УДК 622.831:001.891.573:004.942

А.А. Яланский, Алекс. А. Яланский,
Н.А. Иконникова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ХАОТИЧЕСКИХ И СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Приведено результати і аналіз моделювання динаміки хаотичних та синергетичних процесів в складних системах на основі пружинних маятників методами аналітичної механіки.

MODELING OF DYNAMICS CHAOTIC AND SYNERGETIC PROCESSES IN COMPLICATED SYSTEMS

Results and the analysis of modeling of dynamics chaotic and synergetic processes in complicated systems on the basis of spring pendulums by methods of analytical mechanics are described.

Изучение динамики структур литосферы как форм самоорганизации геологической среды необходимо для прогнозирования землетрясений, горных ударов, выбросов пород, угля и газа, устойчивости подземных и наземных сооружений.

Спонтанное образование и развитие сложных упорядоченных структур в открытых системах называют самоорганизацией, а теорию самоорганизации – *синергетикой*. Выделяют три необходимые (но не всегда достаточные) условия самоорганизации с образованием диссипативных структур: отклонения от равновесия должны превышать критическое значение, т.е. система должна находиться в области существования бифуркаций; объем системы должен быть достаточно большим и превышать критический объем, в котором происходит необходимое количество незатухающих флуктуаций, создающих упорядоченность в системе; наличие положительной обратной связи [1].

Бифуркации являются ключевым фактором пространственно-временной самоорганизации, они возникают, прежде всего, в открытых системах, в которые возможен приток внешней энергии. Такими системами априори являются напряженные породные массивы и строительные конструкции, электрические сети и горные машины. Неконтролируемый приток энергии, например, в результате проявлений горного давления, короткого замыкания, может приводить к весьма тяжелым последствиям.

Среди разнообразных диссипативных структур следует отметить: пространственно неоднородные (пористость, слоистость, трещиноватость); периодические во времени (автоколебания); периодические пространственно-временные (волны); сосуществование нескольких стационарных состояний (бистабильность, тристабильность, аттрактор); структуры со скейлинговыми свойствами (пространственно самоподобными – фрактальными); динамические структуры с хаотическим поведением [1]. Особо остановимся на двух последних типах диссипативных структур: фракталах и динамическом хаосе.

