Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

5 • 2011

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.3(075.8)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О векторе Пойтинга для электроцепей с полигармонической входной электродвижущей силой

Дано математичну інтерпретацію вектора Пойтинга при наявності на вході електроланки полігармонічної електрорушійної сили.

В работах [1–3] и др. вектор Пойтинга для многочастотных входных напряжений в электроцепях не был математически проанализирован. Поэтому эту задачу рассмотрим ниже.

Полигармоническая электродвижучая сила (ЭДС) является вектором и записывается соотношением вида

$$\overline{U}_{\Sigma}(t) = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\overline{U}_{\alpha}(t) = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}U_{\alpha a}\sin(\omega_{\alpha}t + \varphi_{\alpha}), \tag{1}$$

где $E_{\alpha a}$ — амплитуда; ω_{α} — круговая частота; ϕ_{α} — начальная фаза α-й гармоники.

При приложении $\overline{U}_{\Sigma}(t)$ ко входу электроцепи с реактивными элементами (L-индуктивностью, C-емкостью) в этой цепи автоматически изменяется ее структура [4], так как для каждой α-й гармоники тока $\overline{i}_{\Sigma}(t)$, являющегося также полигармоническим, будет свое полное сопротивление $z_{\alpha} = \sqrt{R^2 + (\omega_{\alpha}L - 1/(\omega_{\alpha}C))^2}$. Каждая α-я гармоника тока $\overline{i}_{\alpha}(t)$ является вектором. Поэтому суммарный ток $\overline{i}_{\Sigma}(t)$ в электроцепи равняется векторной сумме n-векторов $\overline{i}_{\alpha}(t)$. Но все $\overline{U}_{\alpha}(t)$ приложены к одной точке (ко входу электроцепи). В этой ситуации возникает вопрос о балансе энергии в электрической цепи.

Известно [1, 2], что электрические соотношения в электромагнитном поле математически описывает теорема Умова–Пойтинга. Для мгновенных значений эта теорема выражается в виде [1]

$$-\oint_{S}\overline{\prod}d\vec{S} = \int_{V}\gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right)dV, \tag{2}$$

где $\overline{\prod}$ — вектор Пойтинга; S — замкнутая поверхность; V — объем; γE^2 — энергия теплоты в единице объема; $\varepsilon_a E^2/2$ — электрическая энергия в единице объема; $\mu_a H^2/2$ — магнитная энергия в единице объема; ε_a — диэлектрическая проницаемость; μ_a — магнитная проницаемость; H — напряженность магнитного поля; E — напряженность электрического поля $\left(U = \int\limits_l \overline{E}dl\right)$.

В выражении (2) $\oint\limits_S \overline{\prod}dS$ является потоком вектора Пойтинга $\overline{\prod} = [\overline{E} \cdot \overline{H}]$ через замкнутую поверхность S, ограниченную объемом V, $\int\limits_V \gamma E^2 dV$ — энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единицу времени в объеме V, $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\varepsilon_a E^2}{2} + \dfrac{\mu_a H^2}{2}\right)$ является скоростью изменения электромагнитной энергии в единице объема V, т. е. электромагнитная мощность. Как видно из (2), теорема Умова–Пойтинга формирует уравнение энергетического баланса между входной мощностью электроцепи (потока вектора Пойтинга) и расходуемой мощностью в этой цепи (электромагнитной энергии в единицу времени). Возвращаясь к выражению (1), видим, что в нашем случае к электроцепи приложен вектор переменной ЭДС $\overline{E}_\Sigma(t)$, который вызывает в цепи переменные токи $\bar{i}_\alpha(t)$, $\alpha = \overline{1,n}$.

Вектор $\overline{E}_\Sigma(t)$ равен геометрической сумме векторов $\overline{E}_\alpha(t)$, а это значит, что в этом случае уравнение (2) должно быть представлено в следующем виде:

$$-\oint\limits_S \overline{\prod}_\Sigma d\overline{S} = \int\limits_V \gamma(\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \dots + \overline{E}_n)^2 dV + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left\{\left[\frac{\varepsilon_a}{2}(\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \dots + \overline{E}_n)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\mu_a}{2}(\overline{H}_1 + \overline{H}_2 + \dots + \overline{H}_n)^2\right]\right\} dV. \quad (3)$$

Здесь $\overline{H}_\alpha$, обусловленные $\overline{E}_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, также являются векторами.

Выражение (3) четко показывает, что в энергетическом плане, даже если электроцепь является линейной, принцип суперпозиции применить нельзя. Квадраты геометрических сумм в (3) записываются следующими выражениями:

$$(\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \dots + \overline{E}_n)^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{E}_\alpha^2 + 2 \sum_{\substack{\alpha l \neq \alpha \overline{m},\\ l=\overline{1,n},\ m=\overline{1,n}}}^{C_n^2} \overline{E}_{\alpha l} \cdot \overline{E}_{\alpha m},$$
$$(\overline{H}_1 + \overline{H}_2 + \dots + \overline{H}_n)^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{H}_\alpha^2 + 2 \sum_{\substack{\alpha l \neq \alpha \overline{m},\\ \alpha l=\overline{1,n},\ \alpha m=\overline{1,n}}}^{C_n^2} \overline{H}_{\alpha l} \cdot \overline{H}_{\alpha m}. \quad (4)$$

С учетом (4) выражение (3) принимает вид

$$-\oint\limits_S \overline{\prod}_\Sigma d\overline{S} = \int\limits_V \left[\gamma\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \overline{E}_\alpha^2\right) + 2\int\limits_V \gamma\left(\sum_{\substack{\alpha l \neq \alpha \overline{m},\\ l=\overline{1,n},\ m=\overline{1,n}}}^{C_n^2} \overline{E}_{\alpha l} \cdot \overline{E}_{\alpha m}\right)\right] dV +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left[\frac{\varepsilon_a}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \overline{E}_\alpha^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left(\sum_{\substack{\alpha l \neq \alpha \overline{m},\\ \alpha l=\overline{1,n},\ \alpha m=\overline{1,n}}}^{C_n^2} \overline{E}_{\alpha l} \cdot \overline{E}_{\alpha m}\right) + \frac{\mu_a}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \overline{H}_\alpha^2\right) + \right.$$

$$+\frac{\mu_a}{2}\Bigg(\sum_{\substack{\alpha l\neq\alpha\overline{m},\\ \alpha l=\overline{1,n},\ \alpha m=\overline{1,n}}}^{C_n^2}\overline{H}_{\alpha l}\cdot\overline{H}_{\alpha m}\Bigg)\Bigg]dV. \tag{5}$$

Как видим, в (5) входят квадраты векторов $\overline{E}_\alpha$, $\overline{H}_\alpha$ и скалярные произведения векторов $\overline{E}_{\alpha l}$, $\overline{E}_{\alpha m}$ и $\overline{H}_{\alpha l}$, $\overline{H}_{\alpha m}$.

Известно [3], что скалярное произведение

$$\overline{E}_{\alpha l},\overline{E}_{\alpha m}=|\overline{E}_{\alpha l}|\cdot|\overline{E}_{\alpha m}|\cos(\overline{E}_{\alpha l}{}^\wedge\overline{E}_{\alpha m}).$$

Точно так же

$$\overline{H}_{\alpha l},\overline{H}_{\alpha m}=|\overline{H}_{\alpha l}|\cdot|\overline{H}_{\alpha m}|\cos(\overline{H}_{\alpha l}{}^\wedge\overline{H}_{\alpha m}),$$

где $(\overline{E}_{\alpha k}{}^\wedge\overline{E}_{\alpha m})$, $(\overline{H}_{\alpha l}{}^\wedge\overline{H}_{\alpha m})$ — углы между векторами.

