УДК 531.36

В. С. Денисенко, В. И. Слынько

Частичная устойчивость инвариантных множеств расширенных динамических систем в метрическом пространстве

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Запропоновано конструкцію розширених динамічних систем в метричному просторі. Отримано умови часткової стійкості інваріантних множин розширених динамічних систем на основі відображень, що зберігають стійкість, та принципу порівняння.

Одним из обобщений прямого метода Ляпунова является распространение этого метода для систем в метрическом пространстве (см. [1]). В монографии [2] подытожены исследования устойчивости в метрическом пространстве на основе скалярных и векторных функций Ляпунова. В работе [3] приведено обобщение прямого метода Ляпунова для динамических систем в метрическом пространстве на основе матричнозначного отображения. С использованием подхода, описаного в [2], в работе [4] получены условия частичной устойчивости инвариантных множеств и ограниченности движения систем, заданных на метрическом пространстве. С учетом результатов работ [3, 4] в [5] приведен принцип сравнения с матричнозначным отображением и установлены новые достаточные условия устойчивости и ограниченности движений в метрическом пространстве относительно части переменных. В этой работе рассматривается конструкция расширенных динамических систем (РДС) и устанавливаются условия частичной устойчивости инвариантных множеств РДС на основе отображений, сохраняющих устойчивость.

Предварительные сведения. Пусть T обозначает одно из множеств $T = \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ (непрерывный случай) или $T = \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ (дискретный случай). Пусть (Y,ρ_Y) и (Z,ρ_Z) — полные метрические пространства, $X = Y \times Z$ — пространство, наделенное метрикой $\rho_X(x_1,x_2) = \max\{\rho_Y(y_1,y_2), \rho_Z(z_1,z_2)\}$, где $x_1 = (y_1,z_1) \in X$, $x_2 = (y_2,z_2) \in X$. Известно, что (X,ρ_X) — полное метрическое пространство.

Обозначим $\Pi_z\colon X \to Z$ — проекционное отображение. Очевидно (из определения метрики ρ_X), что Π_z — непрерывное отображение, так как $\rho_Z(\Pi_z x_1, \Pi_z x_2) \leqslant \rho_X(x_1,x_2)$, $x_1,x_2 \in X$.

Пусть M — некоторое подмножество пространства X, тогда расстояние от фиксированного элемента $a \in X$ до множества M определяется согласно формуле $\rho_X(a,M) = \inf\limits_{y\in M} \rho_X(a,y)$.

Определение 1 (ср. [6]). Пусть $U\colon T \times Y \to Z$ — некоторое отображение, определим функцию $\omega\colon T \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ формулой

$$\omega(t,\delta) = \sup_{y_1,y_2\in Y,\ \rho_Y(y_1,y_2)<\delta} \rho_Z(U(t,y_1),U(t,y_2)).$$

Функция $\omega(t,\delta)$ называется модулем непрерывности отображения U.

Стандартно доказывается, что

$$\omega(\cdot,\delta_1+\delta_2) \leqslant \omega(\cdot,\delta_1)+\omega(\cdot,\delta_2), \qquad \delta_1,\delta_2 \in \mathbb{R}_+,$$

$$\omega(\cdot,\delta_1) \leqslant \omega(\cdot,\delta_2) \qquad \text{при} \qquad 0<\delta_1 \leqslant \delta_2$$

и $U(t,\cdot)$ — непрерывное отображение, тогда и только тогда, когда $\omega(t,\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Сформулируем необходимую для дальнейшего изложения лемму.

Лемма 1. *Пусть (X,ρ) — полное метрическое пространство, и $U\colon X\to X$ — непрерывное отображение, $\omega(\cdot)$ — его модуль непрерывности, тогда*

$$\rho(U(x),U(M)) \leqslant \omega(\rho(x,M)).$$

Доказательство. По определению метрики, существует последовательность $\{x_n\}\subset M$ такая, что

$$\rho(x,x_n) \leqslant \rho(x,M)+\frac{1}{2n},$$

поэтому

$$\rho(U(x),U(x_n)) < \omega\left(\rho(x,M)+\frac{1}{n}\right)$$

и

$$\rho(U(x),U(M)) = \inf_{y\in M}\rho(U(x),U(y)) \leqslant \omega\left(\rho(x,M)+\frac{1}{n}\right) \leqslant \omega(\rho(x,M))+\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и учитывая, что вследствие непрерывности $\omega(1/n)\to 0$ при $n\to\infty$, получаем

$$\rho(U(x),U(M)) \leqslant \omega(\rho(x,M)).$$

Лемма доказана.