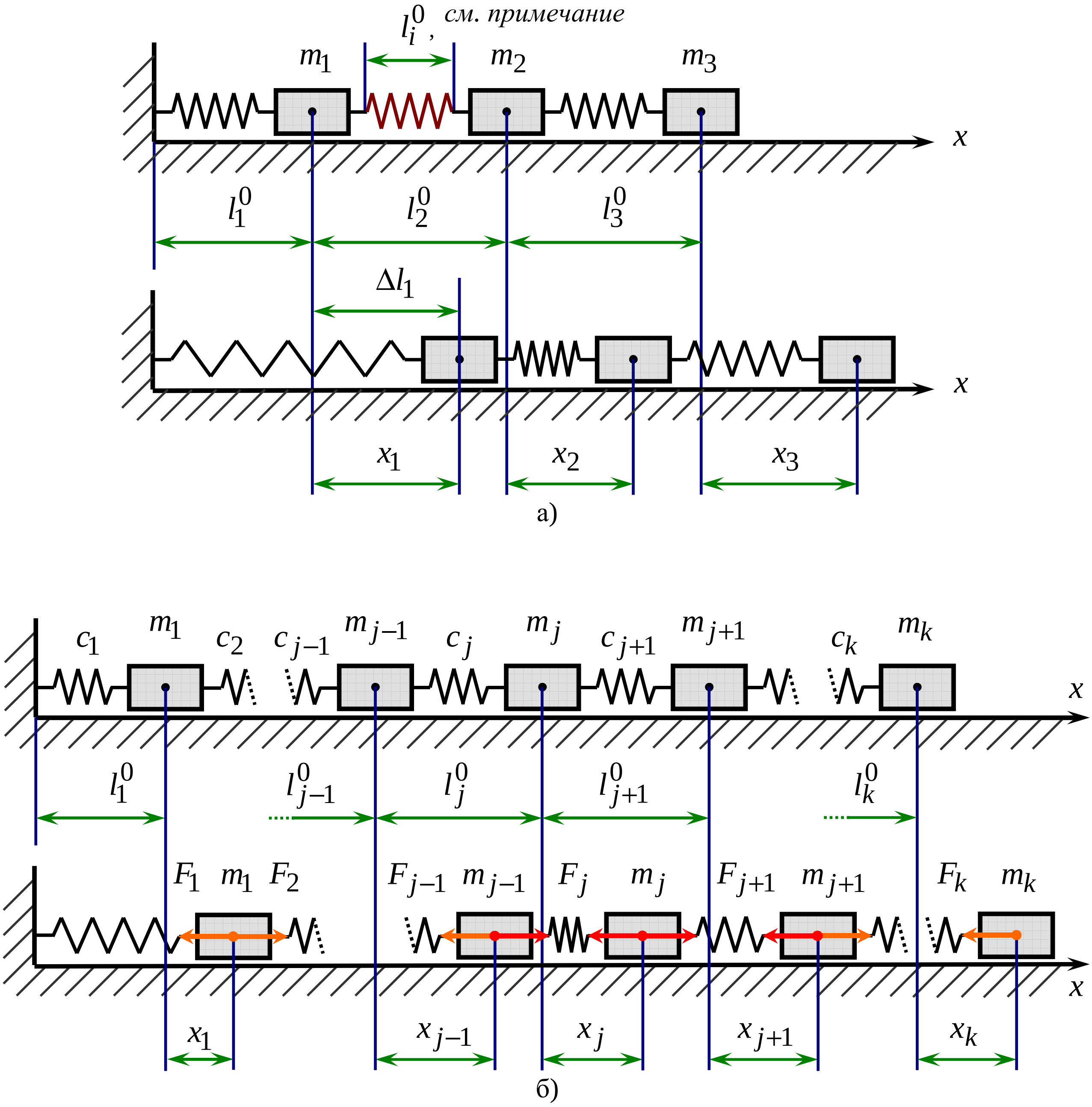
Фрактальные объекты – это множества в одно-, двух-, трехмерном пространствах, обладающие рядом специфических свойств, точно строгого определения которых не существует, можно лишь качественно указать на их типичные черты: наличие тонкой структуры и «изрезанности» деталей сколь угодно малого размера; иррегулярность объектов, не позволяющая описывать их на традиционном геометрическом языке метрических (евклидовых) или топологических пространств; регулярное или стохастическое подобие отдельных частей фрактала всему фракталу (иерархия самоподобия деталей объекта на различных масштабных уровнях); возможность задания программы с помощью несложной рекурсивной процедуры или порождающего алгоритма, ведущих к постепенному измельчению или укрупнению деталей [2].

Открытие детерминированного хаоса в динамических системах стало мировоззренческим переворотом, который позволил по-новому посмотреть на хорошо изученные системы. Суть открытия заключается в том, что детерминированная, полностью прогнозируемая система в некоторых случаях ведет себя хаотически, то есть непрогнозируемо. Впервые явление детерминированного хаоса было рассмотрено в работе американского ученого Е. Лоренца (1963 год), в частности, он описал наблюдавшийся им в численных экспериментах аттрактор в трехмерном фазовом пространстве с разбегающимися в разные стороны фазовыми кривыми при моделировании конвекции атмосферного воздуха и указал на связь этого явления с турбулентностью [3].

В работе [4] на примере системы математических маятников предложена методика аналитического моделирования хаотических процессов в материальных системах на основе методов аналитической механики с использованием уравнений Лагранжа. Рассмотрим возможности этой методики для оценки и прогноза динамического состояния реальных технических систем.

Как известно, в технике часто встречаются объекты, которые при определенных допущениях можно условно представить как k-массовую систему пружинных математических или физических маятников (железнодорожные, рудничные и шахтные составы, транспортные системы непрерывного действия, гидротранспорт пульпы, внутримельничная загрузка, линии электропередачи, различные строительные сооружения, в том числе подземные выработки, протяженные мосты, перекрытия и арочные конструкции и тому подобное). При этом, также известны труднообъяснимые случаи крушения поездов, обрушения мостов, например моста Такома Нэрроуз, Вашингтон, который разрушился в 1940 году через четыре месяца после введения в строй из-за упругих крутильных колебаний от воздействия ровного, но сравнительно сильного ветра (около 42 милей в час) [5].

