанню a. Тоді існує таке упорядкування точок простору X, при якому має місце рівність*

$$M_{d_X} = (M_{d_Y})^{\times m} + aI_{n \cdot m} - (aI_n)^{\otimes m}. \tag{3}$$

Точки x, y метричного простору (X, d) назвемо сусідніми, якщо не існує жодної відмінної від x і y точки $z \in X$, яка лежить між ними, тобто такої, що виконується рівність $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Граф відношення сусідства на множині X називають каркасом (або скелетом) метричного простору (X, d) (див. [2]). Позначатимемо цей граф символом $Kr(X, d)$. Конструкція розшарувань природним чином визначається для неорієнтованих графів. Розшарованим графом (див. [3]) є граф, множину вершин якого можна розбити на підмножини таким чином, що всі утворені підграфи ізоморфні між собою. Якщо при цьому дві вершини, що належать до різних підграфів, з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли одна з них є ізоморфним образом іншої (вважаємо, що ізоморфізми графів є фіксованими), то така конструкція називається призмоїдним графом (див. [4]).

Твердження 2. *Граф сусідства розшарування (X, d_X) кратності m над метричним простором (Y, d_Y) ізоморфний m-кратному призмоїдному графу каркаса метричного простору (Y, d_Y).*

Це твердження допускає деяке уточнення.

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ — два простих графи. Прямим добутком графів (див. [5]) G_1 і G_2 називається граф, заданий на множині вершин $V_1 \times V_2$, дві вершини якого (u_1, v_1) і (u_2, v_2) з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли $u_1 = u_2$ і вершини v_1 та v_2 з'єднані ребром в G_2, або $v_1 = v_2$ і вершини u_1 та u_2 з'єднані ребром в G_1.

Теорема 1. *Граф сусідства розшарування (X, d_X) кратності m над метричним простором (Y, d_Y) ізоморфний прямому добутку повного графа K_m і каркаса метричного простору (Y, d_Y).*

Наслідок 1. *Довільні дві сусідні вершини з кожного шару Y_l, $1 \leqslant l \leqslant m$, належать до $m - 1$ циклу довжини 4 в графі сусідства розшарування (X, d_X) кратності m над метричним простором (Y, d_Y).*

Метрика d називається деревною метрикою, якщо граф відношення сусідства на просторі X є деревом. Окремим типом деревних метрик є ультраметрики. Простір (X, d) називатимемо антиподним, якщо для кожної точки u цього простору існує антипод — точка v така, що $d(u, v) = \operatorname{diam} X$. Простір (X, d) називатимемо строго антиподним, якщо для кожної точки u цього простору існує єдиний антипод.

Твердження 3. *Нехай (X, d_X) є розшаруванням кратності m, $m \geqslant 2$, над метричним простором (Y, d_Y). Тоді:*

1) простір (X, d_X) не є деревним (зокрема, ультраметричним) метричним простором;

2) якщо простір (Y, d_Y) — антиподний, то простір (X, d_X) також антиподний. Простір (X, d_X) є строго антиподним простором тоді і лише тоді, коли $m = 2$, а простір (Y, d_Y) — строго антиподний.

Трикутником у метричному просторі (X, d) називається довільна трійка різних точок простору. Трикутник $[x, y, z]$ вироджений, якщо одна з точок x, y, z лежить між двома іншими. У n-точковому просторі можна утворити $\binom{n}{3}$ трикутників, певна частина яких буде виродженими. Кількість вироджених (чи невироджених) трикутників є важливою комбінаторною характеристикою метричного простору. Число вироджених трикутників у просторі X називатимемо його 3-рангом і позначатимемо $r_3(X)$.

Трикутник $[x, y, z]$ у метричному просторі (X, d) назвемо a-виродженим, якщо $d(x, y) + d(z, y) = d(x, z) + a$. Число a-вироджених трикутників у просторі X позначатимемо $r_{3,a}(X)$.

