

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА РОДИОНОВА ДЛЯ РАСЧЕТА ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ С РАЗНОЙ СИММЕТРИЕЙ

У статті метод Родіонова узагальнений для розрахунку одновимірних ізоентропічних течій ідеальної стисливої рідини з осевою та центральною симетрією, які часто виникають при підводному електричному розряді. Проведено апроксимацію другого порядку точності найбільш поширених для таких задач граничних умов на границях типів: стінка, вільна поверхня, парогазова порожнина. Для верифікації методу були розв'язані дві тестові задачі, на прикладі яких проведено порівняння метода Родіонова з іншими методами.

GENERALIZATION OF RODIONOV METHOD FOR COMPUTATION OF 1D LIQUID FLOWS WITH DIFFERENT SYMMETRY

In this paper Rodionov's method is generalized for computation of 1D isentropic flows of ideal compressible liquid with axial and central symmetry, which frequently arise at the underwater electric discharge. Second order approximation of the most widespread for such problems boundary conditions on such boundaries as wall, free surface and fallow cavity. For method verification two test problems have been solved. On example of these problems Rodionov's method was compared with other methods.

Введение.

Гидроимпульсные технологии, основанные на использовании энергии подводного электрического разряда, получили широкое применение в промышленности для очистки трубопроводов; разрушения бетонных блоков и негабаритов; очистки поверхности судов от органических и минеральных отложений, обработке металлов и т.д. В настоящее время актуальной является проблема изучения физических процессов, возникающих при подводном электрическом разряде, с целью обоснования рациональных параметров оборудования и технологического процесса [1]. Как правило, подводный электрический разряд сопровождается образованием парогазовой полости с избыточным давлением, которая, действуя при расширении подобно поршню, порождает интенсивное движение жидкости. Базовым методом исследования подобных процессов является численное моделирование [2].

Существует множество численных методов для решения гидродинамических задач, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками, определяющими область его эффективного применения. Многолетняя практика проведения численных расчетов газодинамических течений позволила сформулировать следующие требования к численным методам: монотонность, однородность, консервативность, высокий порядок аппроксимации, экономичность [3-5]. Широкое применение для расчета газодинамических течений получил метод Годунова [6]. Метод обладает свойствами однородности, монотонности консервативности, позволяет проводить расчеты на нерегулярных и подвижных сетках, легко адаптируется для расчета течений с любой симметрией, квазиодномерных и

многомерных течений, но имеет один существенный недостаток – первый порядок аппроксимации. Из-за этого недостатка для получения необходимой точности расчета зачастую требуется существенная детализация сетки, что вызывает большие затраты машинного времени.

Для повышения точности расчетов динамики полости в работе [7] применен метод потенциала, описанный Галиевым [8]. Метод обладает вторым порядком аппроксимации и позволяет проводить расчеты с очень высокой скоростью. Однако метод не монотонный и ограничен рамками линейной акустики.

Известны работы по модернизации метода Годунова для повышения его точности В.П. Колгана, А.Н. Крайко, А.В. Родионова, Н.И. Тилляевой [9-12].

Удачным оказался метод, предложенный Родионовым для расчета течений газа [11]. Метод обладает свойствами однородности, монотонности, консервативности, позволяет проводить расчеты на нерегулярных и подвижных сетках, легко обобщается на квазиодномерные течения и одномерные течения с любой симметрией. Метод Родионова основан на идеях метода Годунова, что позволяет легко переделать имеющиеся программы расчета методом Годунова, а благодаря второму порядку аппроксимации можно значительно повысить точность расчетов без дополнительной детализации сетки. Повышение порядка аппроксимации по координате достигается за счет замены кусочно-постоянного распределения параметров кусочно-линейным, а по времени – за счет выполнения пересчета предиктор-корректор. Сохранение монотонности обеспечивается выполнением принципа минимума производной [9]. В отличие от схемы Колгана, схема Родионова устойчива при числе Куранта $k \leq 1$.

