УДК 681.325.5.068

В.П. КОЖЕМ'ЯКО, Н.В. САЧАНЮК-КАВЕЦЬКА, Л.О. ВОЛОНТИР

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ ІНТЕГРУВАННЯ ЛОГІКО-ЧАСОВОЇ ФУНКЦІЇ НАПІВТОНОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Вінницький національний технічний університет,
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна,
тел.:(+380) (432) 511631, факс: (+380) (432) 433375
E-mail: *kvp@vstu.vinnica.ua*

Анотація: В статті розглядаються питання визначення операції інтегрування та знаходження первісної логіко-часових функцій k- значної логіки, властивості інтегрування напівтонових зображень для підвищення ефективності око-процесорної обробки зображень та можливості перетворення аналогового сигналу в дискретний кількісний вираз.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы определения операции интегрирования и определения первообразной логико-часовой функции k-значной логики, свойства интегрирования ЛЧФ полутоновых изображений с целью повышения эффективности глаз - процессорной обработки изображений та возможности преобразования аналогового сигнала в дискретный.

Ключові слова: око-процесор, логіко-часова функція (ЛЧФ), первісна, інтеграл, напівтонове зображення, проміжок існування.

ВСТУП

Найбільш досконалим природним прототипом технічного зору є око людини. Дія людського ока базується на мозковій діяльності. Тому при аналізі такого підходу до обробки оптичної інформації з'являється проблема інтуїтивних рішень. Найбільш цікавою задачею є створення теоретичного обґрунтування нетрадиційних методів обробки інформації, які зможуть виконувати обробку інформації не за звичайними принципами, а наближаючись до форми обробки людським мозком. Найбільш цікавою задачею цієї проблеми є ідентифікування зображень. Тобто ставиться мета розробки оптимальної системи технічного зору.

Науковою школою Кожем'яко В.П. дано визначення око-процесора як інформаційної інтелектуальної системи, що моделює образне відображення світу на основі сприйняття візуальної інформації довільної природи, виділяє певні властивості та ознаки середовища, обробляє та приймає відповідні рішення автоматично або з участю оператора [5, 6]. Особливістю такого око-процесора є можливість інтелектуального прийняття рішень в процесі оброблення і аналізу зображень і розпізнавання образів.

Серед основних функцій око-процесора як інтелектуальної системи присутні такі:

- розпізнавання деякого об'єкта у заданому класі зображень за еталонним об'єктом або при його відсутності за апріорними ознаками, що виділяються в процесі аналізу зображень;
- автоматичне відстеження параметрів визначеного об'єкта зображень за умов його еволюції, тобто зміни положення, розмірів, яскравості, моментних ознак тощо [1-4].

1. © В.П. КОЖЕМ'ЯКО, Н.В. САЧАНЮК-КАВЕЦЬКА, Л.О. ВОЛОНТИР, 2009

Крім, того око-процесор виконує ряд допоміжних функцій, які пов'язані з нормуванням зображень, а саме, зсув, затримку, попередню фільтрацію, виконання деяких логічних та математичних операцій [1-6, 8].

Математичні операції над логіко-часовими функціями дозволяють вдосконалити формальний апарат аналізу математичних моделей [7, 8].

Визначення. Первісна ЛЧФ k- значної логіки – це k- значна логіко-часова функція $F(t,t_1,...,t_m,T_1,...,T_m,a_1,.,.,a_m)$, для якої виконується рівність:

$$F'(t,t_1,...,t_m,T_1,...,T_m,a_1,.,.,a_m) = f(t,t_1,...,t_m,T_1,...,T_m,a_1,.,.,a_m) \qquad (1)$$

Арифметичне логіко-часове додавання двох ЛЧФ k- значної логіки визначається так:

$$f(t,t_1,T_1,a_1) + f(t,t_2,T_2,a_2) =$$

$$= \begin{cases} (t-t_1)a_1, & якщо\ t_1 < t < t_2 \\ (t-t_2)(a_1+a_2), & якщо\ t_2 \le t \le \min(t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1), t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)) \\ (t-(t_2+T_2))a_1, & якщо \quad \min(t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1), t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)) < t \le \\ & \le \max(t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1), t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)) \quad \wedge \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1), t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)) = t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2) \\ (t-(t_1+T_1))a_2 & якщо \quad \min(t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1), t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)) < t \le \\ & \le \max(t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1), t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)) \quad \wedge \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1), t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)) = t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1) \\ 0, & якщо\ t_1 \ge t > \max(t_1 + f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1), t_2 + f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)) \end{cases}$$

Теорема 1. Первісна нерівнозначного віднімання (|*k*|) ЛЧФ k- значної логіки дорівнює нерівнозначному відніманню (|*k*|) первісних цих функцій.

Доведення. Доведемо дану теорему методом повної математичної індукції.

1. Нехай $T_1=T_2=\Delta_i$. Тоді ЛЧФ f_1 та f_2 матимуть вигляд:

$$f_i(t,t_i,\Delta_i,a_i) = \begin{cases} (t-t_i)a_i, якщо \quad t_i < t \le t_i + \Delta_i \\ 0, \quad якщо\ (t \le t_i) \wedge (t > t_i + \Delta_i) \end{cases}, \quad i = 1,2 \qquad (2)$$

Знайдемо нерівнозначну різницю f_1 та f_2 виду (2.2.2.2) за модулем *k*., отримаємо:

$$f_1(t,t_1,\Delta_i,a_1)|k|f_2(t,t_2,\Delta_i,a_2) =$$

$$= \begin{cases} (t-(t_p+\Delta_i))|a_1-a_2|, t_p = \min(t_1,t_2), & якщо \min(t_1,t_2) \le t \le \\ & \le \quad \max(t_1 + f_1(t_1+\Delta_i,t_1,\Delta_i), t_2 + f_2(t_2+\Delta_i,t_2,\Delta_i)) \\ 0, \qquad якщо & t < \min(t_1,t_2) \vee \\ & \vee \quad \max(t_1 + f_1(t_1+\Delta_i,t_1,\Delta_i), t_2 + f_2(t_2+\Delta_i,t_2,\Delta_i)) > t \end{cases}$$

(3)

Збільшимо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ_i розіб'ємо на два. Отримаємо інтервал $\Delta_i' = \Delta_i/2$. Кількість таких інтервалів буде $n'=2n$.

Знайдемо первісну ЛЧФ (3):

$$\int f_1(t,t_1,\Delta_i,a_1)|k|f_2(t,t_2,\Delta_i,a_2)dt =$$

$$= \begin{cases} [t-(t_p+k\Delta'_i)]|a_1-a_2| \quad ,t_p=\min(t_1,t_2),\ t_p+2k\Delta'_i<t\le t_p+(2k+1)\Delta'_i,\ k-\textit{порядковий номер} \\ \Delta-\textit{інтервалу};\quad k=0,\overline{\frac{\max(t_1+f_1(t_1+\Delta_i,t_1,\Delta_i),t_2+f_2(t_2+\Delta_i,t_2,\Delta_i))-t_p}{\Delta_i}-1} \\ 0,\quad t\le t_p \wedge t>t_p+\max(t_1+f_1(t_1+\Delta_i,t_1,\Delta_i),t_2+f_2(t_2+\Delta_i,t_2,\Delta_i)) \wedge t_p+(2k+1)\Delta'_i\le t<t_p+(2k+2)\Delta'_i \end{cases}$$

(4)

Обчислимо первісні функцій f_1 та f_2 виду (2.2.2.2):

$$F_i(t,t_i,\Delta_i,a_i)=\begin{cases}(t-t_i)a_i,\ t_i<t\le t_i+\Delta'_i \\ 0,\ t\le t_1 \wedge t>t_1+\Delta'_i\end{cases},\quad i=1,2 \qquad (5)$$

Знайдемо нерівнозначну різницю по модулю *k* первісних виду (5):

$$F_1(t,t_1,\Delta_i,a_1)|k|F_2(t,t_2,\Delta_i,a_2)=$$

$$= \begin{cases} [t-(t_p+k\Delta'_i)]|a_1-a_2| \quad ,t_p=\min(t_1,t_2),\ t_p+2k\Delta'_i<t\le t_p+(2k+1)\Delta'_i,\ k-\textit{порядковий номер} \\ \Delta-\textit{інтервалу};\quad k=0,\overline{\frac{\max(t_1+f_1(t_1+\Delta_i,t_1,\Delta_i),t_2+f_2(t_2+\Delta_i,t_2,\Delta_i))-t_p}{\Delta_i}-1} \\ 0,\quad t\le t_p \wedge t>t_p+\max(t_1+f_1(t_1+\Delta_i,t_1,\Delta_i),t_2+f_2(t_2+\Delta_i,t_2,\Delta_i)) \wedge t_p+(2k+1)\Delta'_i\le t<t_p+(2k+2)\Delta'_i \end{cases}$$

(6)

Праві частини рівностей (2.2.2.4) та (2.2.2.6) рівні між собою, а отже рівні і ліві частини, тобто:

$$\int f_1(t,t_1,\Delta_i,a_1)|k|f(t,t_1,\Delta_i,a_1)dt=\int f_1(t,t_1,\Delta_i,a_1)dt|k|\int f_2(t,t_2,\Delta_i,a_2)dt \qquad (7)$$

Розглянемо граничний випадок, для якого відрізки існування ЛЧФ f_1 та f_2 різні та відмінні від Δ-інтервалу, тобто $T_1 \neq T_2 \neq \Delta_i$; часові координати функцій не співпадають.

$$f_i(t,t_i,T_i,a_i)=\begin{cases}(t-t_i)a_i,\ \textit{якщо}\quad t_i<t\le t_i+T_i \\ 0,\quad \textit{якщо}\ (t\le t_i)\wedge(t>t_i+T_i)\end{cases},\quad i=1,2 \qquad (8)$$

Знайдемо нерівнозначну різницю по модулю *k* ЛЧФ виду (8)

$$f_1(t,t_1,T_1,a_1)|k|f_2(t,t_2,T_2,a_2)=$$

$$=\begin{cases}(t-(t_p+\Delta_i))|a_1-a_2|,\ t_p=\min(t_1,t_2),\qquad \textit{якщо}\ \min(t_1,t_2)\le t\le \\ \qquad\qquad \le\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2)) \\ 0,\qquad \textit{якщо}\ \ t<\min(t_1,t_2)\vee\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2))>t\end{cases}$$

9)

Та первісну ЛЧФ (9)

6

$$\int f_1(t,t_1,T_1,a_1)|\mathrm{k}|f_2(t,t_2,T_2,a_2)dt =$$

$$= \begin{cases} [t-(t_p+k\Delta'_i)]|a_1-a_2| \quad ,t_p=\min(t_1,t_2),\, t_p+2k\Delta'_i < t \le t_p+(2k+1)\Delta'_i,\, k-\textit{порядковий номер} \\ \Delta-\textit{інтервалу}\, k=0,\overline{\dfrac{\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2))-t_p}{\Delta_i}-1} \\ 0, \quad t\le t_p \wedge t>t_p+\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2)) \wedge t_p+(2k+1)\Delta'_i \le t < t_p+(2k+2)\Delta'_i \end{cases}$$

(10)

Визначимо первісні функцій f_1 та f_2 виду (8) як

$$F(t,t_i,T_i,a_i) = \begin{cases} (t-(t_i+p\cdot\Delta'_i))a_i, \quad t_i+2p\Delta'_i < t \le t_i+(2p+1)\Delta'_i,\, p-\textit{порядковий номер}\,\Delta-\textit{інтервалу}, \quad p=0,\overline{\dfrac{T_i}{\Delta_i}-1} \\ 0, \quad t\le t_i \wedge t>t_i+T_i \wedge t_i+(2p+1)\Delta'_i \le t < t_i+(2p+2)\Delta'_i \end{cases} ,i=1,2$$

(11)

Та нерівнозначну різницю по модулю k ЛЧФ виду (11):

$$F(t,t_1,T_1,a_1)|\mathrm{k}|F_2(t,t_2,T_2,a_2) =$$

$$= \begin{cases} [t-(t_p+k\Delta'_i)]|a_1-a_2| \quad ,t_p=\min(t_1,t_2),\, t_p+2k\Delta'_i < t \le t_p+(2k+1)\Delta'_i,\, k-\textit{порядковий номер} \\ \Delta-\textit{інтервалу}\, k=0,\overline{\dfrac{\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2))-t_p}{\Delta_i}-1} \\ 0, \quad t\le t_p \wedge t>t_p+\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2)) \wedge t_p+(2k+1)\Delta'_i \le t < t_p+(2k+2)\Delta'_i \end{cases}$$

(12)

Для даного граничного випадку, враховуючи рівності (10) та (12), теорема має місце.

Базис індукції доведений.

Припустимо, що теорема справедлива для випадку *n* ЛЧФ, тобто:

$$\int f_1(t,t_1,T_1,a_1)|k|f_2(t,t_2,T_2,a_2)|k|...|k|f_n(t,t_n,T_n,a_n)dt = \int f_1(t,t_1,T_1,a_1)dt|k|\int f_2(t,t_2,T_2,a_2)dt|k|$$

$$...|k|\int f_n(t,t_n,T_n,a_n)dt \qquad (13)$$

Доведемо, що теорема має місце для випадку *n+1* ЛЧФ. Скористаємося для цього рівністю (7) та припущенням (13), тобто:

$$\int f_1(t,t_1,T_1,a_1)|k|f_2(t,t_2,T_2,a_2)|k|...|k|f_n(t,t_n,T_n,a_n)|k|f_{n+1}(t,t_{n+1},T_{n+1},a_{n+1})dt =$$

$$= \int f_1(t,t_1,T_1,a_1)dt|k|f_2(t,t_2,T_2,a_2)dt|k|...|k|f_n(t,t_n,T_n,a_n)dt|k|\int f_{n+1}(t,t,T,a_{n+1}) =$$

$$= \int f_1(t,t_1,T_1,a_1)dt|k|\int f_2(t,t_2,T_2,a_2)dt|k|...|k|\int f_n(t,t_n,T_n,a_n)dt|k|\int f_{n+1}(t,t_{n+1},T_{n+1},a_{n+1})dt$$

Тобто теорема справедлива для будь-якої кількості ЛЧФ, що складаються з одного відрізка існування.

Доведемо тепер , що теорема має місце і у випадку n відрізків існування. Нехай $f(t,t_1,t_2,T_1,T_2,a_1,a_2)$ та $f(t,t_3,t_4,T_3,T_4,a_3,a_4)$- дані ЛЧФ. Оскільки, згідно із властивістю операції нерівнозначної різниці по k [8] маємо:

$$f_1(t,t_1,t_2,T_1,T_2,a_1,a_2)=f_1(t,t_1,T_1,a_1)|k|f_1(t,t_2,T_2a_2)$$
$$f_2(t,t_3,t_4,T_3,T_4,a_3,a_4)=f_2(t,t_3,T_3,a_3)|k|f_2(t,t_4,T_4,a_4)$$

та враховуючи попереднє доведення отримуємо:

$$\begin{aligned}&\int f_1(t,t_1,t_2,T_1,T_2,a_1,a_2)|k|f_2(t,t_3,t_4,T_3,T_4,a_3,a_4)dt=\int\left(f_1(t,t_1,T_1,a_1)|k|f_1(t,t_2,T_2,a_2)\right)|k|\\&|k|\left(f_2(t,t_3,T_3,a_3)|k|f_2(t,t_4,T_4,a_4)\right)dt=\\&=\int f_1(t,t_1,T_1,a_1)|k|f_1(t,t_2,T_2,a_2)dt|k|\int\ f_2(t,t_3,T_3,a_3)|k|f_2(t,t_4,T_4,a_4)dt=\\&=\int f_1(t,t_1,t_2,T_1,T_2,a_1,a_2)dt|k|\int f_2(t,t_3,t_4,T_3,T_4,a_3,a_4)dt\end{aligned}\qquad(14)$$

Припустимо, що рівність (14) справедлива для випадку n проміжків існування, тобто:

$$\begin{aligned}&\int f_1(t,t_1,t_2,...,t_n,T_1,T_2,..T_n,a_1,a_2,...,a_n)|k|f_2(t,t'_1,t'_2,...,t'_n,T_1',T_2',..T_n',a'_1,a'_2,...,a'_n)dt=\\&=\int f_1(t,t_1,t_2,...,t_n,T_1,T_2,...,T_n,a_1,a_2,...,a_n)dt|k|\int f_2(t,t_1',t_2',...,t_n',T_1',T_2',...,T_n',a'_1,a'_2,...,a'_n)dt\end{aligned}\qquad(15)$$

Скориставшись висновками (14) та (15), доведемо справедливість теореми для випадку $n+1$ відрізку існування:

$$\begin{aligned}&\int f_1(t,t_1,t_2,...t_n,t_{n+1},T_1,T_2,..T_n,T_{n+1},a_1,a_2,...a_n,a_{n+1})|k|f_2(t,t'_1,t'_2,...t'_n,t_{n+1}',T_1',T_2',..T_n',T_{n+1}',a'_1,a'_2,...a'_n,a'_{n+1})dt=\\&=\int\left(f_1(t,t_1,t_2,...t_n,T_1,T_2,...T_n,a_1,a_2,...a_n)|k|f_1(t,t_n,T_n,a_n)\right)dt|k|\left(f_2(t,t_1',t_2',...t_n',T_1',T_2',...T_n',a'_1,a'_2,...a'_n)|k|f_2(t,t_n',T_n')dt\right)=\\&\int\left(f_1(t,t_1,t_2,...t_n,T_1,T_2,...T_n,a_1,a_2,...a_n)|k|f_1(t,t_n,T_n,a_n)\right)dt|k|\int\left(f_2(t,t_1',t_2',...t_n',T_1',T_2',...T_n',a'_1,a'_2,...a'_n)|k|f_2(t,t_n',T_n',a_n)\right)dt=\\&=\int f_1(t,t_1,t_2,...t_n,t_{n+1},T_1,T_2,..T_n,T_{n+1},a_1,a_2,...a_n,a_{n+1})dt|k|\int f_2(t,t'_1,t'_2,...t'_n,t_{n+1}',T_1',T_2',..T_n',T_{n+1}',a'_1,a'_2,...a'_n,a'_{n+1})dt\end{aligned}$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Первісна арифметичної суми ЛЧФ k- значної логіки дорівнює арифметичній сумі первісних цих функцій.

Доведення. Існує три можливі класи ЛЧФ k- значної логіки [8]. Функції другого та третього класу можна представити як суперпозицію функцій першого класу завдяки властивості 4 операції нерівнозначного віднімання (|k|).

Так будь-яка ЛЧФ

$$f\left(t,t_1,t_2,T_1,T_2,a_1,a_2\right)=\begin{cases}\left(t-t_1\right)a_1, & \text{якщо } t_1\le t\le t_1+T_1\\ \left(t-t_2\right)a_2, & \text{якщо } t_2\le t\le t_2+T_2\\ 0, & \text{якщо } \left(t<t_1\right)\wedge\left(t_1+T_1<t<t_2\right)\wedge\left(t>t_2+T_2\right)\end{cases}$$

може бути подана як нерівнозначна різниця ЛЧФ з одним проміжком існування:

$$f\left(t,t_1,t_2,T_1,T_2,a_1,a_2\right)=f\left(t,t_1,T_1,a_1,\right)\left|k\right|f\left(t,t_2,T_2,a_2\right)$$

де $f_i\left(t,t_i,T_i,a_i\right)=\begin{cases}\left(t-t_i\right)a_i, \text{якщо} \quad t_i<t\le t_i+\Delta_i\\ 0, \quad \text{якщо } \left(t\le t_i\right)\wedge\left(t>t_i+\Delta_i\right)\end{cases}$

Достатньо довести цю теорему для функцій першого класу. Знайдемо первісну арифметичної суми ЛЧФ k- значної логіки:

Первісна кожної ЛЧФ визначається так

$$\int f_i\left(t,t_i,T_i,a_i\right)dt=\begin{cases}\left(t-(t_i+p\cdot\Delta_i)\right)a_i, \quad t_i+2p\Delta_i'<t\le t_i+(2p+1)\Delta_i', \ p-\text{порядковий номер}\\ \Delta-\text{інтервалу}, \quad p=\overline{0,\frac{T_i}{\Delta_i}-1}\\ 0, \quad t\le t_i\wedge t>t_i+T_i\wedge t_i+(2p+1)\Delta_i'\le t<t_i+(2p+2)\Delta_i'\end{cases}$$

$$\int\left(f_1\left(t,t_1,T_1,a_1\right)+f_2\left(t,t_2,T_2,a_2\right)\right)dt=$$

$$=\begin{cases}\left(t-(t_1+p_1\Delta'_i)\right)a_1, & \text{якщо} \quad t_1+2p_1\Delta'_i<t<t_1+(2p_1+1)\Delta'_i,\\ & p_1-\text{порядковий номер } \Delta-\text{інтервалу}, p_1=\overline{0,\frac{t_2-t_1}{\Delta_i}-1}\\ \left(t-(t_2+p_2\Delta'_i)\right)\left(a_1+a_2\right), & \text{якщо } t_2+2p_2\Delta'_i<t<t_2+(2p_2+1)\Delta'_i, \ p_2-\text{порядковий номер } \Delta-\text{інтервалу},\\ & p_2=\overline{0,\frac{\min(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))-t_2}{\Delta_i}-1}\\ \left(t-(t_2+T_2+p_3\Delta'_i)\right)a_1, & \text{якщо } (t_2+T_2)+2p_3\Delta'_i<t<(t_2+T_2)+(2p_3+1)\Delta'_i, \ p_3-\text{порядковий номер } \Delta-\text{інтервалу},\\ & \wedge\min(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))=t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)\\ & p_3=\overline{0,\frac{\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))-(t_2+T_2)}{\Delta_i}-1}\\ \left(t-(t_1+T_1+p_4\Delta'_i)\right)a_2, & \text{якщо } t_1+2p_4\Delta'_i<t<t_1+(2p_4+1)\Delta'_i, \ p_4-\text{порядковий номер } \Delta-\text{інтервалу},\\ & \wedge\min(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))=t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1)\\ & p_4=\overline{0,\frac{\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))-(t_1+T_1)}{\Delta_i}-1}\\ 0, & \text{якщо } t_1>t\wedge t>\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))\wedge\\ & \wedge t_1+(2p_1+1)\Delta_i'\le t<t_1+(2p_1+2)\Delta_i'\wedge t_2+(2p_2+1)\Delta_i'\le t<t_2+(2p_2+2)\Delta_i'\wedge\\ & \wedge(t_2+T_2)+(2p_3+1)\Delta_i'\le t<(t_2+T_2)+(2p_3+2)\Delta_i'\wedge(t_1+T_1)+(2p_4+1)\Delta_i'\le t<(t_1+T_1)+(2p_4+2)\Delta_i'\end{cases}$$

(16)

Знайдемо арифметичну суму первісних двох функцій (i=1,2). Згідно визначення арифметичної суми двох ЛЧФ k- значної логіки маємо:

$$\int\left(f_1(t,t_1,T_1,a_1)+f_2(t,t_2,T_2,a_2)\right)dt=$$

$$=\begin{cases}
(t-(t_1+p_1\Delta'_i))a_1, & \text{якщо } t_1+2p_1\Delta'_i<t<t_1+(2p_1+1)\Delta'_i, \\
 & p_1-\text{порядковий номер } \Delta-\text{інтервалу}, p_1=\overline{0,\frac{t_2-t_1}{\Delta_i}-1} \\
(t-(t_2+p_2\Delta'_i))(a_1+a_2), & \text{якщо } t_2+2p_2\Delta'_i<t<t_2+(2p_2+1)\Delta'_i,\ p_2-\text{порядковий номер } \Delta-\text{інтервалу}, \\
 & p_2=\overline{0,\frac{\min(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))-t_2}{\Delta_i}-1} \\
(t-(t_2+T_2+p_3\Delta'_i))a_1, & \text{якщо } (t_2+T_2)+2p_3\Delta'_i<t<(t_2+T_2)+(2p_3+1)\Delta'_i,\ p_3-\text{порядковий номер } \Delta-\text{інтервалу}, \\
 & \wedge\min(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))=t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2)\wedge \\
 & \wedge\min(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))=t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2 \\
 & p_3=\overline{0,\frac{\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))-(t_2+T_2)}{\Delta_i}-1} \\
(t-(t_1+T_1+p_4\Delta'_i))a_2, & \text{якщо } t_1+2p_4\Delta'_i<t<t_1+(2p_4+1)\Delta'_i,\ p_4-\text{порядковий номер } \Delta-\text{інтервалу}, \\
 & \wedge\min(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))=t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1)\wedge \\
 & \wedge\min(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))=t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1) \\
 & p_4=\overline{0,\frac{\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))-(t_1+T_1)}{\Delta_i}-1} \\
0, & \text{якщо } t_1>t\wedge t>\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1,a_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2,a_2))\wedge \\
 & \wedge t_1+(2p_1+1)\Delta'_i\le t<t_1+(2p_1+2)\Delta'_i\wedge t_2+(2p_2+1)\Delta'_i\le t<t_2+(2p_2+2)\Delta'_i\wedge \\
 & \wedge(t_2+T_2)+(2p_3+1)\Delta'_i\le t<(t_2+T_2)+(2p_3+2)\Delta'_i\wedge(t_1+T_1)+(2p_4+1)\Delta'_i\le t<(t_1+T_1)+(2p_4+2)\Delta'_i
\end{cases}$$

(17)

Та як рівні праві частини (16) та (17), то і ліві частини будуть рівними, а саме:

$$\int\left(f_1(t,t_1,T_1,a_1)+f_2(t,t_2,T_2,a_2)\right)dt=\int f_1(t,t_1,T_1,a_1)dt+\int f_2(t,t_2,T_2,a_2)dt, \quad (18)$$

Базис індукції доведений.

Припустимо, що теорема має місце для ***n*** функцій, тобто

$$\int\left(f_1(t,t_1,T_1,a_1)+f_2(t,t_2,T_2,a_2)+...+f_n(t,t_n,T_n,a_n)\right)dt=\int f_1(t,t_1,T_1,a_1)dt+\int f_2(t,t_2,T_2,a_2)dt+...+\int f_n(t,t_n,T_n,a_n)dt$$

(19)

Доведемо її для кількості ЛЧФ ***n+1***. Скористаємося для цього рівністю (18) та припущенням (19):

$$\int\left(f_1(t,t_1,T_1,a_1)+f_2(t,t_2,T_2,a_2)+...+f_n(t,t_n,T_n,a_n)\oplus f_{n+1}(t,t_{n+1},T_{n+1},a_{n+1})\right)dt=$$

$$=\int\left(f_1(t,t_1,T_1,a_1)+f_2(t,t_2,T_2,a_2)+...+f_n(t,t_n,T_n,a_n)dt\right)+\int f_{n+1}(t,t_{n+1},T_{n+1},a_{n+1})dt=$$

$$=\int f_1(t,t_1,T_1,a_1)dt+\int f_2(t,t_2,T_2,a_2)dt+...+\int f_n(t,t_n,T_n,a_n)dt+\int f_{n+1}(t,t_{n+1},T_{n+1},a_{n+1})dt$$

Тобто теорема справедлива для будь-якої кількості ЛЧФ, що складаються з одного відрізка існування.

Таким чином, теорему доведено.

Теорема 3. Нерівнозначна різниця первісної ЛЧФ k- значної логіки та первісної ЛЧФ з затримкою на один $\Delta_i/2$ інтервал дорівнює самій ЛЧФ

Доведення.Існує три класи ЛЧФ k - значної логіки [8,С.46], то достатньо довести цю теорему для кожного з цих класів.

Перший клас - клас ЛЧФ, що між двома нулями приймають стале значення. Позначимо такі функції $f\left(t,t_1,T_1,a_1\right)$. Тут t - поточне значення часу, t_1 - часова координата, T_1 - тривалість відрізку існування, a_1 - амплітуда ($a_1=\overline{0,k-1}$, $T_1 \neq t_{k+1}-t_k$).

Доведемо справедливість теореми для двох можливих випадків.

1) Розглянемо випадок, коли $T_1 = \Delta_i$.

$$f_1\left(t,t_1,\Delta_i,a_1\right)=\begin{cases}\left(t-t_1\right)a_1, якщо & t_1<t\leq t_1+\Delta_i\\ 0, \quad якщо & \left(t\leq t_1\right)\wedge\left(t>t_1+\Delta_i\right)\end{cases} \quad (19)$$

Збільшимо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ_i розіб’ємо на два. Отримаємо інтервал $\Delta_i^{'}$ $=\Delta_i/2$. кількість таких інтервалів буде n′=2n.

Знайдемо первісну ЛЧФ функції (3.1). За означенням маємо:

$$F\left(t,t_1,\Delta_i,a_1\right)=\begin{cases}\left(t-t_1\right)a_1, & t_1<t\leq t_1+\Delta_i^{'}\\ 0, & t\leq t_1 \quad \wedge \quad t>t_1+\Delta_i^{'}\end{cases} \quad (20)$$

Первісна цієї функції, але з затримкою на $\Delta_i^{'}$, що дорівнює $\Delta_i/2$ - інтервалу має вигляд:

$$F\left(t,t_1+\Delta_i^{'},\Delta_i,a_1\right)=\begin{cases}\left(t-(t_1+\Delta_i^{'})\right)a_1, & t_1+\Delta_i^{'}<t\leq t_1+2\Delta_i^{'}\\ 0, & t\leq t_1+\Delta_i^{'} \quad \wedge \quad t>t_1+2\Delta_i^{'}\end{cases} \quad (21)$$

Знайдемо нерівнозначну різницю функцій (3.2) та (3.3). В результаті отримаємо:

$$F\left(t,t_1,\Delta_i,a_1\right)\left|k\right|F\left(t,t_1+\Delta_i^{'},\Delta_i,a_1\right)=\begin{cases}\left(t-t_1\right)a_1, & t_1<t\leq t_1+2\Delta_i^{'}\\ 0, & t\leq t_1 \quad \wedge \quad t>t_1+2\Delta_i^{'}\end{cases} \quad (22)$$

Згідно проведеної дискретизації $2\Delta_i^{'}=\Delta_i$, тому праві частини виразів (22) та (19) рівні між собою, а отже будуть рівні і ліві частини. Тобто:

$$F\left(t,t_1,\Delta_i,a_1\right)\left|k\right|F\left(t,t_1+\Delta_i^{'},\Delta_i,a_1\right)=f\left(t,t_1,\Delta_i,a_1\right).$$

2) Розглянемо випадок, коли $T_i \neq \Delta_i$.

$$f_1\left(t,t_1,T_1,a_1\right)=\begin{cases}\left(t-t_1\right)a_1, якщо & t_1<t\leq t_1+T_1\\ 0, \quad якщо & \left(t\leq t_1\right)\wedge\left(t>t_1+T_1\right)\end{cases} \quad (23)$$

Її первісна:

$$F(t,t_1,T_1,a_1)=\begin{cases}(t-(t_1+p\cdot\Delta_i))a_1, \quad t_1+2p\Delta_i^{'}<t\leq t_1+(2p+1)\Delta_i^{'}, \quad p-порядковийномер\\ \qquad номер\ \Delta-інтервалу, \qquad p=\overline{0,\frac{T_1}{\Delta_i}-1}\\ 0, \qquad t\leq t_1 \quad \wedge \quad t>t_1+T_1 \quad \wedge \quad t_1+(2p+1)\Delta_i^{'}\leq t<t_1+(2p+2)\Delta_i^{'}\end{cases}$$

(24)

та первісна з затримкою на $\Delta_i/2$ інтервал:

$$F\left(t,t_1+\Delta_i^{'},T_1,a_1\right)=\begin{cases}\left(t-(t_1+p\cdot\Delta_i+\Delta_i^{'})\right)a_1, & t_1+(2p+1)\Delta_i^{'}<t\le t_1+(2p+2)\Delta_i^{'},\ p-\textit{порядковий}\\ & \textit{номер}\ \Delta-\textit{інтервалу};\quad p=\overline{0,\frac{T_1}{\Delta_i}-1}\\ 0, & t\le t_1+\Delta_i^{'}\ \wedge\ t>t_1+\Delta_i^{'}+T_1\ \wedge\ t_1+2(p+1)\Delta_i^{'}\le t<t_1+2(p+1)\Delta_i^{'}\end{cases}$$

(25)

Виконавши приведення подібних доданків і враховуючи, що $2\Delta_i^{'}=\Delta_i$,
Нерівнозначна різниця функцій (24) та (25) така:

$$F(t,t_1,T_1,a_1)|k|F\left(t,t_1+\Delta_i^{'},T_1,a_1\right)=\begin{cases}(t-t_1)a_1, \textit{якщо} & t_1<t\le t_1+T_1\\ 0, \quad \textit{якщо} & (t\le t_1)\wedge(t>t_1+T_1)\end{cases} \quad (26)$$

Таким чином, і в цьому випадку теорема має місце, оскільки праві частини рівностей (23) та (25) рівні між собою, то рівні і ліві частини, тобто

$$F(t,t_1,T_1,a_1)|k|F\left(t,t_1+\Delta_i^{'},T_1,a_1\right)=f(t,t_1,T_1,a_1) \quad (27)$$

Згідно властивості 4 [8,С.36] операції нерівнозначного віднімання, будь-яку ЛЧФ можна розглядати як нерівнозначну різницю ЛЧФ з одним відрізком існування. Тому теорема має місце для всіх класів ЛЧФ k - значної логіки.
Теорема доведена.
Теорема 4. Кількість відрізків існування первісної ЛЧФ k - значної логіки дорівнює кількості Δ інтервалів, на яких ЛЧФ має імпульс з амплітудою a_i.
Доведення. Перевіримо, чи справедлива дана теорема у випадку логіко-часової функції, область визначення якої складається лише з одного відрізка існування. Для ЛЧФ другого та третього класів при цьому теорема також буде мати місце, оскільки згідно з властивістю 4 [8, С. 36] будь-яку ЛЧФ, що має *m* відрізків існування можна представити як нерівнозначну різницю *m* ЛЧФ з одним відрізком існування. Дану теорему доведемо за допомогою методу математичної індукції.
Базис індукції. Розглянемо випадок, коли $T_1 = \Delta_i$.

$$f_1(t,t_1,\Delta_i,a_1)=\begin{cases}(t-t_1)a_1, \textit{якщо} & t_1<t\le t_1+\Delta_i\\ 0, \quad \textit{якщо} & (t\le t_1)\wedge(t>t_1+\Delta_i)\end{cases} \quad (28)$$

де t - поточне значення параметра; t_1 - початок відрізка існування; T_1 - тривалість відрізка існування, $n=\frac{T_1}{\Delta_i}$. Проведемо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ_i розіб'ємо на два. Отримаємо інтервал $\Delta_i^{'}$ $=\Delta_i/2$. кількість таких інтервалів буде n′=2n.
Знайдемо первісну ЛЧФ функції (4.1). За означенням маємо:

$$F(t,t_1,\Delta_i,a_1)=\begin{cases}(t-t_1)a_1, & t_1<t\le t_1+\Delta_i^{'}\\ 0, & t\le t_1 \quad \wedge \quad t>t_1+\Delta_i^{'}\end{cases}. \quad (29)$$

Таким чином, первісна має один відрізок існування. Базис індукції доведений.

Графічне підтвердження доведення даного випадку зображено нарис. 1

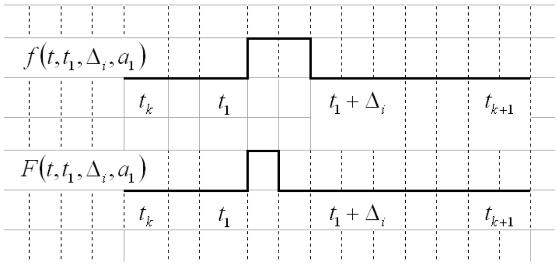

Рис. 1. Знаходження первісної ЛЧФ у випадку $T_1=\Delta_i$.

Припустимо, що теорема має місце, коли $T_i \neq \Delta_i$ та $T_1=n\Delta_i$, тобто якщо ЛЧФ має імпульс з амплітудою a_i на проміжку, що дорівнює n Δ_i інтервалам, то її первісна буде мати n відрізків існування.

Доведемо, що твердження теореми справедливе і для випадку ЛЧФ, відрізок існування якої містить $n+1$ Δ_i інтервал. Маємо:

$$f_1(t,t_1,T_1,a_1)=\begin{cases}(t-t_1)a_1, \textit{якщо} & t_1<t\le t_1+T_1\\ 0, \quad \textit{якщо} & (t\le t_1)\wedge(t>t_1+T_1)\end{cases} \quad (30)$$

$T_1=(n+1)\Delta_i$ Її первісна:

$$F(t,t_1,T_1,a_1)=\begin{cases}(t-(t_1+p\cdot\Delta_i))a_1, \quad t_1+2p\Delta_i^{'}<t\le t_1+(2p+1)\Delta_i^{'}, \quad p-\textit{порядковий номер}\\ \Delta-\textit{інтервалу}, \quad p=\overline{0,\frac{T_1}{\Delta_i}-1}\\ 0, \quad t\le t_1 \quad \wedge \quad t>t_1+T_1 \quad \wedge \quad t_1+(2p+1)\Delta_i^{'}\le t<t_1+(2p+2)\Delta_i^{'}\end{cases} \quad (31)$$

$p=\frac{T_1}{\Delta_i}-1=\frac{(n+1)\Delta_i}{\Delta_i}-1=n+1-1=n$. Звідки, кількість відрізків існування буде становити $n+1$.

Таким чином, і в цьому випадку теорема має місце (рис. 2).

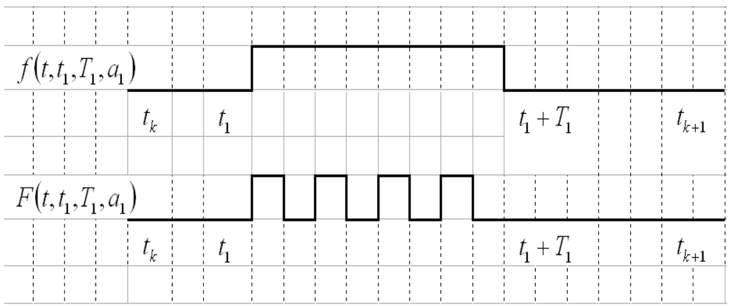

Рис. 2. Можливий варіант знаходження первісної ЛЧФ, коли $T_i \neq \Delta_i$

Отже, згідно принципу математичної індукції первісна ЛЧФ k- значної логіки буде мати стільки відрізків існування, скільки Δ_i інтервалів вкладається в відрізок існування ЛЧФ з амплітудою a_i (для кожного відрізку існування ЛЧФ окремо). Теорема доведена.

Теорема 5. Кожна наступна первісна ЛЧФ k - значної логіки має таку саму кількість відрізків існування, що і підінтегральна ЛЧФ.

Доведення. Розглянемо логіко-часову функцію k - значної логіки, область визначення якої складається лише з одного відрізка існування.

Випадок $T_1 = \Delta_i$.

$$f_1(t,t_1,\Delta_i,a_1)=\begin{cases}(t-t_1)a_1, якщо & t_1<t\le t_1+\Delta_i\\ 0, \quad якщо & (t\le t_1)\wedge(t>t_1+\Delta_i)\end{cases} \quad (32)$$

де t - поточне значення параметра; t_1 - початок відрізка існування; T_1 - тривалість відрізка існування, $n=\frac{T_1}{\Delta_i}$. Проведемо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ_i розіб'ємо на два. Отримаємо інтервал $\Delta_i^{'}$ $=\Delta_i/2$, кількість таких інтервалів буде $n'=2n$.

Знайдемо первісну ЛЧФ функції (33). За означенням маємо:

$$F(t,t_1,\Delta_i,a_1)=\begin{cases}(t-t_1)a_1, & t_1<t\le t_1+\Delta_i^{'}\\ 0, \quad t\le t_1 & \wedge \quad t>t_1+\Delta_i^{'}\end{cases} \quad (33)$$

Таким чином, первісна має один відрізок існування. Знайдемо первісну ЛЧФ $F(t,t_1,\Delta_i,a_1)$. Ще раз проведемо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал $\Delta_i^{'}$ розіб'ємо на два. Отримаємо інтервал $\Delta_i^2=\frac{\Delta_i^{'}}{2}$, кількість таких інтервалів буде $n^2=2n^{'}=4n$.

За означенням маємо:

$$\int F(t,t_1,\Delta_i,a_1)dt=\begin{cases}(t-t_1)a_1, t_1<t\le t_1+\Delta_i^{'}\\ 0, t\le t_1 \wedge t>t_1+\Delta_i^{'}\end{cases} \quad (34)$$

Таким чином, друга первісна має один відрізок існування. Відрізок існування дорівнює Δ_i інтервалу, тому згідно з теоремою 4 кожна наступна первісна буде мати один відрізок існування.

Базис індукції доведений. Графічне підтвердження доведення даного випадку зображено на рис.3

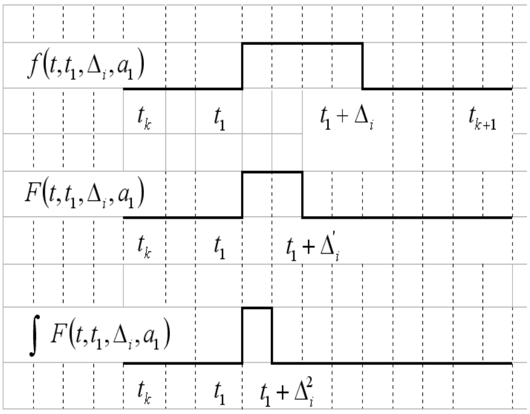

Рис.3. Знаходження первісних ЛЧФ k – значної логіки у випадку $T_1=\Delta_i$

Розглянемо випадок, коли $T_i \neq \Delta_i$ та $T_1 = n\Delta_i$. Первісна цієї функції буде мати n відрізків існування, кожен з яких має розмір Δ- інтервалу. Таким чином кожен відрізок існування можна розглядати як окрему ЛЧФ k – значної логіки, для якої кожна наступна первісна буде мати один відрізок існування розміром вдвічі меншим за попередній. Це означає, що кількість відрізків існування для первісної ЛЧФ, не змінюється і дорівнює кількості Δ -інтервалів, які вміщуються у відрізок існування початкової ЛЧФ k – значної логіки.

Згідно властивості 4 [8, С.36] операції нерівнозначного віднімання, будь-яку ЛЧФ можна розглядати як нерівнозначну різницю ЛЧФ з одним відрізком існування. Тому, теорема має місце для всіх класів ЛЧФ k - значної логіки. Теорема доведена.

Операція зсуву визначається як:

$$f(t-k,t_1,T_1)=\begin{cases} t-k-t_1,\ \textit{якщо}\ t_1<t-k\le t_1+T_1, \\ 0,\ \textit{якщо}\ t_1\ge t-k>t_1+T_1 \end{cases} \qquad (35)$$

Інтеграл від операції зсуву дорівнює за визначенням:

$$\int f(t-k,t_1,T_1)dt=T_1$$

Таким чином, операція зсуву не змінює значення інтегралу.

Операція затримки визначається як:

$$f(t,t_1+\tau,T_1)=\begin{cases} t-(t_1+\tau),\ \textit{якщо}\ t_1+\tau<t\le t_1+\tau+T_1 \\ 0,\ \textit{якщо}\ t_1+\tau\ge t>t_1+\tau+T \end{cases} \qquad (36)$$

Інтеграл від операції затримки дорівнює за визначенням:

$$\int f(t,t_1+\tau,T_1)dt=T_1$$

Таким чином, операція затримки не змінює значення інтегралу.

ВИСНОВКИ

1.Визначено аналітичний вигляд інтегральної ЛЧФ k-значної логіки.
2.Використавши поняття Δ - розбиття інтегральна ЛЧФ k-значної логіки дала можливість здійснити перетворення аналогового сигналу в кількісний дискретний вираз.
3.Розглянуті властивості інтегрування напівтонових зображень розширюють базу знань теорії ЛЧФ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сачанюк-Ковецька Н.В. Елементи око-процесорної обробки зображень логіко-часовому середовищі. Монографія / Сачанюк-Ковецька Н.В., Кожем'яко В.П. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця. – 2004. – 135с.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под общей редакцией С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. – М.: Главная редакция физико–математической литературы издательства «Наука», 1974. – 312с.
3. Кожемяко В. П. Оптоэлектронный параллелизм в образной обработке информации с выделением признаков / Кожемяко В. П., Сторожук Ю. А., Кутаев Ю. Ф. // Материалы 2–й Всесоюзн. научно–технич. конф. по функциональной оптоэлектронике „Оптоэлектронные методы и средства обработки изображений".– Винница–Тбилиси.– 1987.– С.6–29.
4. Кожемяко В. П. Принципы организации оптоэлектронных релевантных структур / Кожемяко В. П., Натрошвили О. Г. Прангишвили А. И. // Материалы Всесоюзн. конф. "Функциональная оптоэлектроника в вычислительной технике и устройствах управления".— Тбилиси, 1986. – С. 313-324.
5. Кожем'яко В. П. До питання про створення оптоелектронних око–процесорів / Кожем'яко В. П., Головань О.В. // Праці Першої Всеукраїнської конф. УкрОБРАЗ'92. – Київ. – 1992. – С. 205–206.
6. Кожем'яко В.П. Метод якісного розпізнавання образів на базі функційно-інтегральних синтезаторів визначників та ознак як функцій логіко-часового типу/ Кожем'яко В.П., Понура О.І., Кожем'яко О.В. // Вісник ВПІ. – 1998. – №2. – С.68-72
7. Кожем'яко В.П. Паралельно ієрархічні мережі як структурно–функціональний базис для побудови спеціальних моделей образного комп'ютера. Монографія / Кожем'яко В.П., Тимченко Л.І., Яровий А.А. – Вінниця : Універсум – Вінниця, 2005.–161 с.
8. Кожем'яко В.П. Наукова концепція образного відео - комп'ютера око-процесорного типу в контексті сучасної методології штучного інтелекту / Кожем'яко В.П., Яровий А.А. // Оптико - електронні інформаційно - енергетичні технології. - 2001. - №2. – С. 84-89.
9. Кожем'яко В. П. Інтегрування логіко-часової функції в процесі обробки зображень / Кожем'яко В.П., Сачанюк Н.В., Волонтир Л.О. // Комп'ютеринг.– 2008.– том 7, Випуск 1.– С.135-145.

Надійшла до редакції 07.01.2009р.

КОЖЕМ'ЯКО В. П. – академік АІНУ, д.т.н., професор, завідуючий кафедрою лазерної і оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.

ВОЛОНТИР Л.О. – пошукач кафедри лазерної і оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.