УДК 517.98


**А. В. Чайковський**

# Про лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з $G$-секторіальним операторним коефіцієнтом

*(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)*

*Розглянуто лінійні диференціальні рівняння першого порядку з $G$-секторіальним операторним коефіцієнтом у випадку не обов'язково гельдерової відомої функції. Вказані різні достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.*

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір з нульовим елементом $\vec{0}$, $L(B)$ — простір усіх лінійних неперервних операторів у $B$, $I$ — одиничний оператор. У роботі розглядаються сильні похідні векторних функцій та інтеграли Рімана (власні чи невласні).

**Означення 1.** Нехай $T > 0$, $f \in C([0,T], B)$, $x_0 \in B$. Розв'язком задачі Коші

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), \qquad t \in (0,T], \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

будемо називати функцію $x \in C([0,T], B)$, що має похідну в кожній точці напівінтервала $(0,T]$ (у точці $T$ — ліву похідну), набуває на цьому напівінтервалі значення з множини $D(A)$ і задовольняє рівняння і крайову умову.

Зауважимо, що якщо існує розв'язок задачі Коші

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), \qquad t \in (0,T], \qquad x(0) = \overline{0}, \tag{2}$$

то розв'язок задачі Коші (1) можна отримати з нього додаванням члена $e^{-At}x_0$, якщо для оператора $A$ визначена експонента з відповідними властивостями, а на $x_0 \in B$ накладені додаткові умови. Тому надалі буде розглядатися задача (2).

Розв'язок задачі (2) добре відомий для секторіальних операторів за умови гельдеровості функції $f$ [1, с. 604; 2, с. 60; 3; с. 26; 4, с. 33]. У роботі [5] за умови секторіальності операторного коефіцієнта знайдені більш слабкі достатні умови на функцію $f$. У цій роботі результати статті [5] узагальнюються на випадок операторних коефіцієнтів, які не обов'язково є секторіальними.

**Означення та допоміжні твердження.** Наведемо означення класу $G$-секторіальних операторів з роботи [6].

**Означення 2.** Будемо казати, що функція $G\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ належить класу $\Psi$, якщо вона задовольняє умови:

а) $G$ — незростаюча на $[0,+\infty)$;

б) $G(t) \to 0$, $t \to +\infty$;

в) функція $1/G$ ліпшицева на $[0,+\infty)$.

**Означення 3.** Нехай $G \in \Psi$. Лінійний оператор $A\colon D(A) \subset B \to B$ назвемо $G$-секторіальним, якщо існують такі сталі $a \in \mathbf{R}$ і $\varphi \in (0, \pi/2)$, що для множини $S_{a,\varphi} := \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq a, |\arg(z-a)| < \varphi\}$ справджуються умови:

а) $\sigma(A) \subset S_{a,\varphi}$;

б) $\exists\, M_0 > 0\ \forall\, \lambda \notin S_{a,\varphi}$: $\|R_\lambda(A)\| \leqslant M_0 G(|\lambda - a|)$.

Всюди далі $A$ — $G$-секторіальний оператор і $a = 0$. У [6] вводиться операторна експонента $e^{-At}$, $t > 0$, вводяться дробові степені оператора $A$ для показників степеня $\alpha \in \Omega$, де

$$\Omega := \left\{ \alpha > 0 \,\middle|\, \int\limits_0^1 s^{\alpha-1} H(s)ds < +\infty \right\} \bigcup \{1\}.$$

Сформулюємо потрібні надалі властивості експоненти та дробових степенів, доведені в [6], у вигляді леми.

**Лема 1.** *Нехай*

$$K(t) := e^{-At}, \qquad t > 0, \qquad i \qquad H(t) := \tfrac{1}{t} G\left(\tfrac{1}{t}\right), \qquad t > 0.$$

*Тоді:*

*1)* $\exists\, C_0 > 0\ \forall\, t > 0\colon \|K(t)\| \leqslant C_0 H(t)$*;*

*2)* $K \in C^1((0,T])$ *і* $\forall\, x \in D(A)\colon K(\cdot)x \in C([0,T])$*;*

*3)* $\exists\, C_1 > 0\ \forall\, t > 0\colon \|AK(t)\| \leqslant C_1 t^{-1} H(t)$*;*

*4)* $\forall\, \alpha \in \Omega_0\ \exists\, C_2(\alpha)\ \forall\, s > 0\colon \|A^{-\alpha} K(s)\| \leqslant C_2(\alpha)$*.*

Визначимо варіацію функції $g\colon [a,b] \to B$ на відрізку $[a,b]$ таким чином:

$$V(g, [a,b]) := \sup_{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \|g(t_{k+1}) - g(t_k)\|,$$

де точна верхня межа береться за всіма розбиттями $\lambda = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ відрізка $[a,b]$. Якщо варіація скінченна, то функцію $g$ називають функцією обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$. Клас усіх функцій обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$ зі значеннями в просторі $B$ позначають $BV([0,T],B)$. Властивості варіації функцій зі значеннями в банаховому просторі описані в [7, с. 686]. Відмітимо потрібну нам в подальшому властивість неперервності варіації: функція $F(t) = V(g,[a,t])$, $t \in [a,b]$, неперервна, якщо $g \in C([a,b],B)$ і $V(g,[a,b]) < +\infty$.

