

В.Д. Кубенко, академик НАН Украины
(Институт механики им. С.П.Тимошенко
НАН Украины)

Э.И. Старовойтов, д.ф.-м.н.,
Д.В. Леоненко, к.ф.-м.н.
(Белорусский государственный
университет транспорта)

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ КРУГОВЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Досліджено осесиметричні коливання пружної кругової тришарової пластини на пружній основі під дією локальних поверхневих навантажень. Реакція основи описується моделлю Вінклера. Для опису кінематики несиметричного по товщині пакету прийнято гіпотези ламаної нормалі. Заповнювач - легкий. Отримано аналітичні рішення задачі і проведений їх чисельний аналіз.

FREE AND FORCED VIBRATIONS OF CIRCULAR SANDWICH PLATES ON AN ELASTIC FOUNDATION

The axisymmetrical vibrations of elastic circular sandwich plate on elastic foundation under local shape loading influence are explored. Reaction of foundation was described on the base of Winkler's model. For the kinematics description asymmetrical on the thickness of package accepted hypotheses broken normal. Filler is light. Analytical deciding a problem are received and their numeric analysis are conducted.

Введение. Трехслойные элементы конструкций типа пластин широко применяются в инженерной практике, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Динамическое деформирование трехслойных систем, не связанных с упругим основанием, различного рода нагрузками описано в работах [1–2]. В статьях [3–5] рассмотрены собственные колебания трехслойных пластин, не скрепленных с упругим основанием, с различного рода заполнителем. В монографии [6] исследовано квазистатическое деформирование трехслойных элементов конструкций, лежащих на винклеровском основании.

Здесь рассмотрены свободные и вынужденные колебания сплошных несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин круговой формы с легким заполнителем, скрепленных с безынерционным упругим основанием.

1. Постановка задачи. Постановка задачи и ее решение проводим в цилиндрической системе координат r, φ, z (рис. 1). Срединную плоскость заполнителя принимаем за координатную, ось z направлена перпендикулярно вверх, к слою 1. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого (не работающего в тангенциальном направлении) заполнителя ($h_3 = 2c$) принимаем гипотезу о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормалі. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q = q(r, t)$. К наружной грани второго несущего слоя приложена реакция упругого основания q_R . На контуре пластины

предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев, т. е. $\psi = 0$ при $r = r_1$.

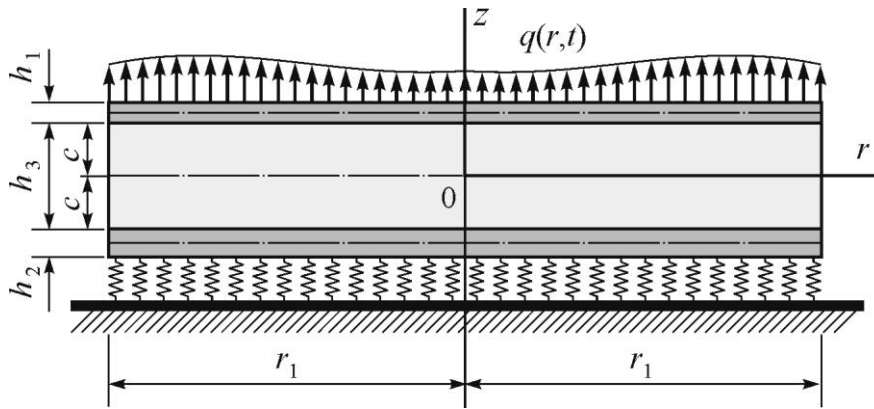


Рис. 1 - Расчетная схема трехслойной пластины на упругом основании

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют ($u_\varphi^{(k)} = 0$, k – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной плоскости u не зависят от координаты φ , то есть $u(r,t), \psi(r,t), w(r,t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя.

Уравнения движения рассматриваемой пластины можно вывести из вариационного принципа Лагранжа, учтя работу сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \tag{1}$$

где δA – вариация работы внешних нагрузок, δW – вариация работы внутренних сил упругости, δA_I – вариация работы сил инерции.