Пусть $M=M_y\times M_z$, $c=(a,b)$, $a\in M_y$, $b\in M_z$. Легко показать, что

$$\rho_X(c,M) \leqslant \max\{\rho_Y(a,M_y),\rho_Z(b,M_z)\}.$$

Приведем необходимые для дальнейшего определения.

Определение 2 [2, 4]. Пусть (X,ρ_X) — метрическое пространство с выделенным подмножеством $A\subseteq X$. Отображение $p(\cdot;a,t_0)\colon T_{a,t_0}\to X$ называется движением, если $p(t_0;a,t_0)=a$, где $a\in A$, $t_0\in T$ и $T_{a,t_0}=[t_0,\tau_1)\bigcap T$, $\tau_1>t_0$, причем τ_1 конечное или символ бесконечности.

Определение 3 [2, 4]. Пусть $T_{a,t_0}\times\{a\}\times\{t_0\}\to X$ обозначает множество отображений $T_{a,t_0}\times\{a\}\times\{t_0\}$ в X, $\Lambda=\bigcup\limits_{(a,t_0)\in A\times T}(T_{a,t_0}\times\{a\}\times\{t_0\}\to X)$ и S — семейство движений, т. е. $S\subset\{p(\cdot;a,t_0)\in\Lambda \mid p(t_0;a,t_0)=a\}$, тогда кортеж множеств и пространств (T,X,A,S) будем называть динамической системой (ДС).

Определение 4. Пусть J — некоторое множество и каждому элементу $j\in J$ поставлена в соответствие ДС (T,X,A_j,S_j). Кортеж (T,X,A,S,J), где $A=\bigcup\limits_{j\in J}A_j$, $S=\bigcup\limits_{j\in J}S_j$ называется семейством динамических систем (СДС).

Пусть заданы ДС (T, Y, A, S_1) в метрическом пространстве (Y, ρ_Y) и некоторое СДС (T, Z, B, S_2, A). Пусть $p_z(\cdot; b, y, t)$, $b \in B_y$, $y \in Y$ — движения ДС (T, Z, B_y, S_y) при фиксированном $y \in Y$.

Определим множество $C = A \times \bigcup\limits_{a \in A} B_a$ и отображение $p_x(\cdot; a, b, t_0)\colon T_{a,b,t_0} \to X$ по правилу

$$p_x(\cdot; a, b, t_0) = (p_y(\cdot; a, t_0), p_z(\cdot; b, p_y(\cdot; a, t_0), t_0)).$$

Пусть $S \subset \Lambda = \{T_{a,b,t_0} \to X,\ (a, b, t_0) \in A \times \bigcup\limits_{a \in A} B_a \times T\}$.

Очевидно, что $p_x(t_0; a, b, t_0) = (a, b)$, поэтому (T, X, C, S) — ДС в метрическом пространстве (X, ρ_X). Такие ДС (T, X, C, S) будем называть расширением ДС (T, Y, A, S_1). Предложенная конструкция РДС в некотором смысле обобщает известную конструкцию косого произведения классических ДС, заданных на пространстве с мерой [7], а полученный в работе результат обобщает концепцию отображений, сохраняющих устойчивость для косых произведений. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений описанная конструкция РДС аналогична той, которая рассматривалась в работах [8, 9].

Таким образом, РДС (T, X, C, S) представляется целесообразным называть косым произведением ДС (T, Y, A, S_1) и СДС (T, Z, B, S_2, A).

Пусть далее $p_x(\cdot; a, b, t_0)$ — движение РДС.