Теорема 2. *Нехай (Y, d_Y) — n-точковий метричний простір. Має місце рівність*

$$r_3((m, a)Y) = r_3(Y)(m + 2\tbinom{m}{2}) + 2n(n-1)\tbinom{m}{2} + r_{3,a}(Y)\tbinom{m}{3}.$$

Доведення. Зафіксуємо різні точки u, v і w метричного простору $(m, a)Y$. Припустимо, що вони утворюють вироджений трикутник, причому точка v лежить між точками u і w.

Точки u, v і w можуть належати одній копії простору (Y, d_Y), двом копіям або трьом. Порахуємо кількість вироджених трикутників у кожному з випадків.

1. Нехай точки u, v і w належать одній копії простору Y. 3-ранг простору Y дорівнює $r_3(Y)$, всього є m копій простору Y, тому таких трійок точок існує $m \cdot r_3(Y)$.

2. Пронумеруємо, як і раніше, ізометричні копії $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ простору (Y, d_y), а ізометричній відповідності між просторами Y_l і Y_k позначимо f_{lk}, $1 \leqslant k, l \leqslant n$.

Нехай точки u, v і w належать до двох копій Y_l і Y_k простору Y, причому при ізометричній відповідності жодна з цих точок не переходить в іншу. Точки u, v і w будуть утворювати вироджений трикутник у таких випадках:

a) $u \in Y_l$, $v, w \in Y_k$, і трикутник $[u, f_{kl}(v), f_{kl}(w)]$ є виродженим в Y_l;

b) $u, v \in Y_l$, $w \in Y_k$, і трикутник $[u, v, f_{kl}(w)]$ є виродженим в Y_l.

Покажемо, що точки u, v і w в просторі $(m, a)Y$ утворюють вироджений трикутник, якщо його утворюють точки $[u, f_{kl}(v), f_{kl}(w)]$. Пункт b доводиться аналогічно.

Справді, за визначенням метрики d мають місце рівності

$$\begin{aligned} &d(u, v) = d_Y(u, f_{kl}(v)) + a, \qquad d(x, w) = d_Y(u, f_{kl}(w)) + a, \\ &d(v, w) = d_Y(f_{kl}(v), f_{kl}(w)). \end{aligned} \tag{4}$$

Оскільки точки $f_{kl}(v)$, u, $f_{kl}(w)$ утворюють вироджений трикутник, то, необмежуючи загальності, вважаємо, що справедливою є рівність

$$d_Y(u, f_{kl}(w)) = d_Y(u, f_{kl}(v)) + d_Y(f_{kl}(v), f_{kl}(w)).$$

Звідси, враховуючи рівності (4), отримуємо

$$d(u, v) + d(v, w) = d(u, w),$$

тобто точки u, v і w в просторі $(m, a)Y$ утворюють вироджений трикутник.

Отже, при фіксованих l і k кожному виродженому трикутнику в просторі Y_l відповідають два вироджених трикутники в розшаруванні $(m, a)Y$, вершини яких містяться в шарах Y_l і Y_k. Крім того, якщо $f_{kl}(v) = u$, то при довільній точці w або з простору Y_l, або з простору Y_k трикутник $[u, v, w]$ є виродженим.

Таким чином, якщо точки u, v і w містяться в двох копіях Y_l і Y_k простору Y, то кількість вироджених трикутників у розшаруванні дорівнюватиме

$$\tbinom{m}{2} \cdot (2r_3(Y) + 2n(n-1)).$$

3. Нехай тепер точки u, v і w належать до трьох копій простору Y, тобто жодні дві точки не містяться в деякому шарі Y_i. Ці точки будуть утворювати вироджений трикутник у тому і тільки тому разі, коли при ізометричній відповідності жодна з них не переходить в іншу, і образи точок u і v в тій копії простору Y, яка містить w, разом з w утворюють a-вироджений трикутник. Отже, таких трикутників буде $r_{3,a}(Y) \cdot \binom{m}{3}$.