Считаем, что к наружной поверхности второго несущего слоя приложена реакции основания q_R . Вариации работ будут следующие:

$$\delta A_1 = \iint_S (q - q_R) \delta w r dr d\varphi, \quad \delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi, \tag{2}$$

$$\delta A_I = \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} [\rho_k \ddot{w} \delta w] r dr d\varphi.$$

Связь между реакцией и прогибом принимаем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой $q_R = \kappa_0 w$, κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания.

После подстановки выражений для вариаций работ (2) в (1) получаем в

перемещениях следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую вынужденные поперечные колебания круговой трехслойной пластины на упругом основании:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) = 0, \quad L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) = 0, \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} - \kappa_0w = q. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $M_0 = \rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3$, ρ_k – плотность материала k -го слоя; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \\ a_3 &= h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+, \quad a_4 = c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+), \\ a_5 &= c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2K_3^+], \\ a_6 &= h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3K_3^+, \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \end{aligned}$$

G_k, K_k – модули упругости материала k -го слоя.

В качестве начальных принимаем условия

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (4)$$

Задача отыскания функций $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$ замыкается присоединением к (3) и начальных (4) и граничных условий.

2. Свободные колебания. После преобразований система (3) при $q = 0$ сводится к виду

$$\begin{aligned} u = b_1w_{,r} + C_1r + C_2/r, \quad \psi = b_2w_{,r} + C_3r + C_4/r, \\ L_3(w_{,r}) + \kappa^4w + M^4\ddot{w} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь величины κ, M, b_1, b_2 – характеристики системы пластина-основание.

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$.

Искомый прогиб принимаем в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (6)$$

где $v(r)$ – неизвестная координатная функция, ω – частота собственных колебаний рассматриваемой пластины, A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

После подстановки выражения (6) в последнее уравнение системы (5) следует уравнение для определения координатной функции $v(r)$:

$$L_3(v, r) - (\beta^4 - \kappa^4)v = 0. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение

$$\beta^4 = M^4 \omega^2, \quad \lambda^4 = \beta^4 - \kappa^4. \quad (8)$$

Уравнение (7) перепишем в виде

$$L_3(v, r) - \lambda^4 v = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) можно представить в виде

$$v(\lambda r) = C_5 J_0(\lambda r) + C_6 I_0(\lambda r) + C_7 Y_0(\lambda r) + C_8 K_0(\lambda r), \quad (10)$$

где J_0 , Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода (функция Неймана), соответственно; I_0 , K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков; C_5, \dots, C_8 – константы интегрирования [7].

Не останавливаясь на описании указанных функций, отметим, что $Y_0(\lambda r)$ и $K_0(\lambda r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат [8], т. е. в центре пластины. Поэтому необходимо в (10) положить постоянные интегрирования $C_7 = C_8 = 0$.

Если край пластины зажат, то при $r = r_1$ должны выполняться граничные условия

$$u = \psi = w = w, r = 0.$$

Подставляя в два последних требования решение (6) с учетом функции (10) и ограниченности решения в начале координат, получаем однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования C_5, C_6 :

$$C_5 J_0(\lambda r_1) + C_6 I_0(\lambda r_1) = 0, \quad -C_5 J_1(\lambda r_1) + C_6 I_1(\lambda r_1) = 0,$$

где J_1, I_1 – функции Бесселя первого порядка.

Эта система имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее детерминанта. Следовательно,

$$I_1(\lambda r_1) J_0(\lambda r_1) + J_1(\lambda r_1) I_0(\lambda r_1) = 0. \quad (11)$$

Трансцендентное уравнение (11) служит для определения собственных чисел λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) уравнения (7). Следует отметить, что оно совпало с подобным уравнением для собственных чисел трехслойной пластины заземленной по контуру, не связанной с упругим основанием [1].

После вычисления параметров λ_n частоты собственных колебаний следуют из выражения (8).