Определение 5. Множество $M_y \subset A$ называется инвариантным множеством ДС (T, Y, A, S), если $p_y(t; a, t_0) \in M_y$ при всех $t \in T_{a,t_0}$, $t_0 \in T$, как только $a \in M_y$ и $p_y(t; a, t_0) \in \in S$.

Определение 6. Пусть $\Gamma \subset Y$, множество $M_z \subset B$ называется Γ-инвариантным множеством СДС (T, Z, B, S, Y), если $p_z(t; b, g, t_0) \in M_z$ при всех $t \in T_{a,b,t_0}$, $t_0 \in T$, $g \in \Gamma$, как только $b \in B$ и $p_z(t; b, g, t_0) \in S$.

Пусть M_y — инвариантное множество ДС (T, Y, A, S), M_z — M_y-инвариантное множество СДС (T, Z, B, S, Y). Обозначим $M = M_y \times M_z$ — инвариантное множество РДС (T, X, C, S). Действительно, пусть $(a, b) \in M_y \times M_z$ и рассмотрим движение $p_x(\cdot; a, b, t_0)$, тогда $p_y(t; a, t_0) \in M_y \subset Y$ и $p_z(t; b, p_y(t; a, t_0), t_0) \in M_z$, т. е. $p_x(\cdot; a, b, t_0) \in M_y \times M_z$, что и доказывает инвариантность множества M.

Определим понятие устойчивости и частичной устойчивости по Ляпунову инвариантного множества для ДС.

Определение 7. Пусть (X, ρ_X) — полное метрическое пространство, (T, X, C, S) — некоторая РДС, M — инвариантное множество относительно этой РДС. Множество M называется:

1) устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $t_0 \in T_{a,b,t_0}$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\rho_X(c, M) < \delta$ следует $\rho_X(p_x(t; c, t_0), M) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$;

2) z-устойчивым, если для любого $t_0 \in T_{a,b,t_0}$ и $\eta > 0$ существует $\Delta = \Delta(t_0, \eta)$ такое, что для любого $c \in C$ такого, что $\rho_X(c, M) < \Delta$ следует неравенство $\rho_Z(\Pi_z p_x(t; c, t_0), M_z) < \eta$ при всех $t \geqslant t_0$;

3) z-притягивающим, если существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon, t_0, p_x) > 0$ такое, что $\rho_Z(\Pi_z p_x(t; c, t_0), M_z) < \varepsilon$ при всех $t \in T_{a,b,t_0+\tau}$, как только $\rho_X(c, M) < \Delta$;

4) z-асимптотически устойчивым, если оно z-устойчиво и z-притягивающее;

5) z-экспоненциально устойчивым, если существует $\mu > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in T_{a,b,t_0}$ существует $\delta = \delta(t_0) > 0$ такое, что $\rho_Z(\Pi_z p_x(t; c, t_0), M_z) < \varepsilon e^{-\mu(t-t_0)}$ при всех $t \geqslant t_0$ и $c \in C$, как только $\rho_X(c, M) < \Delta$.

Основной результат. Пусть M_y — инвариантное множество ДС (T, Y, A, S_1), а M_z — M_y-инвариантное множество СДС (T, Z, B, S_2, Y), $U(t, \cdot)$ — некоторое отображение $T \times Y \to \to Z$ такое, что справедливо включение $U(t_0, M_y) \subseteq M_z$.

Теорема 1. *Пусть M_y — инвариантное множество ДС (T, Y, A, S_1), M_z — M_y-инвариантное множество СДС (T, Z, B, S_2, Y), а $M = M_y \times M_z$ — инвариантное множество РДС (T, X, C, S) и предположим, что отображение $U\colon T \times Y \to Z$ удовлетворяет условиям:*

1) $p_z(\cdot; b, y, t_0) = U(\cdot, y)$ при любых $y \in M_y$, где $b = U(t_0, a)$, $a \in A$;

2) $\omega(t_0, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$;

3) существует функция $d(\cdot)$ — класса Хана [10] такая, что

$$d(\rho_Y(p_y(t; a, t_0), M_y)) \leqslant \rho_Z(U(t, p_y(t; a, t_0)), M_z);$$

4) инвариантное множество M для РДС (T, X, C, S):

а) z-устойчиво;

б) асимптотически z-устойчиво;

в) если $d(r) = Nr^{\lambda}$, $N > 0$, $\lambda > 0$ и M экспоненциально z-устойчиво.