Вначале рассмотрим материальную систему, схема которой представлена на рис. 1 (а) – систему пружинных маятников, состоящую из трех грузов с массами m_1, m_2 и m_3 и пружин с жесткостями c_1, c_2 и c_3. Прямая, по которой движутся грузы, горизонтальная и абсолютно гладкая. За обобщенные координаты целесообразно принять расстояния центров грузов в текущем положении относительно положения, при котором все пружины находятся в свободном состоянии. Тогда можно пренебречь размерами грузов при условии их центральной симметрии и длинами пружин, если они достаточно велики, чтобы исключить соударения грузов. В работе [6] приводятся уравнения движения такой системы. Выполненные нами расчеты с помощью Mathcad показали, что для системы трех пружинных маятников практически сохраняется детерминированное движение, при этом необходимо учесть, что методы приближенных вычислений сами вносят весьма малую нелинейность.



Примечание: грузы считать материальными точками, длина пружины l_i^0 равна расстоянию между центрами масс грузов в состоянии равновесия сил

Рис. 1 – Расчетная схема для моделирования динамики 3-массовой (а) и k-массовой (б) систем пружинных маятников

Схема k-массовой системы пружинных маятников представлена на рис. 1 (б). Получим уравнения движения центров масс грузов, составляющих такую систему. Кинетическая Т и потенциальная П энергии системы равны:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2, \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} c_j \left(x_j - x_{j-1} \right)^2 + \ldots + \frac{1}{2} c_k \left(x_k - x_{k-1} \right)^2, \ j \in 2 \ldots k-1. \tag{2}$$

Составив функцию Лагранжа $L = \mathrm{T} - \Pi$, находим ее частные производные по координатам и скоростям изменения координат во времени:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1 x_1 + c_2 \left(x_2 - x_1 \right), \ \ldots, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_j} = -c_j \left(x_j - x_{j-1} \right) + c_{j+1} \left(x_{j+1} - x_j \right), \ \ldots, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_k} = -c_k \left(x_k - x_{k-1} \right); \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m_k \dot{x}_k. \tag{4}$$

Итак, уравнения движения центров масс грузов в рассматриваемой системе имеют вид:

$$\begin{aligned} &m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 \left(x_2 - x_1 \right) = 0, \ \ldots, \\ &m_j \ddot{x}_j + c_j \left(x_j - x_{j-1} \right) - c_{j+1} \left(x_{j+1} - x_j \right) = 0, \ \ldots, \\ &m_k \ddot{x}_k + c_k \left(x_k - x_{k-1} \right) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Хаотическое детерминированное движение – это движение, в котором существует значительная зависимость от начальных условий, а фазовая траектория системы возвращается в ограниченную область пространства [7]. При этом весьма малая неточность в начальном состоянии системы обусловливает большую разницу между параметрами системы в ее конечном состоянии, см. рис. 2 (четыре маятника). Для такого движения характерно наличие непрерывного спектра частот, расположенного ниже частоты бифуркации.

Ранее были известны три вида динамического движения: равновесие, периодическое движение (граничный цикл) и квазипериодическое движение. Эти состояния получили название аттракторов, так как все переходные процессы со временем затухают и система «притягивается» к одному из перечисленных состояний. Хаотические колебания представляют новый класс движения, который