В оригинальной статье метод Родионова применен для расчета течений идеального сжимаемого газа. В работе [13] метод адаптирован для расчета квазиодномерных изоэнтропических течений идеальной сжимаемой жидкости и применен для расчета внутренней баллистики гидропушки. В настоящей работе метод обобщен для расчета одномерных изоэнтропических течений идеальной сжимаемой жидкости с осевой и центральной симметрией, которые часто возникают при подводном электрическом разряде. Проведена аппроксимация наиболее распространенных для таких задач граничных условий: стенка, движущаяся с заданной скоростью u , свободная поверхность и парогазовая полость, скорость движения которых заранее неизвестна и определяется в ходе решения. Проведена верификация метода на примере расчета динамики цилиндрической и сферической парогазовой полости, а так же оценка экономичности метода по сравнению с методом Годунова.

1. Физическая и математическая постановка задачи.

Для расчета динамики парогазовой полости при подводном электрическом разряде хорошо себя зарекомендовала модель, в которой вода считается идеальной и сжимаемой, а течение – изоэнтропическим. Зачастую такие задачи обладают осевой либо центральной симметрией, что позволяет использовать для расчета одномерную постановку. Уравнения, описывающие одномерное движение воды с разной симметрией, можно записать в виде [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} &= -N \frac{\rho u}{r}, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho + \rho u^2)}{\partial r} &= -N \frac{\rho u^2}{r}, \\ p &= B \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где t, r - время и координата; u, p, ρ - скорость, давление и плотность; $B = 304,5$ МПа, $n = 7,15$ и $\rho_0 = 1000$ кг/м³ – постоянные в уравнении состояния воды в форме Тэта. $N = 0, 1, 2$ - для движений с плоской, осевой и центральной симметрией.

Расчетная область может быть ограничена границами следующих типов:

неподвижная стенка (например, жесткая оболочка, ограничивающая объем жидкости). В этом случае на границе выполняется граничное условие

$$U_{\text{границы}} = 0, \quad (2)$$

где $U_{\text{границы}}$ - скорость жидкости на границе.

подвижная стенка, движущаяся по заданному закону. Примером такой границы может служить граница раздела парогазовой полости и жидкости, в случае, если задан закон перемещения границы R_k , который может быть взят из эксперимента по скоростному фотографированию развития полости при подводном электрическом разряде. Скорость жидкости на границе равна скорости границы и граничное условие имеет вид

$$U_{\text{границы}} = \frac{dR_k}{dt}, \quad (3)$$

свободная поверхность с заданным давлением. Давление жидкости на границе равно давлению окружающей среды, чаще всего – атмосферному, скорость заранее неизвестна и определяется в ходе решения задачи. Граничное условие имеет вид

$$P_{\text{границы}} = p_a, \quad (4)$$

граница парогазовой полости, которая является контактной поверхностью и на ней выполняются условия

$$U_{\text{границы}} = \frac{dR_k}{dt}, \quad P_{\text{границы}} = p_k, \quad (5)$$

где R_k - радиус полости, p_k - давление газа в полости.

При решении задач с граничным условием такого типа часто используется

допущение о квазистационарности динамики полости [1]. В этом случае, расширение полости описывается уравнением баланса энергии в виде

$$p_k \frac{dV_k}{dt} + \frac{d(p_k V_k)}{\gamma - 1 dt} = N_k \dot{Q}, \tag{6}$$

с начальными условиями

$$p_k \dot{Q} \Big|_{t=0} = p_{k0}, \quad V_k \dot{Q} \Big|_{t=0} = V_{k0},$$

где p_k , p_{k0} и V_k и V_{k0} - текущие и начальные значения давления и объема газа полости, $N_k \dot{Q}$ - подводится мощность, $\gamma = 1,26$ - показатель адиабаты газа в полости.

2. Аппроксимация уравнений методом Родионова.

Запишем разностную аппроксимацию уравнений (1) методом Родионова для подвижной сетки в виде

$$\begin{aligned} \rho_{i+1/2}^{m+1} &= \left\{ \rho_{i+1/2}^m \Delta r_{i+1/2}^m - \Delta t \left[R U - W \right]_i^{i+1} - N \left(\frac{\rho u}{r} \right)_{i+1/2}^{m+1/2} \Delta t \Delta r_{i+1/2}^{m+1/2} \right\} / \Delta r_{i+1/2}^{m+1}; \\ \rho u_{i+1/2}^{m+1} &= \left\{ \rho u_{i+1/2}^m \Delta r_{i+1/2}^m - \Delta t \left[R U - W \right]_i^{i+1} - N \left(\frac{\rho u^2}{r} \right)_{i+1/2}^{m+1/2} \Delta t \Delta r_{i+1/2}^{m+1/2} \right\} / \Delta r_{i+1/2}^{m+1}, \end{aligned} \tag{7}$$