Тогда инвариантное множество M_y ДС (T, Y, A, S_1):

а) устойчиво;

б) асимптотически устойчиво;

в) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Докажем утверждение *а* теоремы. По условию *а* для любого $t_0 \in T$ и $\eta > 0$ существует $\Delta = \Delta(t_0, \eta) > 0$ такое, что для любых $c = (a, b) \in C$ таких, что $\rho_X(c, M) < \Delta$ следует неравенство $\rho_Z(\Pi_z p_x(t; c, t_0), \Pi_z M) < \eta$ при всех $t \geqslant t_0$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $a \in A$ и $\rho_Y(a, M_y) < \psi^{-1}(t_0, \Delta(d(\varepsilon)))$, где $\psi(t_0, r) = \max\{r, \omega(t_0, r)\}$ — неубывающая функция.

Используя условие $M_z \supseteq U(t_0, M_y)$ и лемму 1, находим

$$\rho_Z(b, M_z) \leqslant \rho_Z(b, U(t_0, M_y)) \leqslant \omega(t_0, \rho_Y(a, M_y)) \leqslant \omega(t_0, \psi^{-1}(t_0, \Delta(d(\varepsilon)))).$$

Отсюда

$$\rho_X(c, M) \leqslant \max\{\rho_Y(a, M_y), \rho_Z(b, M_z)\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\psi^{-1}(t_0, \Delta(d(\varepsilon))), \omega(t_0, \psi^{-1}(t_0, \Delta(d(\varepsilon))))\} = \Delta(d(\varepsilon)),$$

поэтому из z-устойчивости и условия *1* следует, что

$$\rho_Z(U(t, p_y(t; a, t_0)), M_z) < d(\varepsilon) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0.$$

Из условия *3* следует оценка

$$d(\rho_Y(p_y(t; a, t_0), M_y)) < d(\varepsilon), \quad t \geqslant t_0,$$

откуда следует неравенство

$$\rho_Y(p_y(t; a, t_0), M_y) < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0.$$

Свойство *а* доказано. Докажем далее свойство *б*.

Пусть инвариантное множество M асимптотически z-устойчиво, т. е. оно z-устойчиво и z-притягивающее. В этом случае существует $\Delta_2 = \Delta_2(t_0) > 0$ и для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon_2, t_0, p_x) > 0$ такое, что $\rho_Z(U(t, p_y(t; a, t_0)), M_z) < \varepsilon_2$ при всех $t \in T_{a,b,t_0+\tau}$, как только $\rho_X(c, M) < \Delta_2$.

Далее для любого $\varepsilon_1 > 0$ выберем $\varepsilon_2 = \psi(\varepsilon_1)$ и положим $\Delta_1 = \psi^{-1}(t_0, \Delta_2(d(\varepsilon_1)))$, где $\psi(t_0, r) = \max\{r, \omega(t_0, r)\}$ — неубывающая функция.

Аналогично доказанному выше получаем неравенство

$$\rho_X(c, M) < \Delta_2(d(\varepsilon_1)),$$

поэтому из асимптотической z-устойчивости и условия *б* следует оценка

$$\rho_Z(U(t, p_y(t; a, t_0)), M_z) < d(\varepsilon_1).$$

Из условия *3* следует неравенство

$$d(\rho_Y(p_y(t; a, t_0)), M_y) < d(\varepsilon_1) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0 + \tau,$$

откуда следует оценка

$$\rho_Y(p_y(t; a, t_0), M_y) < \varepsilon_1 \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0 + \tau.$$

Свойство *б* доказано. Докажем свойство *в*.