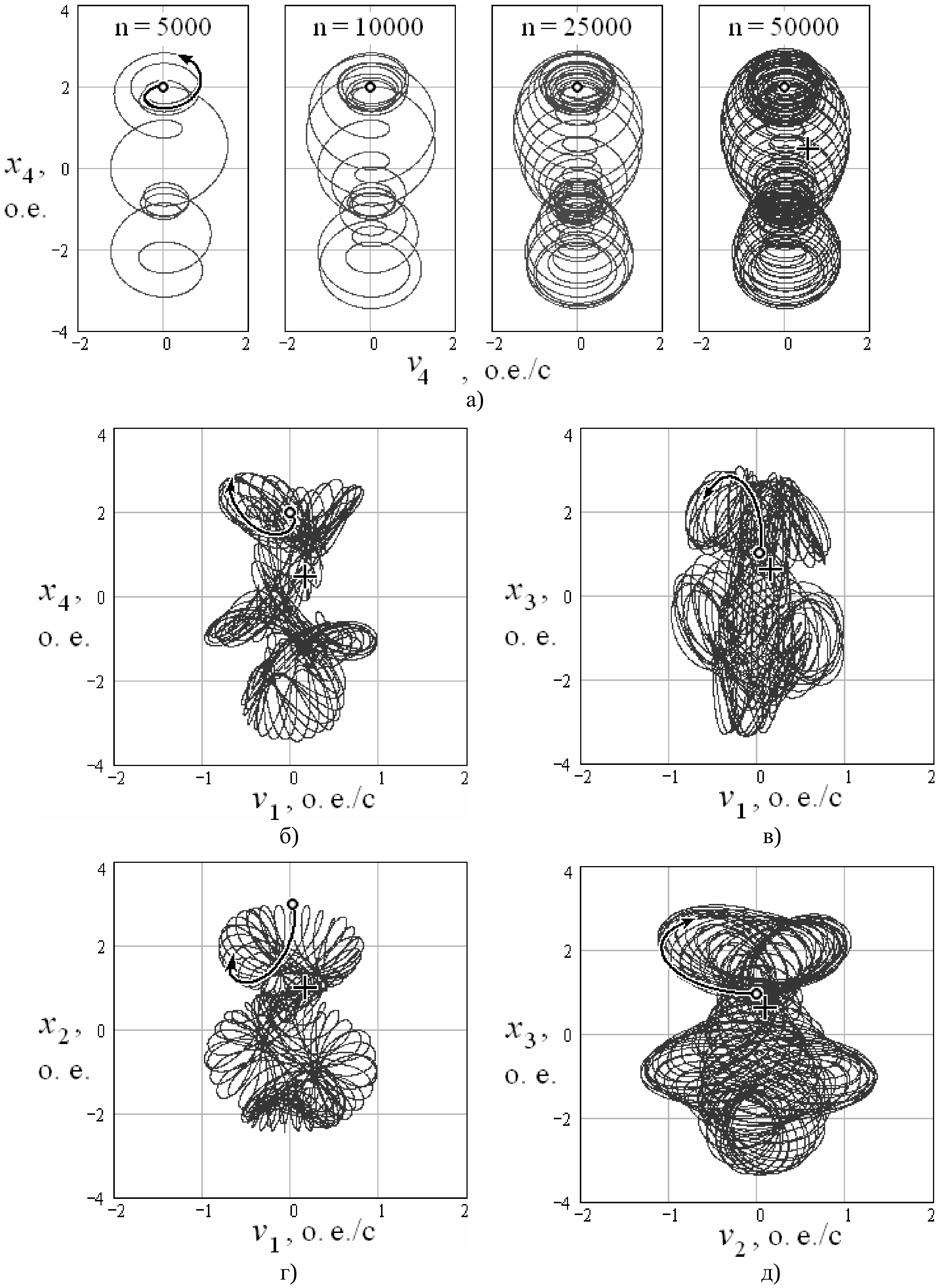


Рис. 2 – Некоторые графики фазовых траекторий системы из 4-х пружинных маятников в координатных системах $x_i = f(v_j)$; «∘» – начальная точка траектории, «+» – конечная точка при $n = 5{\times}10^4$

связан с состоянием, называемым странным аттрактором [7]. Понятие странного аттрактора также появилось в связи с работой Лоренца по атмосферным явлениям, а появление странного поведения системы (хаоса) при решении простого детерминистического дифференциального уравнения использовано Рюэлем и Такенсом для объяснения гидродинамической турбулентности. Хаотические фазовые портреты странных аттракторов наблюдаются для чрезвычайно простых нелинейных динамических систем в трехмерном фазовом пространстве, например, в упругой сферической оболочке. Поэтому Росслер чисто образно, но весьма точно, сказал: «Если колебание является типичным поведением двумерных динамических систем, то хаос точно так же характерен для трехмерных динамических систем». При этом хаос графически можно представить как «бесконечное число неустойчивых периодических и несчетное количество непериодических повторяющихся траекторий» [5].

Классическим аттракторам отвечают классические геометрические «образы» в трехмерном фазовом пространстве: равновесному состоянию – точки, граничному циклу – замкнутые кривые, квазипериодическому движению – поверхности. Странный аттрактор, как оказалось, связан с таким геометрическим образом, как фрактал. Фрактал является удобным способом получения информации об объектах, для которых традиционный процесс измерения длин, площадей, объемов не дает полных результатов [7]. