

Моделирование совместной работы открытой цилиндрической оболочки и подкрепляющих элементов

(Представлено академиком НАН Украины В. Т. Гринченко)

Наведено результати дослідження пружно-деформівного стану відкритої кругової циліндричної оболонки з краями, підкріпленими гнучкими елементами. Аналіз проведено на основі теорії тонкостінних стержнів Власова. Проведено зіставлення результатів обчислень з експериментальними даними.

Рассматривается цилиндрическая оболочка произвольного поперечного сечения, ослабленная вырезом, окантованным на краях поясами, т. е. изгибно-деформируемыми элементами (балками). Участок выреза можно считать открытой цилиндрической оболочкой, ограниченной по торцам недеформируемыми сечениями. Вырез находится между передней и задней частями конструкции и может рассматриваться в условиях защемления. При вращении заднего отсека в оболочке и подкрепляющих элементах возникают напряжения. Здесь представленная задача решается на основе теории тонкостенных стержней В. З. Власова и проводится сопоставление с экспериментальными результатами. В дальнейшем теория тонкостенных стержней открытого профиля обобщалась и применялась так, чтобы учитывать дополнительные эффекты. Уравнения крутильных и изгибно-крутильных колебаний с учетом деформации поперечного сечения, инерции вращения и сдвига по С. П. Тимошенко были выведены и применялись для решения задач [1, 2]. Случай, когда контур поперечного сечения не искривляется и деформация сдвига стенок в своей плоскости не учитывается, представлен в [3]. Эффекты предварительных деформаций учитывались в [4, 5].

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, ослабленную вырезом (рис. 1, а). Для компенсации ослабления от выреза в реальных конструкциях вводится достаточно жесткая окантовка продольных краев. Это имеет непосредственное отношение к фюзеляжам самолетов

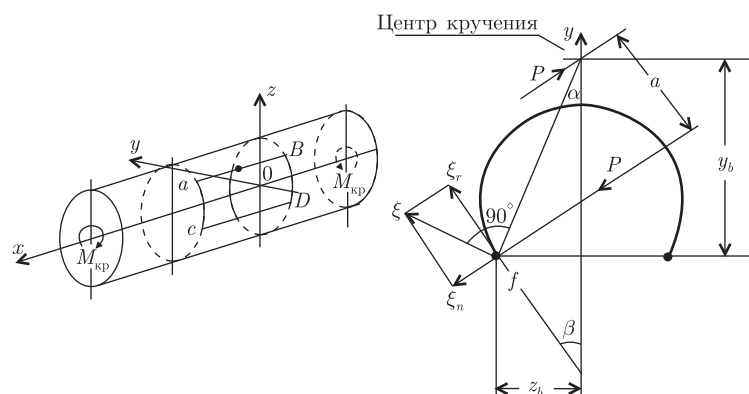


Рис. 1. Геометрия задачи: a — цилиндрическая оболочка с вырезом $abcd$ и подкрепляющими элементами ab и cd ; b — поперечное сечение тонкостенной оболочки, окантованной подкрепляющими элементами и деформирующейся относительно центра кручения

с вырезами. При повороте торцевых сечений окантовка изгибается. Если ее концы, соответствующие точкам a, b, c, d , сделать шарнирными, то не будут возникать изгибающие моменты, т. е. окантовка будет нежесткой. В действительности элементы ab и cd заделаны между замкнутыми отсеками.

В теории упругих тонкостенных стержней с открытым профилем вводятся две гипотезы: недеформируемость контура поперечного сечения в своей плоскости и равенство нулю сдвига в срединной поверхности $\gamma_{xs} = 0$ (x и s — продольная и дуговая координаты). Вторая точно выполняется в задачах о чистом изгибе и о чистом кручении. В рассматриваемом случае это можно трактовать как второстепенность деформации γ_{xs} и определять их из условий равновесия.

Рассмотрим перемещение произвольной точки f , лежащей на окантовке в плоскости, перпендикулярной оси ox . Его можно разложить на две составляющие ξ_τ и ξ_n (рис. 1, б).

При перемещении точки f в направлении касательной к контуру поперечного сечения окантовка работает совместно с примыкающей оболочкой и не изгибается. Перемещению же точки f в направлении нормали к контуру ничто не препятствует, кроме изгибной жесткости окантовки, заделанной по концам. При этом изменение контура поперечного сечения рассматриваемой оболочки имеет локальный характер и, как показывают эксперименты, быстро затухает по мере удаления от торца окантовки и в окружном направлении вдоль образующей.

Из рис. 1, б определяем величину поперечного отклонения балки и крутящий момент

$$\xi_n = (y_b \cos \beta - z_b \sin \beta)\varphi = a\varphi, \quad M = M_b + M_t, \quad (1)$$

где M_b — часть крутящего момента, воспринимаемая окантовкой; M_t — часть крутящего момента, воспринимаемая оболочкой. При этом перераспределение приложенного крутящего момента между M_b и M_t не известно. В дальнейшем для решения этой задачи применяется теорема о минимуме потенциальной энергии. Момент M_b можно представить в виде пары сил (рис. 1, б), тогда для одного подкрепляющего элемента имеем $P = M_b/2a$.