Пусть множество M РДС (T, X, C, S) экспоненциально z-устойчиво, т. е. существует $\mu_2 > 0$ и для любого $\varepsilon_2 > 0$, $t_0 \in T$ и $c \in C$ существует $\Delta_2 = \Delta_2(\varepsilon_2)$ такое, что из $\rho_X(c, M) < \Delta_2$ следует $\rho_Z(\Pi_z p_x(t; c, t_0), M_z) < \varepsilon_2 e^{-\mu_2(t-t_0)}$ при всех $t \in T_{c,t_0}$, $p_x \in S$. Далее для любого $\varepsilon_1 > 0$ выберем $\varepsilon_2 = N\varepsilon_1^{\lambda}$ и положим $\Delta_1 = \psi^{-1}(\varepsilon_2) = \Delta_1(\varepsilon_1)$, $\mu_1 = \mu_2/\lambda$. Пусть для всех $a \in A$ справедливо соотношение $\rho_Y(a, M_y) < \psi^{-1}(t_0, \Delta_2(\varepsilon_2))$, где $\psi(t_0, r) = \max\{r, \omega(t_0, r)\}$ — неубывающая функция.

Аналогично предыдущему получаем оценки

$$\rho_X(c, M) \leqslant \Delta_2(\varepsilon_2), \qquad \rho_Z(U(t, p_y(t; a, t_0)), M_z) < \varepsilon_2 e^{-\mu_2(t-t_0)}.$$

Из условия *3* и *4в* следуют неравенства

$$d(\rho_Y(p_y(t; a, t_0), M_y)) < \varepsilon_2 e^{-\mu_2(t-t_0)},$$

$$N(\rho_Y(p_y, M_y))^{\lambda} < N\varepsilon_1^{\lambda} e^{-\lambda\mu_1(t-t_0)},$$

$$\rho_Y(p_y(t; a, t_0), M_y) < \varepsilon_1 e^{-\mu_1(t-t_0)}.$$

Теорема доказана.

Полученные результаты соответствуют приведенным в разделе 2 работы [11] и позволяют исследовать устойчивость локально линейных моделей динамических систем, в частности локально линейных систем Такаги–Сугено [12].

Авторы выражают благодарность академику НАН Украины А. А. Мартынюку за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

1. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. – 238 с.

2. *Michel A. N., Wang K., Hu B.* Qualitative theory of dynamical systems. The role of stability preserving mappings. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 707 p.
3. *Martynyuk A. A.* Stability of dynamical systems in metric space // Nonlin. Dynamics and Systems Theory. – 2005. – **5**, No 2. – P. 157–167.
4. *Michel A. N., Molchanov A. P., Sun Y.* Partial stability and boundedness of general dynamical systems on metric spaces // Nonlin. Analysis. – 2003. – **52**. – P. 1295–1316.
5. *Мартынюк А. А., Денисенко В. С.* Об устойчивости и ограниченности относительно части переменных в метрическом пространстве // Доп. НАН України. – 2008. – No 4. – С. 69–75.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. – Москва: Мир, 1965. – 615 с.
7. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
8. *Martynyuk A. A.* Extension of the space states of dynamic systems and the problem of stability // Colloquium on qualitative theory of differential equations. – Szeged, 1984. – P. 58–59.
9. *Мартынюк А. А.* Расширение пространства состояний динамических систем и проблема устойчивости // Прикл. механика. – 1986. – **22**, No 12. – С. 10–25.
10. *Hahn W.* Stability of motion. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 448 p.
11. *Денисенко В. С.* Умови стійкості руху нелінійних механічних систем, які встановлені на основі локально-лінійних апроксимацій: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат наук: спец. 01.02.01 "теоретична механіка". – Київ, 2009. – 17 с.
12. *Denysenko V. S., Martynyuk A. A., Slyn'ko V. I.* Stability analysis of impulsive Takagi–Sugeno systems // Int. J. of Innovative Computing, Information and Control. – 2009. – **5**, No 10(A). – P. 3141–3155.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 09.06.2010

V. S. Denysenko, V. I. Slyn'ko

Partial stability of invariant sets of extended dynamical systems on a metric space

The construction of extended dynamical systems in a metric space is proposed. The partial stability conditions of invariant sets of extended dynamical systems are established with the use of a stability-preserving mapping and the comparison principle.