В общем случае для описания прогиба круговой трехслойной пластины при свободных поперечных колебаниях вводим систему собственных ортонормированных функций $v_n \equiv v(\lambda_n, r)$:

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right]. \quad (12)$$

Здесь учтено вытекающее из граничного условия $w = 0$ соотношение между константами интегрирования $C_6 = -C_5 J_0(\lambda r_1) / I_0(\lambda r_1)$.

Константы d_n определяем из требования нормировки системы функций (12):

$$d_n^2 = \int_0^{r_1} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right]^2 r dr.$$

В конечном виде искомый динамический прогиб трехслойной круговой пластины на упругом безынерционном основании представляем с помощью разложения в ряд по фундаментальной системе собственных ортонормированных функций (12):

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)). \quad (13)$$

Радиальное перемещение и относительный сдвиг получим, используя первые два уравнения из системы (5) и граничное условие на контуре $\psi(r_1, t) = u(r_1, t) = 0$:

$$\begin{aligned}
u(r, t) &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\
\psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)).
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь система функций $\varphi_n \equiv \varphi_n(\lambda_n, r)$ следующая:

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[J_1(\lambda_n r_1) r - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (I_1(\lambda_n r_1) r - I_1(\lambda_n r)) \right].$$

Коэффициенты A_n, B_n в формулах (13), (14) следуют из начальных условий движения (4)

$$A_n = \int_0^{\eta} f(r) v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{\eta} g(r) v_n r dr.$$

2. Вынужденные колебания. Для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомое решение $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ представляются в виде следующих разложений в ряд по системе собственных ортонормированных функций $v_n \equiv v(\lambda_n, r)$ полученных в:

$$\begin{aligned}
q(r, t) &= M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \\
\psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t),
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right].$$

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$ получим, умножив первое из соотношений (15) на v_n и проинтегрировав его по площади пластины. В силу ортонормированности системы собственных функций v_n имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{\eta} q(r, t) v_n r dr. \tag{16}$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (15) и

использования линейной связи функций v_n, φ_n :

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n, \quad (17)$$

где ω_n – частота собственных колебаний рассматриваемой пластины.

Общее решение уравнения (17) выглядит так [1]:

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) q_n(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий (2):

$$A_n = \int_0^{\eta} f(r) v_n r dr; \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{\eta} g(r) v_n r dr. \quad (19)$$

Для сравнения действия различных нагрузок, оказываемых на пластину, введем принцип эквивалентности. Для этого потребуем равенство интегралов по объему, занимаемому соответствующей нагрузкой в любой фиксированный момент времени. В результате получим соответствующую амплитуду эквивалентной нагрузки

$$q'_0 = q_0 \int_V f dV / \int_V f' dV, \quad (20)$$

где f – функция распределения нагрузки с амплитудой q_0 , f' – функция распределения нагрузки с амплитудой q'_0 .

Рассмотрим несколько примеров внешнего осесимметричного силового воздействия на пластину.

Задача, как правило, сводится к отысканию параметров $q_n(t)$ разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени $T_n(t)$.

1. На рассматриваемую пластину действует динамическая поверхностная нагрузка, равномерно распределенная внутри круга радиуса $b \leq r_1$:

$$q(r, t) = q_0(t) H_0(b - r). \quad (21)$$

Здесь $H_0(r)$ – функция Хевисайда нулевого порядка, обращающаяся в нуль при отрицательном аргументе, и равная единице на остальной числовой оси [9].

Подставляя нагрузку (21) в формулу (16), получаем интегральное выражение для вычисления параметров $q_n(t)$:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n} \int_0^{\eta} H_0(b-r) \left(J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right) r dr.$$

Входящие в него интегралы от произведения функций Хевисайда H_0 и Бесселя I_0, J_0 равны

$$\int_0^{\eta} H_0(b-r) J_0(\lambda_n r) r dr = \frac{b J_1(\lambda_n b)}{\lambda_n}; \quad \int_0^{\eta} H_0(b-r) I_0(\lambda_n r) r dr = \frac{b I_1(\lambda_n b)}{\lambda_n}.$$

В результате

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)b}{M_0 d_n \lambda_n} \left(J_1(\lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n b) \right).$$

После этого решение задачи о вынужденных колебаниях пластинки определяется соотношениями (13), а функция $T_n(t)$ вычисляется по формуле (18). Если интенсивность равномерной внешней нагрузки q_0 постоянна по модулю, то при нулевых начальных условиях ($A_n = 0, B_n = 0$) получаем

$$T_n(t) = \frac{q_0 b (1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \lambda_n \omega_n^2} \left(J_1(\lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n b) \right). \quad (22)$$

2. Синусоидальная нагрузка локально действует на круговую часть поверхности трехслойной пластины, ограниченную окружностью $r = b$. Тогда

$$q(r, t) = q_0 \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right) \right] H_0(b-r).$$

Тогда

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)b^2}{\pi M_0 d_n} \left[U_2(\pi, \lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} U_2(\pi, i\lambda_n b) \right], \quad (23)$$

где $U_n(x, y)$ – функция Ломмеля двух переменных [8].

При постоянной внешней динамической нагрузке $q_0 = \text{const}$ функция (23) будет

$$T_n(t) = \frac{q_0 b^2 (1 - \cos(\omega_n t))}{\pi M_0 d_n \omega_n^2} \left[U_2(\pi, \lambda_n b) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} U_2(\pi, i\lambda_n b) \right]. \quad (24)$$

3. Пусть параболическая нагрузка с максимальной амплитудой в центре пластины распределена по кругу радиуса $r = a$:

$$q(r, t) = q_0 H_0(a - r) \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)\right)^2. \quad (25)$$

Подставив (25) в формулу (16), получим

$$q_n(t) = \frac{4q_0(t)}{M_0 d_n \lambda_n^3 a} \left[\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(\lambda_n a) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(\lambda_n a) \right].$$

При внешней динамической нагрузке $q_0 = \text{const}$ и нулевыми начальными условиями эта функция

$$T_n(t) = \frac{4q_0(1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \lambda_n^3 a \omega_n^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(\lambda_n a) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(\lambda_n a) \right].$$

3. Численные результаты. Трансцендентное уравнение для собственных чисел (23) не зависит от геометрических и упругих характеристик материалов слоев и основания. Оно было численно исследовано на интервале числовой оси 0-50. Найденные 15 корней вычислены с точностью до 0,001 и сведены в таблицу. Первые четыре из них совпадают с обычно приводимыми в литературе для защемленной однослойной пластины, не связанной с упругим основанием.

Таблица 1 – Собственные числа

Номер n	Собственное число λ_n	Номер n	Собственное число λ_n
0	3,196	8	28,279
1	6,306	9	31,420
2	9,439	10	34,561
3	12,577	11	37,702
4	15,716	12	40,844
5	18,857	13	43,985
6	21,997	14	47,126
7	25,138		

Числовые результаты получены для круговых трехслойных пластин, материалы слоев которых Д16Т–фторопласт–Д16Т. На приведенных далее графиках радиус пластин положен $r_1 = 1$, что не уменьшает общности решения. После вычисления собственных чисел λ_n частоты ω_n определялись по формулам (20). Численное исследование проводилось для защемленной по контуру пластины единичного радиуса $r_1 = 1$, слои которой набраны из материалов

Д16Т – фторопласт – Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [6]. Собственные частоты колебаний ω_n вычислялись с использованием собственных чисел λ_n , приведенных в [1] и геометрических параметров слоев $h_1 = h_2 = 0,01$, $h_3 = 2c = 0,1$. Коэффициент постели принимался равным $\kappa_0 = 10^8$ Па/м. Начальные условия (2) предполагались однородными

$$w(r, 0) \equiv \dot{w}(r, 0) \equiv 0,$$

что, в соответствии с (19), позволяет получить нулевые константы интегрирования $A_n = 0$, $B_n = 0$.