Изгибающий момент в окантовке, как для балки с защемленными концами, с учетом (1) равен

$$M_x = P \left(x - \frac{l}{2} \right) = \frac{M_b}{2a} \left(x - \frac{l}{2} \right). \quad (2)$$

В случае длинного выреза применима гипотеза Вагнера–Власова, согласно которой полагается, что нормальные напряжения стесненного кручения пропорциональны деформации поперечного сечения. Величина M (1) определяется из дифференциального уравнения для кручения θ открытого тонкостенного стержня и дифференциального уравнения изгиба окантовки — поперечного отклонения балки ξ_n , а также теоремы о минимуме потенциальной энергии U . Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{m(x)}{EI_\omega}, \quad \frac{d^4\xi_n}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI_b}, \quad \frac{\partial U}{\partial M_b} = 0. \quad (3)$$

В рассматриваемом случае $m(x) = 0$, $q(x) = 0$ и при малой толщине отношение крутильной жесткости EI_ω к изгибной EI_b величина λ^2 малая и может не учитываться.

Граничные условия, соответствующие закреплению оболочки на торцах выреза и защемлению концов балки, имеют вид

$$\text{при } x = 0: \quad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad \text{и} \quad \xi_n = 0, \quad \frac{d\xi_n}{dx} = 0, \quad (4)$$

$$\text{при } x = l: \quad \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \frac{d^3\theta}{dx^3} = \frac{M_t}{EI_\omega} \quad \text{и} \quad \frac{d\xi_n}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\xi_n}{dx^2} = \frac{M_b}{EI_b}. \quad (5)$$

Из уравнений (3) и граничных условий (4) и (5) получаем

$$\theta = \frac{M - M_b}{2EI_\omega} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{l}{2}x^2 \right), \quad \xi_n = \frac{M_b}{4aEI_b} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{l}{2}x^2 \right). \quad (6)$$

Выражение для потенциала упругих сил имеет вид

$$U = \frac{E}{2} \int_0^l \int_0^s \varepsilon_x^2 \delta dx ds + \frac{G}{2} \int_0^l \int_0^s \gamma_x^2 \delta dx ds + \frac{E}{2} \int_0^l \int_0^s 2I_b (\xi_n'')^2 dx ds.$$

После подстановки выражений $\varepsilon_x = \theta''\omega$, $\gamma_{xs} = (M - M_b)S_\omega / (GI_\omega\delta)$, а также θ'' и ξ_n'' , согласно (6), получаем

$$U = (M - M_b)^2 \left[\frac{l^3}{24EI_\omega} + \frac{l}{2GI_\omega^2} \int_0^s \frac{S_\omega^2}{\delta} ds \right] + \frac{l^3}{48a^2EI_b} M_b^2. \quad (7)$$

Из условия минимума потенциальной энергии (7) определяем связь между M_b и M :

$$M_b = \alpha M,$$

где

$$\alpha = \frac{1 + \frac{31,2}{l^2 I_\omega} \int_0^s \frac{S_\omega^2}{\delta} ds}{1 + \frac{31,2}{l^2 I_\omega} \int_0^s \frac{S_\omega^2}{\delta} ds + \frac{I_\omega}{2a^2 I_b}}. \quad (8)$$

Здесь $\alpha = M_b/M$ — коэффициент распределения момента.

Первым и вторым членами в знаменателе (8) можно пренебречь по сравнению с третьим членом. Тогда выражение (8) принимает вид

$$\alpha = \frac{1 + \frac{31,2}{l^2 I_\omega} \int_0^s \frac{S_\omega^2}{\delta} ds}{\frac{I_\omega}{2a^2 I_b} + 1}. \quad (9)$$