где Δt - шаг по времени, $\Delta r_{i+1/2}^m = r_{i+1}^m - r_i^m$ - шаг сетки по координате на момент времени t^m ; $W_i = (r_{i+1}^{m+1} - r_i^m) \Delta t$ - скорость движения i - го узла сетки. Большими буквами R , U , P - обозначены параметры, которые рассчитываются на границах ячеек при решении обобщенной задачи Римана, или, на границах расчетной области из граничных условий. Параметры с целыми индексами i определяются в точках с координатами r_i , а параметры с полуцелыми индексами $i + 1/2$ - в точках с координатами $(r_i + r_{i+1})/2$. Нумерация узлов сетки от 0 до N слева направо.

Процедуру расчета параметров методом Родионова можно разбить на следующие этапы.

1. Определение приращений параметров течения внутри ячейки на основании принципа минимальной производной Колгана:

$$\begin{aligned} \Delta f_{i+1/2} &= \begin{cases} \Delta f_{i+1}, & |\Delta f_{j+1}| \leq |\Delta f_i|; \\ \Delta f_i, & |\Delta f_{j+1}| > |\Delta f_i|. \end{cases} \\ \Delta f_i &= f_{i+1/2}^m - f_{i-1/2}^m, \quad \Delta f_{i+1} = f_{i+3/2}^m - f_{i+1/2}^m. \end{aligned}$$

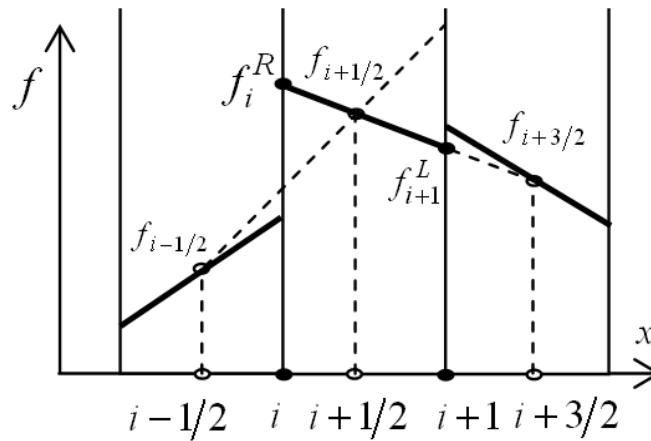


Рис. 1 - Определение параметров внутри ячейки

Здесь $f = \rho u$ - один из параметров течения. Распределение параметров по координате в методе Родионова предполагается кусочно-линейным и определяется на основании принципа минимальной производной Колгана, как показано на рис. 1.

2. Определение параметров по обе стороны границы ячейки:

$$f_i^L = f_{i-1/2}^m + \Delta f_{i-1/2} / 2, \quad f_i^R = f_{i+1/2}^m - \Delta f_{i+1/2} / 2.$$

Здесь верхними индексами R и L отмечены параметры справа и слева от границы ячейки с номером i .

3. Предварительный расчет параметров $\tilde{f}_{i+1/2}^{m+1}$ через шаг по времени по формулам (7), в которых производится замена

$$f_{i+1/2}^{m+1} = \tilde{f}_{i+1/2}^{m+1}, \quad f_i = f_i^R, \quad f_{i+1} = f_{i+1}^L.$$

4. Уточнение параметров по обе стороны от границы ячейки:

$$\tilde{f}_i^L = \left[\tilde{f}_{i+1/2}^{m+1} + f_{i-1/2}^m + \Delta f_{i-1/2} \right] / 2, \quad \tilde{f}_i^R = \left[\tilde{f}_{i+1/2}^{m+1} + f_{i-1/2}^m - \Delta f_{i+1/2} \right] / 2.$$

5. Определение «больших» величин R, U, P на боковых гранях ячейки из решения задачи о распаде произвольного разрыва с начальными значениями параметров на разрыве \tilde{f}_i^L и \tilde{f}_i^R . Для изоэнтропического течения из условий на характеристиках имеем:

$$U_i = \frac{\tilde{u}_i^R + \tilde{u}_i^L}{2} + \frac{\tilde{a}_i^L - \tilde{a}_i^R}{n-1}, \quad A_i = \frac{\tilde{a}_i^R + \tilde{a}_i^L}{2} + \frac{n-1}{4} (\tilde{a}_i^L - \tilde{u}_i^R),$$

где $a = \sqrt{n \rho + B} / \rho$ - скорость звука в воде. Давление и плотность рассчиты-

ваются по формулам

$$P = B \left[\left(\frac{A}{a_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1 \right], \quad R = \rho_0 \left(\frac{A}{a_0} \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

где $a_0 = \sqrt{nB/\rho_0}$ - характерная скорость звука в воде.

6. Окончательный расчет параметров $f_{i+1/2}^{m+1}$ по формулам (7) (операция корректор).

Аппроксимация по такому алгоритму имеет второй порядок по времени и координате. Шаг по времени ограничен модифицированным условием устойчивости Куранта [3]

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{a_{i+1/2} + W_i}, \frac{\Delta x_{i+1/2}}{a_{i+1/2} - W_{i-1}} \right).$$

3. Аппроксимация граничных условий.

Аппроксимация граничных условий, описанных выше, проводилась со вторым порядком точности по следующему алгоритму.

Парогазовая полость. Пусть, для определенности, левая граница расчетной области является парогазовой полостью, образованной при подводном электрическом разряде, к которой подводится энергия мощностью N_k . Аппроксимацию граничных условий (5), (6) на полости проведем в следующем порядке.

Определение параметров по правую сторону границы по формуле

$$f_0^R = f_{1/2}^m - \Delta f_{1/2} / 2.$$

Разложение в ряд Тейлора для этого выражения дает следующую оценку погрешности аппроксимации

$$f_0^R = f_{1/2}^m - f'_{x=1/2} \Delta x / 2 + f''_{x=1/2} \Delta x^2 / 8 + \dots = f_{1/2}^m - \Delta f_{1/2} / 2 + O(\Delta x^2).$$

Расчет скорости границы ячейки в текущий момент времени из условия на характеристике второго семейства

$$U_0^m = \frac{2}{n-1} (a_0^m - a_0^m) \mp u_0^m.$$

Поскольку точность вычисления параметров определяется погрешностью

расчета величин a_0^m и u_0^m , а так же погрешностью, связанной с приближенным решением задачи Римана [4], то для оценки погрешности имеем

$$U_0^m = \frac{2}{n-1} \left(a_0^m - a_0^m \right) + u_0^m + O(x^2).$$

Скорость звука на границе A_0^m определяется по давлению газа внутри полости p_k^m .

Определение положения границы через шаг по времени

$$R_k^{m+1} = R_k^m + \tau \cdot U_0^m + O(x^2).$$

Оценка погрешности выполнена методом разложения в ряд Тейлора, как это было сделано в п. 1.

Расчет давления внутри полости на следующем временном слое из уравнения баланса энергии

$$p_k^{m+1} = \left[2\Delta t \cdot N^{m+1/2} - p_k^m \left(V_k^{m+1} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_k^m \right) \right] / \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} V_k^{m+1} - V_k^m \right).$$

Уточнение давления внутри полости:

$$p_k^{m+1/2} = \left(p_k^{m+1} + p_k^m \right) / 2.$$

Предварительный расчет параметров $\tilde{f}_{1/2}^{m+1}$ через шаг по времени по формулам (7), в которых производится замена

$$f_{1/2}^{m+1} = \tilde{f}_{1/2}^{m+1}, \quad f_0 = f_0^R.$$

Уточнение параметров по правую сторону границы

$$\tilde{f}_0^R = \left(\tilde{f}_{1/2}^{m+1} + f_{1/2}^m - \Delta f_{1/2} \right) / 2 + O(x^2, \Delta t^2).$$

Погрешность вычисления параметров определяется аналогично п. 1.