Исходя из этого,

$$\overline{E}_\alpha^2=|\overline{E}_\alpha|^2,\qquad \overline{H}_\alpha^2=|\overline{H}_\alpha|^2,\qquad \alpha=\overline{1,n}.$$

Заметим, что в декартовых координатах [3]

$$\begin{aligned}\overline{E}_{\alpha l}\cdot\overline{E}_{\alpha m}&=(\mathring{i}\,E_{\alpha lx}+\mathring{j}\,E_{\alpha ly}+\mathring{k}\,E_{\alpha lz})(\mathring{i}\,E_{\alpha mx}+\mathring{j}\,E_{\alpha my}+\mathring{k}\,E_{\alpha mz})=\\&=E_{\alpha lx}\cdot E_{\alpha mx}+E_{\alpha ly}\cdot E_{\alpha my}+E_{\alpha lz}\cdot E_{\alpha mz},\\ \overline{H}_{\alpha l}\cdot\overline{H}_{\alpha m}&=(\mathring{i}\,H_{\alpha lx}+\mathring{j}\,H_{\alpha ly}+\mathring{k}\,H_{\alpha lz})(\mathring{i}\,H_{\alpha mx}+\mathring{j}\,H_{\alpha my}+\mathring{k}\,H_{\alpha mz})=\\&=H_{\alpha lx}\cdot H_{\alpha mx}+H_{\alpha ly}\cdot H_{\alpha my}+H_{\alpha lz}\cdot H_{\alpha mz},\end{aligned}$$

где $E_{\alpha lp}$, $E_{\alpha mp}$, $H_{\alpha lp}$, $H_{\alpha mp}$, $p=x$, y, z — проекции векторов $\overline{E}_{\alpha l}$, $\overline{E}_{\alpha m}$, $\overline{H}_{\alpha l}$, $\overline{H}_{\alpha m}$ на координатные оси x, y, z; $\mathring{i}$, $\mathring{j}$, $\mathring{k}$ — орты, направленные по координатным осям x, y, z.

Выражения для $\cos(\overline{E}_{\alpha l}{}^\wedge\overline{E}_{\alpha m})$, $\cos(\overline{H}_{\alpha l}{}^\wedge\overline{H}_{\alpha m})$ следующие [3]:

$$\cos(\overline{a}\,^\wedge,\overline{b})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\left(\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\right)+\left(\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\right)},$$

где $\overline{a}=\overline{E}_{\alpha l}$ или $\overline{H}_{\alpha l}$, $\overline{b}=\overline{E}_{\alpha m}$ или $\overline{H}_{\alpha m}$.

Как было отмечено ранее, вектор Пойтинга является векторным произведением векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ и имеет с учетом закона полного тока [1] размерность мощности (вольт $\times$ $\times$ ампер/м^2), отнесенную к единице поверхности S.

Известно [1, 2], что для электроцепей переменного тока вводится в математическое употребление комплексный вектор Пойтинга $\overline{\dot{\prod}}=[\overline{\ddot{E}H}]$ и, учитывая [1, 2], что

$$-\oint_S\overline{\dot{\prod}}\,d\overline{S}=-\int_V diV\,\overline{\dot{\prod}}\,dV=\int_V(\dot{\overline{E}}\operatorname{rot}\dot{\overline{H}}-\dot{\overline{H}}\operatorname{rot}\dot{\overline{E}})\,dV, \tag{6}$$

из (2) получим

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\dot{\overline{H}} = \gamma\,\dot{\overline{E}} + j_k\omega\varepsilon_a\,\dot{\overline{E}},\\&\operatorname{rot}\dot{\overline{E}} = -j_k\omega\mu_a\,\dot{\overline{H}},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $j_k = \sqrt{-1}$.

Подставляя (7) в (6), получим

$$-\oint_S \dot{\overline{\prod}}\,d\overline{S} = \int_V \gamma\overline{E}^2 dV + 2j\omega\int_V\left(\frac{\mu_a\overline{H}^2}{2} - \frac{\varepsilon_a\overline{E}^2}{2}\right)dV = P + j_kQ,$$

где $P = \int\limits_V \gamma E^2 dV$ — активная мощность; $Q = 2\omega\int\limits_V(\mu_a H^2/2 - \varepsilon_a E^2/2)\,dV$ — реактивная мощность, $j = \sqrt{-1}$.