На рис. 2 показано изменение первых четырех частот ω_n собственных колебаний защемленной по контуру пластины в зависимости от жесткости упругого основания κ_0 (Па/м): 1 – ω_0 , 2 – ω_1 , 3 – ω_2 , 4 – ω_3 . При основаниях малой жесткости ($\kappa_0 < 10^7$) частоты практически постоянны. При увеличении жесткости основания до средней величины ($10^7 < \kappa_0 < 10^9$) частота основного тона ω_0 увеличивается в 6,3 раза. В случае основания высокой жесткости ($10^9 < \kappa_0 < 10^{11}$) частота основного тона может увеличиться еще в 9,5 раз.

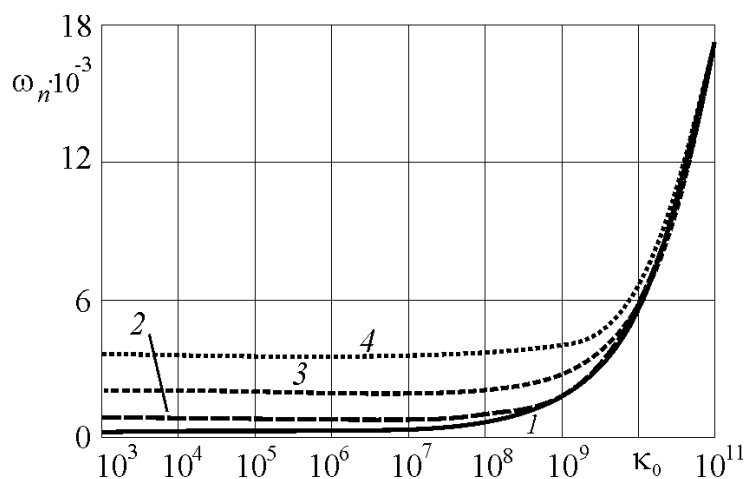


Рис. 2 – Зависимость частоты собственных колебаний от коэффициента постели

Графики зависимости первых двух частот собственных колебаний защемленной по контуру трехслойной пластины от толщины внешнего слоя h_1 ($h_2 = 0,02$, $h_3 = 0,1$) показаны на рис. 3, а. Влияние толщины заполнителя h_3 ($h_1 = h_2 = 0,01$) на эти частоты иллюстрирует рис. 3, б. Здесь 1 – ω_0 , 2 – ω_1 (без штриха – $\kappa_0 = 0$, со штрихом – $\kappa_0 = 10^9$ Па/м). При наличии безынерционного основания все частоты колебаний выше, чем при его отсутствии.

С ростом толщины внешнего слоя частота основного тона ω_0 , пластины, скрепленной с основанием, слегка убывает, а затем восстанавливает свою величину, т. е. изменение h_1 здесь сказывается мало. Частоты ω_1 пластин, связанных и несвязанных с основанием, с ростом h_1 приближаются друг к другу.