Додаючи числа вироджених трикутників у кожному з випадків, отримуємо

$$r_3((m,a)Y) = m \cdot r_3(Y) + \tbinom{m}{2} \cdot (2r_3(Y) + 2n(n-1)) + r_{3,a}(Y) \cdot \tbinom{m}{3},$$

що і доводить твердження теореми.

Наслідок 2. *Якщо* $a > 2\operatorname{diam} Y$, *то*

$$r_3((m,a)Y) = m \cdot r_3(Y) + \tbinom{m}{2} \cdot (2r_3(Y) + 2n(n-1)).$$

Кажуть, що точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ метричного простору (X, d_X) лежать на одній прямій, якщо кожен трикутник з вершинами в цих точках є виродженим. На множині точок, які лежать на одній прямій, природно визначається відношення лінійного порядку. Для того щоб впорядкована множина точок x_1, x_2, ..., x_n лежала на одній прямій достатньо, щоб для довільного i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$, трійка точок x_i, x_{i+1}, x_{i+2} лежала на одній прямій. Надалі будемо вважати, що якщо точки x_1, x_2, ..., x_n метричного простору (X, d_X) лежать на одній прямій, то для довільного i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$, точка x_{i+1} лежить між точками x_i і x_{i+2}.

Прямою у метричному просторі X називається максимальна за включенням множина точок, які лежать на одній прямій. Довжиною прямої x_1, x_2, ..., x_n простору (X, d_X) називається сума $d_X(x_1,x_2) + d_X(x_2,x_3) + \cdots + d_X(x_{n-1},x_n)$.

Теорема 3. *Нехай метричний простір Y містить пряму, яка складається з l точок. Тоді метричний простір $(m,a)Y$ містить пряму, що складається з ml точок. Якщо довжина початкової прямої дорівнює λ, то довжина визначеної нею прямої у просторі $(m,a)Y$ дорівнює $m\lambda + a(m-1)$.*

Пряму x_1, x_2, ..., x_n простору (X, d_X) називатимемо замкненою, якщо справедливою є рівність $d_X(x_n,x_1) + d_X(x_1,x_2) = d_X(x_n,x_2)$. Якщо пряма x_1, x_2, ..., x_n у метричному просторі (X, d_X) замкнена, то для довільного k, $1 \leqslant k \leqslant n$, послідовність точок x_k, x_k+1, ..., x_n x_1, x_2, ..., x_{k-1} також утворює пряму в просторі X.

З доведення теореми 3 випливає

Наслідок 3. *Якщо число m є парним, то в розшаруванні $(m,a)Y$ кратності m над простором (Y, d_Y) всі прямі є замкненими.*

Теорема 4. *Нехай (Y, d_Y) — метричний простір, m, $m \geqslant 2$, — деяке натуральне число. Група ізометрій розшарування (X, d_X) кратності m, $m \geqslant 2$, над метричним простором (Y, d_Y) містить прямий добуток повної симетричної групи S_m і групи ізометрій простору (Y, d_Y). Якщо визначальна відстань a розшарування не міститься у множині значень метрики d, то має місце співвідношення*

$$\mathit{Is}(m,a)Y \simeq S_m \times \mathit{Is}Y. \tag{5}$$

Доведення. 1. Нехай, як і раніше, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Прямий добуток груп підстановок $S_m \times \mathit{Is}Y$ згідно з визначенням (див., наприклад, [6]) діє на множині $\{1, \ldots, m\} \times Y$, яка, як вже було сказано, природним чином ототожнюється з множиною точок розшарування $(m,a)Y$. А тому достатньо переконатися, що кожне перетворення $\varphi = (g_1, g_2) \in S_m \times \mathit{Is}Y$ зберігає метрику d розшарування. Нехай (l, y_i) і (k, y_j) — деякі дві точки простору $(m,a)Y$.

