УДК 517.9

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Об одной проблеме минимума со свободной границей

Solvability of a boundary-value problem with the Bernoulli condition on a free boundary is proved. By using the Ritz method, an approximate solution convergent to the exact solution in the metric C is constructed.

1. Постановка задачи потенциального течения. Введем следующие обозначения:

$$A = (0 \leqslant x \leqslant a,\ y = 0), \qquad Q_1 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant c), \qquad Q_2 = (x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b),$$

где $0 < c < b$. Далее, пусть P — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, причем $g(0) = c$, $g(a) = b$, $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$. Обозначим D — область, ограниченную отрезком A, кривой P и образующими Q_1 и Q_2, а γ — достаточно гладкую кривую без самопересечений, расположенную в $D \bigcup P$. При этом одним концом γ является точка $(0, c)$, а другой лежит на образующей Q_2, разбивая ее на две части: верхнюю $Q_{1\gamma}$ и нижнюю $Q_{2\gamma}$, т. е. $Q_2 = Q_{1\gamma} \bigcup Q_{2\gamma}$; $D_\gamma \subset D$ — область, ограниченная отрезком A, образующими Q_1 и $Q_{2\gamma}$ и кривой γ.

Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу со свободной границей γ. Требуется определить односвязную область D_γ и определенную в ней функцию тока $\psi(x, y)$ по таким условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in D_\gamma, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in A, \tag{2}$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in Q_1 \bigcup Q_{2\gamma}, \tag{3}$$

$$\psi(x, y) = 1, \qquad (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

$$\psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \geqslant v^2, \qquad (x, y) \in \gamma, \qquad v = \mathrm{const} > 0, \tag{5}$$

причем на части γ, лежащей внутри D, в (5) всегда должно выполняться равенство.

Задача (1)–(5) возникает при изучении струйных течений жидкости в достаточно удлиненной, но конечной части D бесконечно длинного сопла.

2. Вариационная постановка задачи. Рассмотрим функционал с переменной областью интегрирования

$$I(\psi, D_\gamma) = \iint\limits_{D_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + v^2)\, dxdy \tag{6}$$

на множестве R допустимых пар (ψ, D_γ), удовлетворяющих следующим условиям: γ — жорданова дуга, расположенная в $D \bigcup P$, одним концом которой является точка $(0, c)$, а другим — точка (a, b), причем все точки γ, исключая конец $(0, c)$, расположены выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области D_γ, равна единице на γ, нулю на отрезке A и имеет непрерывно дифференцируемые производные в D_γ, при этом $I(\psi, D_\gamma) < \infty$.

Перейдем теперь к описанию симметризации области D_γ относительно осей координат по Штейнеру [1]. Определим симметризацию области D_γ относительно оси. Для этого дополним $\Omega = \Pi \setminus D_\gamma$, где $\Pi = \{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$ областью, симметричной относительно оси y. Просимметризируем ее относительно этой оси и правую половину полученной области обозначим Ω^*. Тогда $D_y^* = \Pi \setminus \Omega^*$ есть результат симметризации области D_γ относительно оси y.

Симметризацию области D_γ относительно оси x определим так. Дополним Ω областью, симметричной относительно прямой $y = b$. Просимметризируем ее относительно этой прямой и нижнюю половину полученной области обозначим G^*. В результате этой симметризации получим новую область $D_y^* = \Pi \setminus G^*$, являющуюся результатом симметризации D_γ относительно оси x. Справедлива лемма о симметризации ([1], лемма 1.4).

Лемма. *Пусть $\psi(x, y)$ — решение задачи (1)–(4) в области D_γ, а $\psi^*(x, y)$ — решение этой задачи в области D^* со свободной границей γ^*, полученной из D_γ при помощи симметризации относительно осей координат. Тогда $I(\psi^*, D^*) \leqslant I(\psi, D_\gamma)$, причем $\psi_y^*(x, y) > 0$ в D^*, а γ^* может быть задана уравнением*

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $x(t)$, $y(t)$ — неубывающие функции при $t \in [0, T]$.

Используя вариационную природу задачи (1)–(5), лемму о симметризации и метод внутренних вариаций Шиффера [1], доказывается теорема.

Теорема 1. *Пусть P — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $g = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$, и пусть выполнены условия:*

$$vc < 1, \qquad \frac{a}{c\int\limits_0^a \sqrt{1 + g_x^2}dx} < v.$$

Тогда существует пара (ψ, γ), являющаяся классическим решением задачи (1)–(5). При этом пара (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ — монотонно возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей внутренней точки, лежащей внутри D и $\psi_y > 0$ в D_γ.

Справедлива также теорема.

Теорема 2 ([2], теорема 1). *Пусть выполнены условия*

$$vb < 1, \qquad v\int\limits_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + g_x^2}dx + \frac{a - a_2}{b} > \frac{a - a_1}{c},$$

и пусть $g(x) \in C^2[0, a]$, $g(x) = c$ при $x \in [0, a_1]$, $g(x) = b$ при $x \in [a_2, a]$, где $a_1 < a_2$, и, кроме того, $g(x)$ — монотонно возрастающая кривая при $x \in [0, a]$. Тогда существует пара (ψ, γ), являющаяся решением задачи (1)–(5) и удовлетворяющая следующим условиям: $\psi(x, y)$ — функция, непрерывная в $\overline{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируемая в $\overline{G}_\gamma$, $\psi_y(x, y) > 0$, в G_γ; γ — монотонно возрастающая кривая, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G.

3. Вихревое течение со свободной границей. Изучается вихревое течение жидкости в достаточно длинной области в случае двух геометрических переменных, когда интенсивность вихря характеризуется величиной $\omega = \mathrm{const} > 0$. Требуется определить односвязную область D_γ и определенную в ней функцию тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega, \qquad (x, y) \in D_\gamma \tag{7}$$

и условиям (2)–(5).

Теорема 3. *Пусть P — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, причем $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$, и пусть выполнены условия:*

$$v < \frac{1}{c} + \frac{\omega}{2}c, \qquad \frac{\omega \operatorname{mes} D + \left(1 - \dfrac{\omega}{2}c^2\right)\dfrac{a}{c}}{\displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + g_x^2}\,dx} < v.$$

Тогда существует пара (ψ, γ), являющаяся классическим решением задачи (1)–(5). При этом пара (ψ, γ) удовлетворяет таким условиям: γ — монотонно возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей внутренней точки, лежащей внутри D, и $\psi_y > 0$ в D_γ.

Теорема существования в осесимметрическом случае изложена в [3] для $v = \mathrm{const}$ и для аналитической функции $v = v(x, y)$ в [4].

4. Построение приближений Ритца. Согласно известной методике Фридрихса [1], представим функционал (6) в виде

$$I_1(z) = \iint\limits_{\Delta} \left[\left(z_x + \frac{g_x}{g}z\right)^2 + \frac{1}{g^2} + v^2 z_\varphi^2\right]\frac{g}{z_\varphi}\,dx\,d\varphi \tag{8}$$

где $\Delta = (0 < x < a,\ 0 < \varphi < 1)$, $\varphi(x, z) = \psi(x, zg(x))$, а $z(x, \varphi)$ — решение уравнения $\varphi(x, z) - \varphi = 0$. Функционал (8) будем минимизировать на множествах

$$D_z^1 = \{z\colon z \in C^1(\overline{\Delta}),\ z(a_1, 1) = 1,\ z(x, 0) = 0,\ \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta}} z_\varphi > 0\}$$

или

$$D_z^2 = \{z\colon z \in C^1(\overline{\Delta}),\ z(a_1, 1) = 1,\ z(a_2, 1) = 1,\ z(x, 0) = 0,\ \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta}} z_\varphi > 0\}.$$

Здесь множество D_z^1 используется в случае теоремы 1, а D_z^2 — для теоремы 2.

Будем минимизировать функционал (7) на множествах при помощи сумм

$$z_n(x, \varphi; a_{kj}(g)) = z_n(x, \varphi; g) = z_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(g)x^j\varphi^k, \qquad \sup_{1\leqslant k\leqslant m}(k + m_k) = n.$$

Выделим в пространстве E_r коэффициентов a_{kj} область допустимости D_r^1 и D_r^2, где

$$r = \sum_{k=1}^{m}(m_k + 1), \qquad D_r^1 = E_r^0 \bigcap G_r^+, \qquad E_r^0\colon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}a_1^j - 1 = 0,$$
$$G_r^+ = \left\{a_{kj}\colon \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta}} z_{n\varphi}(x, \varphi) > 0\right\}, \quad D_r^2 = E_r^1 \bigcap G_r^+, \quad E_r^1\colon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}a_2^j - 1 = 0. \tag{9}$$

Неизвестные коэффициенты $a_{kj} \in D_r^1$ и множитель Лагранжа λ определяются из нелинейной системы Ритца:

$$\begin{gathered}\frac{\partial I_2(a_{kj})}{\partial a_{pq}} + \lambda a_1^q = 0, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, m_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1 = 0, \qquad I_2(a_{kj}) = I_1\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Аналогичным образом строится система Ритца в случае множества D_r^2.

В работе [2] доказана сходимость приближений Ритца к точному решению $z_0(x,\varphi)$, соответствующему классическому решению (ψ,γ) задач (1)–(5) (в случае множества D_z^1) или (2)–(5), (7) (для множества D_z^2) по норме в $C(\overline{\Delta})$ и $W_2^1(\Delta)$. Построение приближений Ритца для вихревого течения в осесимметрическом случае изложено в [3].

5. Построение первого приближения. Рассмотрим следующее приближение: $z_1(x,\varphi) = (\alpha + \beta x^2)/g(x)$, где α и β — коэффициенты, подлежащие определению, а $(x,\varphi) \in \overline{\Delta}$. Учитывая, что $z_1(0,1) = 1$, а $z_1 \in D_z$, находим $\alpha = c$. Далее, подставляя выражение для $z_1(x,\varphi)$ в функционал (8), после интегрирования получаем

$$I_1(z_1) = \frac{4}{3}\beta\left[a - \sqrt{\frac{c}{\beta}}\,\mathrm{arctg}\, a\sqrt{\frac{\beta}{c}}\right] + \frac{1}{\sqrt{c\beta}}\,\mathrm{arctg}\, a\sqrt{\frac{\beta}{c}} + v^2 ac + \frac{1}{3}v^2\beta a^3.$$

Неизвестный коэффициент β найдем из условия $dI_1(z_1)/d\beta = 0$. Решим это уравнение, считая параметр a достаточно большим. Тогда получим

$$\beta = \frac{c}{a^2}\frac{\dfrac{1}{c^2} - v^2}{2v^2 + \dfrac{2}{3a^2} + \dfrac{1}{c^2}} + O\left(\frac{1}{a^2}\right).$$

Заметим, что в силу теоремы 1 всегда $cv < 1$. Таким образом, построив приближение $z_1(x,\varphi)$, можно записать уравнение свободной границы $y(x,1) = g(x)z_1(x,1)$ и вычислить "ширину струи" при $x = a$, что имеет практический интерес при исследовании струйных течений.

6. Оптимальное управление свободной границей. Обозначим U — множество допустимых управлений, элементами которого являются функции $y = g(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Очевидно, что коэффициенты Ритца a_{kj}, определяемые при решении системы (10), будут теперь зависеть от элемента $g \in U$, т. е. $a_{kj} = a_{kj}(g)$.

Далее, пусть γ_0 — заданная допустимая кривая. Введем в рассмотрение функционал

$$F(g) = \int_0^a [y(x;g) - y_0(x)]^2 dx, \qquad g \in U,$$

где $\gamma_0\colon y = y_0(x)$, $\gamma(g)\colon y = y(x;g)$, $x \in [0;a]$. Задача состоит в нахождении элемента $g \in U$ (оптимальное управление), доставляющего наименьшее значение функционалу $F(g)$ на множестве U. В терминах функции $z(x,\varphi;g)$ этот функционал имеет вид

$$F(g) = \int_0^a [g(x)\cdot z(x,1;g) - y_0(x)]^2 dx. \tag{11}$$

Здесь $\gamma(g)\colon\, y = g(x) \cdot z(x, 1; g)$. Допустим, что U не только замкнутое, но и компактное множество. Например, если имеются две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1 и такие, что $g_1'(x) \geqslant g_2'(x)$ при $x \in [0; a]$, то в качестве U можно взять множество вида:

$$U = U(\varepsilon) = \{g_\varepsilon(x)\colon\, g_\varepsilon(x) = g_1(x) + \varepsilon(g_2(x) - g_1(x)),\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant a\}.$$

Множество U по теореме Арцела компактно в $C[0, a]$, так как оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Выбирая теперь минимизирующую относительно функционала $F(g)$ последовательность $g_n \in U$, заметим, что в силу [2] функционал (11) будет непрерывным по g.

Теорема 4. *Пусть множество U является замкнутым и компактным. Тогда существует управление $g^* \in U$ доставляющее наименьшее значение функционалу* (11) *на множестве U для каждого конечномерного приближения, основанного на методе Ритца.*

Замечание. В работах [5, 6] вариационный подход был использован при исследовании теплофизической задачи типа Стефана.

1. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.
2. *Миненко А. С.* О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1385–1394.
3. *Миненко А. С.* Осесимметричное течение со свободной границей // Там же. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–488.
4. *Миненко А. С.* Аналитичность свободной границы в одной задаче осесимметричного течения // Там же. – 1998. – **50**, № 2. – С. 1692–1700.
5. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291–294.
6. *Миненко А. С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Там же. – 1979. – № 6. – С. 413–416.

Институт проблем искусственного интеллекта НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 17.04.2007