Расчетная формула на основании (2) имеет вид

$$M_x = \frac{\alpha}{2a} \left(x - \frac{l}{2} \right) M. \quad (10)$$

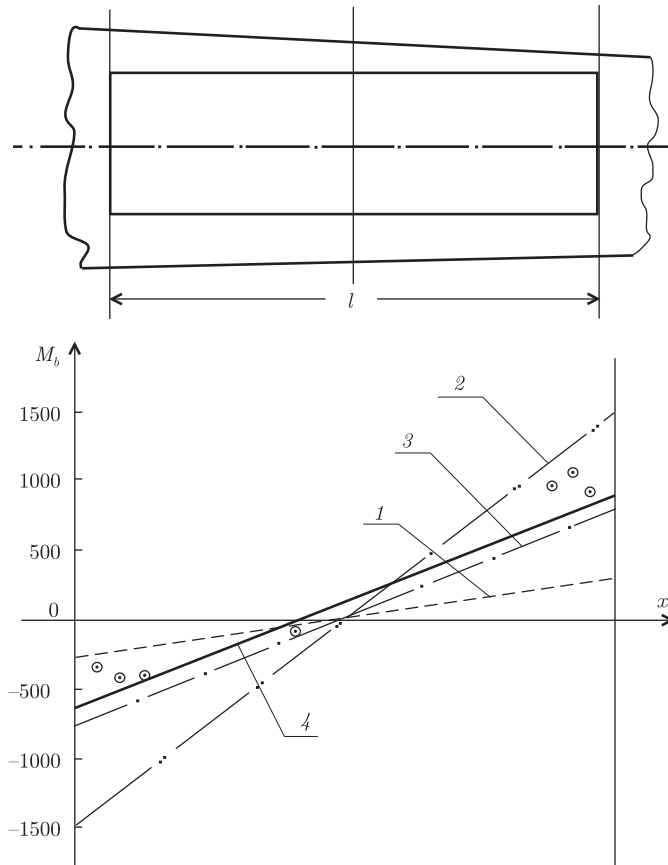


Рис. 2. Изменение изгибающего момента M_b (кгм) в окантовке: точки — экспериментальные величины; 1 — для поперечного сечения 1; 2 — для поперечного сечения 2; 3 — для среднего поперечного сечения; 4 — с учетом различия жесткостей сечений 1 и 2

В случае короткого выреза, используя гипотезу Навье–Пухова, вместо (9) можно аналогичным способом получить формулу для α

$$\alpha = \frac{1 + \frac{l^2}{4,6I_c} \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta\delta_i r_i)^2}{F_i}}{1 + \frac{l^2}{4,6I_c} \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta\delta_i r_i)^2}{F_i} + \frac{I_c l^2}{2,3I_b a^2}}. \quad (11)$$

Если жесткости торцевых сечений отличаются между собой, то изгибающий момент в окантовке перераспределяется пропорционально коэффициентам α_1 и α_2 соответственно для сечений 1 и 2 (рис. 2)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Формула (10) для вычисления изгибающего момента в окантовке принимает вид

$$M_x = \frac{\alpha}{2a} \left(x - \frac{l}{\alpha_2/\alpha_1 + 1} \right) M. \quad (12)$$

Здесь α и a необходимо принимать для среднего сечения.

Для сравнения на рис. 2 приведены расчетные и экспериментальные данные для оболочки с длиной выреза $ab = l = 7$ м и шириной $ac = 3$ м, что соответствует реальной конструкции самолета АН-12. Расчетная кривая 4 определена с учетом различия в жесткостях сечений 1 и 2 по формуле (12). Точками изображены изгибающие моменты, полученные при испытании. Так как оболочка слабоконическая, то для сравнения был проведен расчет трех цилиндрических оболочек с поперечными сечениями 1, 2 и 3, соответственно (рис. 2). Коэффициенты α , вычисленные по формуле (11), равны:

$$\alpha_1 = 1,265 \cdot 10^{-2}, \quad \alpha_2 = 2,55 \cdot 10^{-2}, \quad \alpha_3 = 2,5 \cdot 10^{-2}.$$

Соответствующие расчетные кривые 1, 2 и 3 показаны на рис. 2.

Из проведенных расчетов следует, что для фюзеляжей величина $\alpha = M_b/M$ имеет порядок нескольких процентов. Поэтому изменение положения центра кручения, а также уменьшение крутящего момента M можно не учитывать, т. е. влиянием изгибной жесткости поясов на кручение открытой цилиндрической оболочки можно пренебрегать. Определение же нормальных напряжений изгиба в окантовке обязательно, так как эти напряжения могут достигать значительной величины.

Рассмотренная конкретная задача позволяет сделать вывод об эффективности применения модели тонкостенных стержней Власова для расчета открытых оболочек.

1. Aggarwal H. R., Cranch E. T. A theory of torsional and coupled bending torsional waves in thin-walled open section beams // Trans. ASME. – 1967. – **E34**, No 2. – P. 227–342.
2. Мещеряков В. В. Свободные колебания тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов // Вопросы прикл. механики. Тр. Ин-та инженеров железнодорож. транспорта. – Москва: Изд-во лит-ры по строительству, 1968. – С. 94–102.
3. Bishop R. E. D., Price W. G., Chen Zhan Xi. On the structural dynamics of a Vlasov beam // Proc. Roy. Soc. London. – 1983. – **A388**, No 1794. – P. 49–73.
4. Mohri F., Azrar L., Potier-Ferry M. Vibration analysis of buckling thin-walled beams with open sections // J. Sound and Vibration. – 2004. – **275**, No 1–2. – P. 434–446.
5. Mc Gee O. G. Effect of warping-pretwist coupling on the natural vibration of torsionally clamped-pinned thin-walled open-profile bars // Int. J. Numer. Methods in Engineering. – 2005. – **35**, No 2. – P. 325–349.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 04.08.2010

I. T. Selezov

The modeling of the joint operation of an open cylindrical shell and stiffened elements

The results of investigations of the elastic-strained state of an open circular cylindrical shell with edges stiffened by elastic elements are presented. Analysis is carried out on the basis of the Vlasov's theory of thin-walled bars. Comparisons of the results of calculations and experimental data are presented.