При полигармонических $\overline{E}_\alpha$, $\overline{H}_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, комплексная форма выражения (5) имеет вид

$$-\oint_S \dot{\overline{\prod_\Sigma}}\,d\overline{S} = \int_V \gamma\left(\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\dot{\overline{E}}_\alpha\right)^2 dV + 2j\int_V\left[\mu_0\left(\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\frac{\omega_\alpha\dot{\overline{H}}_\alpha}{2}\right)^2 - \varepsilon_a\left(\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\frac{\omega_\alpha\dot{\overline{E}}_\alpha}{2}\right)^2\right]dV. \tag{8}$$

При раскрытии векторных сумм $\overline{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}}$ и после возведения их в квадрат получим выражение (8) в комплексной форме, в принципе, эквивалентное выражению (5), т. е. взаимное влияние гармонических составляющих в комплексной форме также проявляется. Вследствие того, что ЭДС $\overline{U}_\Sigma(t)$, выражаемая (1), является многочастотной, то в (8) комплексная форма $E_{\alpha a}e^{j\varphi_\alpha}e^{j\omega_\alpha t}$, $\alpha = \overline{1,n}$, должна быть применена к каждой гармонике отдельно. В этом случае (8) при n даже больше трех становится громоздким выражением. Но зная, что активная мощность каждой гармоники $P_\alpha = \dot{U}_\alpha\bar{i}_\alpha\cos(\overline{U}_\alpha{}^\wedge I_\alpha)$, реактивная мощность $Q_\alpha = \dot{U}_\alpha I_\alpha\sin(\overline{U}_\alpha{}^\wedge i_\alpha)$, где $\dot{U}_\alpha = (\overline{U}_\alpha)e^{j\varphi_\alpha}e^{j\omega_\alpha t}$, $\dot{I}_\alpha = (\bar{I}_\alpha)e^{j\Psi_\alpha}e^{j\omega_\alpha t}$. Здесь $\bar{i}_\alpha$, $\dot{I}_\alpha$ — вектор и комплексная форма тока в цепи α-й гармоники; Ψ_α — угол сдвига между векторами $\overline{U}_\alpha$ и $\bar{i}_\alpha$. Ток $\bar{i}_\alpha$ следует определять на основе закона полного тока [1] по формуле $\oint\limits_l \overline{H}d\bar{l} = \bar{i}$. С практической точки зрения, при наличии в электроцепи индуктивности L в виде обмотки (О) провода, намотанной на ферромагнитный сердечник, или даже без него, закон полного тока выражается зависимостью

$$w\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\bar{i}_\alpha = \left(\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\overline{H}_\alpha\right)l, \tag{9}$$

где w — число витков обмотки; l — длина магнитной силовой линии.

Из (9) видно, что гармоника тока $\bar{i}_\alpha$ наводит внутри обмотки магнитное поле с напряженностью $\overline{H}_\alpha$. Выражение (9) справедливо при пропускании полигармонического тока $\overline{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}}\bar{i}_\alpha$ по одной обмотке. Если для каждого $\bar{i}_\alpha$ имеется в электроцепи своя обмотка (O_α) с числом витков w_α, то закон полного тока имеет математическую интерпретацию следующего вида:

$$\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\bar{i}_\alpha\omega_\alpha = \left(\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\overline{H}_\alpha\right)l.$$

В этом случае имеются взаимные влияния одних токов на другие, т. е. в цепи будут так называемые взаимоиндуктивности, которые необходимо учитывать.

Таким образом, в результате данного исследования показано, что при полигармонической выходной ЭДС $\overline{U}_{\Sigma}(t)$ значительно усложняется математическая трактовка вектора Пойтинга. Более облегченные решения могут быть, если осуществлять расчеты в проекциях относительно координат x, y, z. Комплексная форма в данном случае громоздка, но возможна для описания энергетического баланса в электроцепи.

1. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – Москва: Высш. шк., 1978. – 232 с.
2. *Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. Ч. II. Основы электромагнитного поля / Под ред. проф. П. А. Ионкина. – Москва: Высш. шк., 1965. – 284 с.
3. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1965. – 780 с.
4. *Божко А. Е.* Сингуларисная теория сигналов и систем. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2009. – 414 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 02.06.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On the Poynting vector for electric circuits with polyharmonic input electromotive force

A mathematical interpretation of the Poynting vector for electrical circuits with polyharmonic input voltage is given.