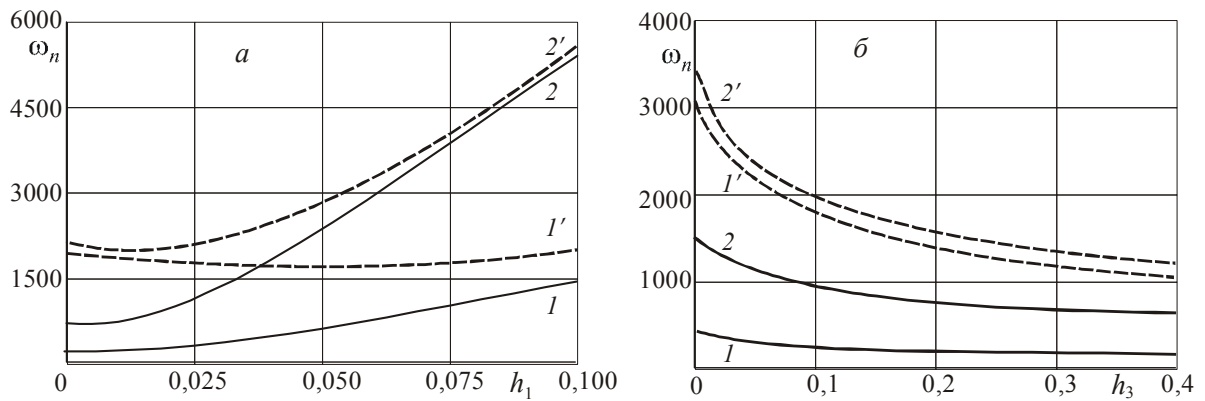


Рис. 3– Зависимость частоты собственных колебаний от толщины слоев

При увеличении толщины легкого заполнителя h_3 частоты убывают в обоих случаях, что говорит об уменьшении относительной жесткости пластины, несмотря на наличие жесткого основания.

Рис. 4 иллюстрирует изменение во времени прогиба в центре пластины при различных радиусах силового круга: $1 - b = 0,5$, $2 - b = 1$. При отсутствии основания (а) ($q_0 = 7 \cdot 10^4$ Па) имеем отнулевой циклический процесс. Увеличение радиуса силового круга приводит к росту амплитуды колебаний. При жесткости основания $\kappa_0 = 10^8$ Па/м, наблюдается несимметричный циклический процесс (б) ($q_0 = 7 \cdot 10^5$ Па).

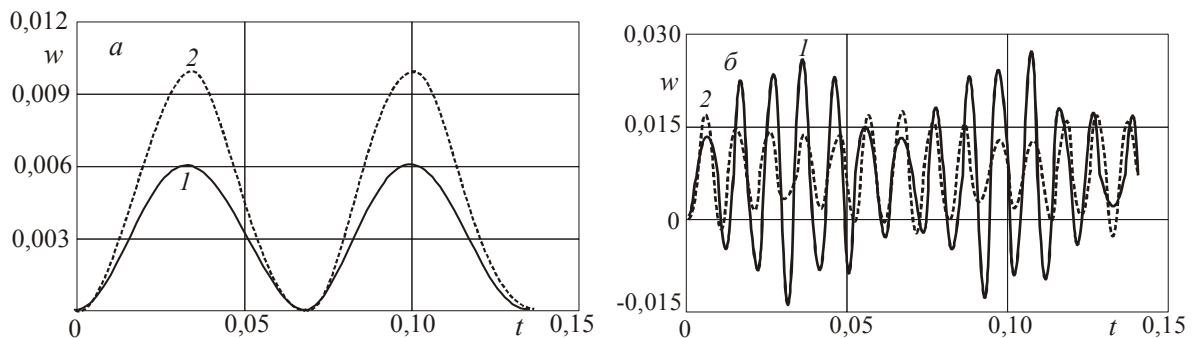


Рис. 4 – Изменение прогиба во времени при действии локальной прямоугольной нагрузки

Рис. 5 показывает изменение прогиба в центре круговой трехслойной пластины, связанной с упругим основанием, в зависимости от радиуса пятна локальной распределенной нагрузки в момент $t = 0,0354$ с. Кривые 1, 3 вычислялись с использованием формулы (24) и соответствуют воздействию синусоидальной поверхностной нагрузки, 2 – прямоугольной (22). При одинаковой амплитуде $q_0 = 7 \cdot 10^4$ Па прямоугольная нагрузка (2) вызывает больший прогиб, чем синусоидальная (1). Если равнодействующая синусоидальной нагрузки эквивалентна прямоугольной ($q_0' = \frac{1}{2} \pi q_0$), то соответствующий прогиб 3 превосходит по максимуму прогиб 2 на 36 %.