**Лема 2.** *Нехай* $f \in BV([a,b],B) \bigcap C([a,b],B)$*,* $g \in C^1([a,b],L(B))$*. Тоді*

$$\left\| \int\limits_a^b g'(t) f(t) dt \right\| \leqslant 2(V(f,[a,b]) + \|f(b)\|) \cdot \max_{t\in[a,b]} \|g(t)\|.$$

**Доведення.** Нехай $x_{kn} = a + k(b-a)/n$, $k, n \in \mathbf{N}$. Тоді

$$\int\limits_a^b g'(t) f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_{k+1n}) - g(x_{kn})) f(x_{kn}) + o(1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} g(x_{kn})(f(x_{k-1n}) - f(x_{kn})) + g(x_{nn}) f(x_{n-1n}) - g(x_{0n}) f(x_{0n}) + o(1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} g(x_{kn})(f(x_{k-1n}) - f(x_{kn})) + (g(b) - g(a)) f(b) + g(a)(f(b) - f(a)) + o(1),$$

$n \to +\infty$.

Оцінюючи норму суми та користуючись означенням варіації, отримуємо потрібну нерівність.

**Розв'язність задачі Коші.** Введемо такі функціональні простори:

$$Y := \{f \in C([0,T],B) \mid \exists\, x \in C([0,T],B) \text{ — розв'язок задачі Коші (2)}\};$$

$$Y_1 := \{f \in C([0,T],B) \mid \exists\, x \in C([0,T],B) \bigcap C^1((0,T],B) \text{ — розв'язок задачі Коші (2)}\};$$

$$Y_2 := \{f \in C([0,T],B) \mid \exists\, x \in C^1([0,T],B) \text{ — розв'язок задачі Коші (2)}\}.$$

Зауважимо, що

$$Y_2 \subset Y_1 \subset Y.$$

З теореми 1.27 і леми 1.28 з [1, с. 609], а також з теореми 3.2.2 з [3, с. 59] випливає, що у випадку секторіального операторного коефіцієнта

$$C_\alpha \subset Y_2, \qquad \alpha \in (0,1],$$

де $C_\alpha = C_\alpha([0,T])$ — клас гельдерових функцій на $[0,T]$ з показником $\alpha$.

Мета даної роботи — побудувати ряд зручних для застосувань просторів, що містяться в просторах $Y_2$, $Y_1$ і $Y$ для випадку $G$-секторіального операторного коефіцієнта.

Визначимо класи функцій

$$F_1\colon = \left\{ f \in C([0,T],B) \mid \forall [a,b] \subset (0,T]\colon \sup_{t\in[a,b]} \int_0^\delta H(s) \frac{\|f(t-s) - f(t)\|}{s} ds \to 0, \delta \to 0+ \right\},$$

$$F_2\colon = \left\{ f \in C([0,T],B) \mid \sup_{t\in[\delta,T]} \int_0^\delta H(s) \frac{\|f(t-s) - f(t)\|}{s} ds \to 0, \delta \to 0+ \right\}.$$

Зауважимо, що $F_2 \subset F_1$.

**Теорема 1.** *Якщо $f \in F_1$, то задача Коші* (2) *має єдиний розв'язок*

$$x(t) = \int_0^t K(t-s) f(s)\, ds, \qquad t \in (0,T], \tag{3}$$

*похідна якого неперервна на $(0,T]$, тобто $F_1 \subset Y_1$. Якщо $f \in F_2$, то похідна розв'язку* (3) *додатково існує та неперервна в нулі, тобто $F_2 \subset Y_2$.*

**Доведення.** Нехай $f \in F_1$. Покладемо $x_0(t) = \int_0^t K(s) f(t) ds = A^{-1}(I - K(t)) f(t)$, $t \in$ $\in (0,T]$. Тоді

$$\int_0^t (x(s) - x_0(s))\, ds = \int_0^t \left( \int_0^s K(s-u) f(u) du \right) ds - A^{-1} \int_0^t (I - K(s)) f(s)\, ds =$$

$$= A^{-1} \int_0^t (I - K(t-s)) f(s) ds - A^{-1} \int_0^t (I - K(s)) f(s)\, ds = A^{-1} \int_0^t K(s) f(s) ds -$$

$$- A^{-1} \int_0^t K(t-s) f(s)\, ds = A^{-1} \int_0^t K(s) f(s)\, ds - A^{-1} x(t), \qquad t \in (0,T].$$

Звідси

$$x(t) = \int\limits_0^t K(s)f(s)\,ds + A\int\limits_0^t (x_0(s) - x(s))\,ds, \qquad t \in (0,T]. \tag{4}$$

На підставі п. *3* леми 1 і означення класу $F_1$ маємо, що інтеграл $\int\limits_0^t AK(s)(f(t-s) - f(t))\,ds$ рівномірно збіжний на кожному відрізку всередині $(0,T]$, отже, враховуючи рівність

$$x(t) = A^{-1}\int\limits_0^t AK(s)(f(t-s) - f(t))\,ds + x_0(t), \qquad t \in (0,T],$$

отримуємо $x(t) \in D(A)$, $t \in (0,T]$ і $A(x - x_0) \in C((0,T])$. Рівність (4) показує, що функція $x$ належить класу $C^1((0,T])$ і є розв'язком задачі Коші (2).