Уточнение скорости границы из условий на характеристике второго семейства.

$$U_0^{m+1/2} = \frac{2}{n-1} \left(a_0^{m+1/2} - a_0^{m+1/2} \right) + u_0^{m+1/2}.$$

Скорость звука на границе $A_0^{m+1/2}$ определяется по давлению газа внутри

полости $p_k^{m+1/2}$.

Приведенный алгоритм позволяет рассчитывать параметры на границе «парогазовая полость - жидкость» со вторым порядком точности.

Стенка. Рассмотрим левую границу расчетной области, которая представляет собой стенку, зависимость положения которой от времени R_k задана (в частном случае $R_k = R_{k_0} = const$). В этом случае скорость жидкости на границе определяется из граничного условия (3), а скорость звука находится по условию на характеристике второго семейства. Давление и плотность находятся по известной скорости звука из уравнения состояния. Аппроксимацию со вторым порядком точности проводим по алгоритму, аналогичному описанному выше для полости. Определив параметры по правую сторону границы через половину шага по времени, можно рассчитать «большие» величины по условию на характеристике второго семейства

$$A_0^{m+1/2} = a_{1/2}^{m+1/2} + \frac{n-1}{2} (u_0^{m+1/2} - u_{1/2}^{m+1/2}) + O(x^2, \Delta t^2).$$

Свободная поверхность. Пусть правая граница расчетной области является свободной поверхностью, которая движется с переменной скоростью, зависящей от давления жидкости вблизи границы. Как известно, давление на свободной поверхности постоянное и равно атмосферному. Отсюда следует, что скорость звука на свободной поверхности постоянная и равна $a_0 = \sqrt{nB/\rho_0}$. Неизвестная скорость жидкости на свободной поверхности находится по условию на характеристике первого семейства по формуле

$$U_{N-1/2}^{m+1/2} = u_{N-1/2}^{m+1/2} + \frac{2}{n-1} (u_{N-1/2}^{m+1/2} - a_0),$$

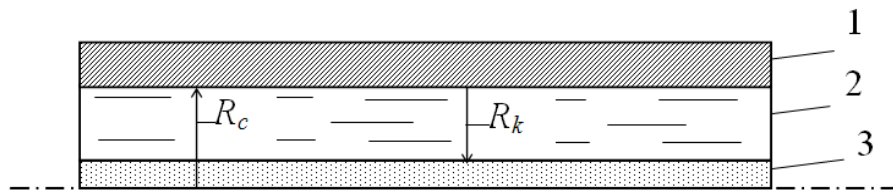
Параметры с левой стороны границы приграничной ячейки через половину шага по времени определяются по такой же методике, как и для полости.

4. Тестирование метода.

Динамика цилиндрической полости. Рассмотрим следующую задачу, возникающую при развальцовке и запрессовке труб с использованием подводного электрического разряда. В работе [14] задача была решена методом Годунова, а в настоящей работе использовалась для верификации метода Родионова.

На оси цилиндрического объема радиусом R_c , заполненного покоящейся жидкостью и ограниченного жесткой оболочкой, происходит электрический разряд (рис. 2). Требуется рассчитать движение жидкости. При этом жидкость считается идеальной и сжимаемой, ее течение изоэнтропическим. Так же будем считать, что в начальный момент времени канал разряда полностью сформировался и имеет цилиндрическую форму с радиусом R_{k_0} . В дальнейшем он расширяется по заданному закону, сохраняя при этом цилиндриче-

скую форму.



1 – оболочка, 2 – вода, 3 – канал разряда
Рис. 2 – Схема динамики цилиндрической полости

Течение жидкости в принятой постановке описывается системой (1) со следующими начальными и граничными условиями:

$$u(r, 0) = 0, \quad p(r, 0) = p_0, \quad \rho(r, 0) = \rho_0, \quad R_{k_0} < r < R_c,$$

$$u(R_k, t) = \frac{dR_k}{dt}, \quad u(R_c, t) = 0.$$

Задача решалась для различных законов расширения полости, которые взяты из работы [14] в виде

$$R_k = R_{k_0} + \tilde{A}_0 \tilde{B}_0 t; \quad R_k = R_{k_0} + \tilde{A}_0 \sin \tilde{\omega}_0 t$$