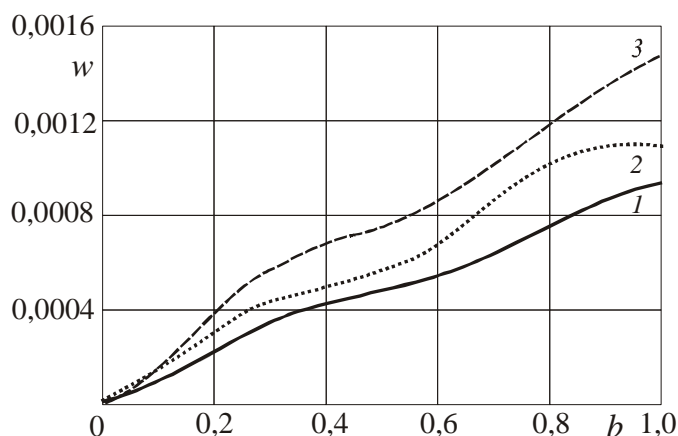


Рис. 5 – Зависимость прогиба от величины радиуса нагружения синусоидальной и прямоугольной нагрузками

Рис. 6 показывает изменение прогибов во времени при воздействии на внешнюю поверхность пластины локальной распределенной нагрузки вогнутой параболической формы (13): $1 - a = 0,5$; $2 - a = 1$. Рис. 6, a – без основания, b – на основании средней жесткости. При наличии основания максимальный прогиб уменьшается примерно в 27 раз. Распространение нагрузки на всю поверхность пластины увеличивает прогиб в 2,7 раза пластины несвязанной с упругим основанием, и в 1,6 раза при наличии основания. В этом случае амплитуда вогнутой параболической нагрузки, рассчитанная по формуле (20), превосходит интенсивность принятой прямоугольной нагрузки $q_0 = 6 \cdot 10^4$ Па в 6 раз: $q_0' = 6q_0$.

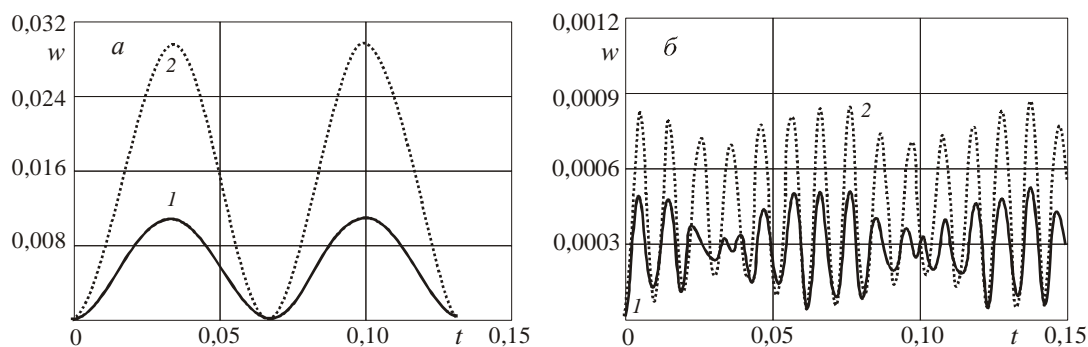


Рис. 6 – Изменение прогибов во времени при воздействии вогнутой параболической нагрузки

Закключение. Таким образом, предложена методика исследования свободных и вынужденных колебаний круглых трехслойных пластин, находящихся на упругом винклеровском основании. Получены аналитические и численные решения ряда начально-краевых задач для пластин с легким заполнителем.

Статья подготовлена по материалам доклада Международной научной конференции “Импульсные процессы в механике сплошных сред” (17-21 августа 2009, г. Николаев).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Lee C. R., Sun S. J., Kam T. Y System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates // AIAA Journal. – 2007. – 45, №9. – P. 2312–2322
3. Паймушин В. Н., Хусаинов В. Р. Уравнения и классификация свободных и собственных колебаний симметричных по толщине трехслойных пластин с трансверсально-мягким наполнителем // Мех. композиц. матер. и констр. – 2001. – Т. 7, №3. – С. 310-317.
4. Mirsa S., Singh A.V. Axisymmetric vibration of circular sandwich plates // AIAA Journal. – 1974. – 12, № 10. – P. 1418–1420.
5. Громько Ю. В. Свободные колебания трехслойной кольцевой упругой // Материалы, технологии, инструменты. – 2001. – Т.6, № 4. – С. 9-12.
6. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 379 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
8. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 295 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике – М.: Наука, 1973. – 832 с.

Рекомендовано до публікації д.т.н. К.К. Софійським 18.08.09