У випадку $f \in F_2$ інтеграл $\int\limits_0^t AK(s)(f(t-s) - f(t))\,ds$ неперервний на $[0,T]$, і $x \in C^1([0,T])$.

Єдиність розв'язку для довільної неперервної функції $f$ доведена в [1, с. 602].

Визначимо для довільного $\alpha \in \Omega$ класи функцій

$$W_{1,\alpha} := \{f \in C([0,T], D(A^\alpha)) \,|\, \forall\,\delta \in (0,T)\colon A^\alpha f \in BV([\delta,T],B) \bigcap C((0,T],B)\},$$
$$W_{2,\alpha} := \{f \in C([0,T], D(A^\alpha)) \,|\, A^\alpha f \in BV([0,T],B) \bigcap C((0,T],B)\}.$$

**Теорема 2.** *Нехай* $\alpha \in \Omega_0$. *Якщо* $f \in W_{1,\alpha}$, *то задача Коші* (2) *має единий розв'язок* (3), *похідна якого неперервна на* $(0,T]$, *тобто* $W_{1,\alpha} \subset Y_1$. *Якщо* $f \in W_{2,\alpha}$, *то похідна розв'язку* (3) *додатково існує та неперервна в нулі, тобто* $W_{2,\alpha} \subset Y_2$.

**Доведення.** Нехай $f \in W_{1,\alpha}$. Користуючись лемою 2, отримуємо при $0 < a < b < t_1 < t_2 \leqslant T$:

$$\left\|\int\limits_a^b AK(s)(f(t_2-s) - f(t_2))ds - \int\limits_a^b AK(s)(f(t_1-s) - f(t_1))ds\right\| =$$
$$= \left\|\int\limits_a^b (A^{-\alpha}K)'(s)A^\alpha(f(t_2-s) - f(t_2) - f(t_1-s) + f(t_1))ds\right\| \leqslant$$
$$\leqslant 2C_2(\alpha)(V(A^\alpha f, [t_2-b, t_2-a]) + V(A^\alpha f, [t_1-b, t_1-a]) +$$
$$+ \|A^\alpha(f(t_2-b) - f(t_2))\| + \|A^\alpha(f(t_1-b) - f(t_1))\|) \to 0$$

при $b \to 0+$ рівномірно за $t_1$, $t_2$ з деякого відрізка всередині $(0,T]$. Крім того, якщо $b$ фіксоване, то, враховуючи неперервність функції $AK(s) = -K'(s)$ при $s > 0$, маємо при $0 < b < t_1 < t_2 \leqslant T$

$$\left\|\int\limits_b^{t_2} AK(s)(f(t_2-s) - f(t_2))\,ds - \int\limits_b^{t_1} AK(s)(f(t_1-s) - f(t_1))\,ds\right\| \to 0, \qquad t_2 - t_1 \to 0.$$

Користуючись позначеннями з доведення леми 1, отримуємо, що функція

$$A(x(t) - x_0(t)), \qquad t \in (0, T],$$

неперервна на $(0, T]$, тому $x(t) \in D(A)$, $t \in (0, T]$ і з (4) випливає, що $x \in C^1((0, T])$ — розв'язок задачі Коші (1).

За умови $f \in W_{2,\alpha}$ аналогічно отримуємо $x \in C^1([0, T])$.

Єдиність розв'язку для довільної неперервної функції $f$ доведена в [1, с. 602].

Таким чином, досліджена задача Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку з $G$-секторіальним операторним коефіцієнтом. Доведені достатні умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в термінах оцінки типу Діні та в термінах функцій обмеженої варіації.


1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – Москва: Мир, 1972. – 740 с.
2. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer, 1983. – 279 p.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – Москва: Мир, 1985. – 376 с.
4. *Goldstein J. A.* Semigroups of linear operators and applications. – Oxford: Oxford University Press, 1985. – 245 p.
5. *Чайковский А. В.* О разрешимости абстрактной задачи Коши // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 5. – С. 756–760.
6. *Городний М. Ф., Чайковский А. В.* Об одном обобщении понятия секториального оператора // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 7. – С. 29–46.
7. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. – Москва: Мир, 1972. – 825 с.



*Київський національний університет*
*ім. Тараса Шевченка*



*Надійшло до редакції 02.06.2010*



**A. V. Chaikovskiy**


## On linear inhomogeneous differential equations with *G*-sectorial operator coefficient


*Linear differential equations of the first order with G-sectorial operator coefficient in the case of a function which is not necessarily Hölder are considered. Several sufficient conditions of existence and uniqueness of a solution of the Cauchy problem are found.*