Расчет выполнялся методом Родионова на сетке, разрешением $\tilde{N} = 200$ ячеек, для следующих данных [14]: $R_{k_0} = 0,232$ мм, $R_c = 10$ мм, $p_0 = 0,1$ МПа, $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $\tilde{A}_0 = 5$ мм, $\tilde{B}_0 = 10^5$ с⁻¹. Здесь и далее использовались равномерные подвижные сетки, опирающиеся на границы расчетной области. Шаг сеток определялся по формуле $h = (R_c - R_k) / \tilde{N}$. На рис. 3 представлены зависимости давления на границе канала разряда от времени, полученные методом Годунова (сплошные линии 1 и 2) и методом Родионова (штриховые линии 3 и 4). Как видно, решения методом Годунова и Родионова хорошо совпадают, но при этом размазывание волн методом Родионова значительно меньше.

Динамика сферической полости. Для тестирования метода на задачах с центральной симметрией рассчитана динамика сферической парогазовой полости (рис. 4) со следующими условиями. В центре замкнутого сферического объема, радиусом $R_c = 10$ мм, заполненного покоящейся водой, в результате электрического разряда, образуется парогазовая полость, радиусом $R_{k_0} = 0,232$ мм [14], с давлением $p_{k_0} = 30$ МПа (для расчета течений с такими давлениями можно использовать метод потенциала [7, 8]). Необходимо рассчитать течение жидкости. При этом считалось, что канал разряда в начальный момент времени полностью сформирован и имеет сферическую форму, расширение газа

происходит квазистационарно и адиабатически, при этом форма полости остается сферической.

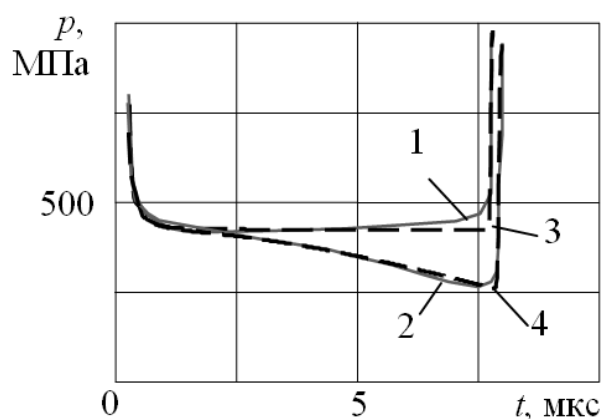


Рис. 3 – зависимости давления на границе канала разряда от времени

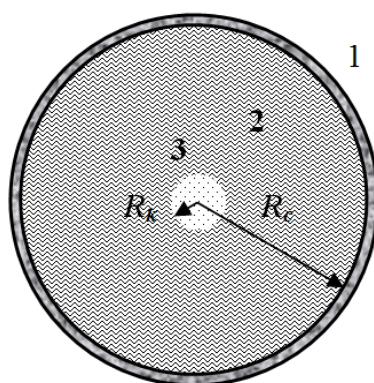


Рис. 5 – зависимость радиуса полости от времени

На рис. 5 представлена зависимость радиуса полости от времени. Расчеты проводились методом Родионова на сетке 200 ячеек (штриховая кривая) а так же методом Годунова (сплошная кривая) и методом потенциала (отмечено кружочками) на сетках 2000 ячеек. Как видно, решения разными методами хорошо совпадают, как для амплитудных значений радиуса, так и для времени пульсаций парогазовой полости.

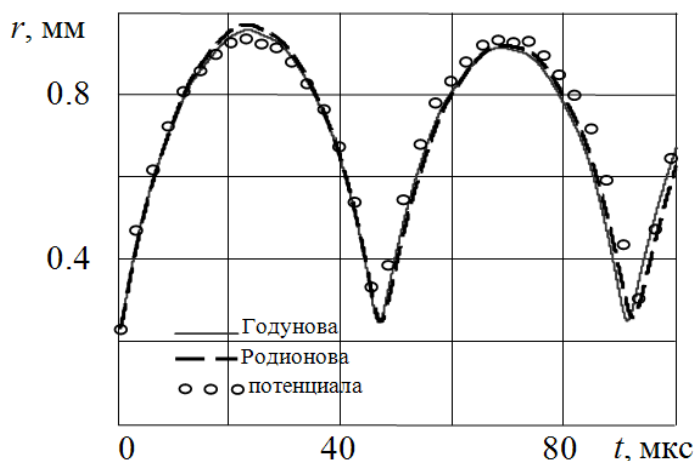
5 Оценка экономичности метода Родионова.