Оскільки $g_1 \in S_m$, то рівність $l^{g_1} = k^{g_1}$ буде справедливою тоді і тільки тоді, коли $l = k$. Крім того, оскільки $g_2 \in IsY$, то

$$d_Y(y_i^{g_2}, y_j^{g_2}) = d_Y(y_i, y_j).$$

Розглянемо два випадки.

a) $k = l$. Тоді

$$d(\varphi(l, y_i), \varphi(k, y_j)) = d(\varphi(l, y_i), \varphi(l, y_j)) = d((l^{g_1}, y_i^{g_2}), (l^{g_1}, y_j^{g_2})) = d_Y(y_i^{g_2}, y_j^{g_2}) = \\ = d_Y(y_i, y_j) = d((l, y_i), (k, y_j)).$$

b) $k \neq l$. У цьому випадку маємо ланцюг рівностей:

$$d(\varphi(l, y_i), \varphi(k, y_j)) = d((l^{g_1}, y_i^{g_2}), (k^{g_1}, y_j^{g_2})) = d_Y(y_i^{g_2}, y_j^{g_2}) + a = d_Y(y_i, y_j) + a = \\ = d((l, y_i), (k, y_j)).$$

Отже, відображення φ є ізометрією простору $(m, a)Y$, звідки і випливає перша частина твердження теореми.

2. Для доведення другої частини теореми достатньо показати, що за вказаного обмеження на a для довільної ізометрії φ простору $(m, a)Y$ існують $(g_1, g_2) \in S_m \times IsY$ такі, що φ діє на просторі $(m, a)Y$ як пара (g_1, g_2).

Нехай $\varphi((k, y_i)) = (l, y_j)$. Оскільки a не належить множині значень метрики d, а $d((k, y_i), (q, y_i)) = a$, $q \neq k$, то образом точки (q, y_i) при відображенні φ буде точка (q', y_j). Тобто при відображенні φ точки вигляду $(*, y_i)$ будуть переходити у точки вигляду $(*, y_j)$.

Крім того, при відображенні φ різні ізометричні копії простору Y будуть переходити одна в одну.

Таким чином, відображення φ діє на множині $\{1, \ldots, m\} \times Y$ як пара (g_1, g_2), що на кожну точку простору $(m, a)Y$ діє за правилом

$$(x_1, y_1)^{(g_1, g_2)} = (x_1^{g_1}, y_1^{g_2}),$$

а отже, φ можна розглядати як елемент групи $S_m \times IsY$.

Робота частково підтримана Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської академії.

1. *Деза М. М., Лоран М.* Геометрия разрезов и метрик. – Москва: МЦНМО, 2001. – 736 с.
2. *Avgustinovich S., Fon-Der-Flaass D.* Cartesian products of graphs and metric spaces // Europ. J. Combinatorics. – 2000. – **21**. – P. 847–851.
3. *Берлов С. Л.* Соотношения между кликовым числом, хроматическим числом и степенью для некоторых видов графов // Моделирование и анализ информ. систем. – 2008. – **15**, № 4. – С. 10–22.
4. *Benecke S., Mynhardt C. M.* Domination of generalized Cartesian products // Discrete Math. – 2010. – **310**, No 8. – P. 1392–1397.
5. *Sabidussi G.* Graph multiplication // Math. Z. – 1960. – **72**. – P. 446–457.
6. *Сущанський В. І., Сікора В. С.* Операції на групах підстановок. Теорія та застосування. – Чернівці: Рута, 2003. – 255 с.

Національний університет "Києво-Могилянська академія"
Сілезький технічний університет, Глівіце, Польща

Надійшло до редакції 15.09.2010

B. V. Oliynyk, V. I. Sushchansky

Combinatorics of homogeneous bundles of finite metric spaces

The construction and some properties of homogeneous bundles of finite metric spaces are considered. The matrices of distances, neighborhood graphs, and isometry groups of these bundles are described.