На примере расчета динамики сферической парогазовой полости, рассмотренного выше, была проведена оценка экономичности метода Родионова по сравнению с методом Годунова. Для этого сравнивалось расчетное время для получения решения заданной точности. Для определения точности сравнивались максимальный радиус полости R_{\max} и период пульсаций T , полученные разными методами. В предыдущих работах по расчету методом Годунова было показано, что расчет на сетке с относительным шагом $\tilde{h} = h/R_{k_0} < 0,01$ дает результат высокой точности [15], поэтому за эталонное было принято решение методом Году-

нова на сетке 5000 ячеек. Точность расчетов вычислялась по формуле:

$$\sigma = \left| \frac{\Delta - \Delta_{5000}}{\Delta_{5000}} \right|,$$

где $\Delta = R_{\max}, T$ - один из параметров, индексом 5000 обозначено эталонное решение.



Решение методом Родионова проводилось на сетке разрешением 200 ячеек. Разрешение сетки при решении методом Годунова подбиралось таким образом, чтобы точность расчета, максимально приближаясь к точности расчета методом Родионова, оставалась немного меньше. Для достижения такой точности методом Годунова потребовалось разрешение сетки 1000 ячеек. При этом затраты машинного времени при расчете методом Годунова приблизительно в 14 раз превышали машинное время на расчет методом Родионова.

Заключение.

В настоящей работе метод Родионова обобщен для расчета одномерных течений с осевой и центральной симметрией. Проведена аппроксимация граничных условий со вторым порядком точности на границах типа стенки, свободной поверхности и парогазовой полости, которые часто встречаются при расчете подводного электрического разряда. Метод Родионова опробован для решения тестовых задач динамики сферической и цилиндрической парогазовой полости. Сравнение решения с другими методами показало высокую точность, экономичность и надежность метода. Так при расчете динамики сферической парогазовой полости методами Родионова и Годунова с одинаковой точностью, метод Родионова оказался в 14 раз более экономичным.

Статья подготовлена по материалам доклада Международной научной конференции "Импульсные процессы в механике сплошных сред" (17-21 августа 2009, г. Николаев).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулый Г. А. Научные основы разрядноимпульсных технологий. – К.: Наукова думка, 1990. – 208 с.
2. Головки Ю.Н. Расчет течения жидкости при электрическом разряде в замкнутом объеме // Гидромеханика.- 1980.-Вып. 42.- С. 111 - 115.
3. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. – 661 с.
4. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
5. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене. – К.: Наукова думка, 2003. – 380 с.
6. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Том 47 (89). № 3. С. 207-306.
7. Решетняк В. В., Семко А. Н. Монотонизация разностной схемы решения задач линейной акустики методом потенциала // Математичне моделювання.- 2007, № 2(17). - С. 86 – 90.
8. Галлиев Ш. У. Динамика гидроупругопластических систем. – Киев:Наукова думка, 1981. – 276 с.
9. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных течений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Том 3. № 6. С. 68-77.
10. Копченков В. И., Крайко А. Н. Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1983. - Т. 23. № 4. – С. 848 – 859.
11. Родионов А. В. Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1987. - Т. 27. № 12. – С. 1853 – 1860.
12. Тилляева Н. И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Уч. зап. ЦАГИ, 1986. Т.17. № 2. - С. 18-26.
13. Семко А.Н., Решетняк В.В. Применение метода Родионова для расчета квазиодномерных течений сжимаемой жидкости // Тези науково-практичної конференції «Компютерна гідромеханіка». – Київ: ІГМ НАН України, 2008. – С. 44 – 46.
14. Поздеев В.А., Семко А.Н. О движении жидкости при электрическом разряде в цилиндрическом объеме. // Аэрогазодинамика нестационарных процессов. - Томск: ТГУ, 1987. - С. 121-124.
15. Семко А. Н. Динамика сферической полости при разных условиях // Теорет. и прикл. механика. - 1998. - Вып. 28. - С. 146 - 151.

Рекомендовано до публікації д.т.н. К.К. Софійським 18.08.09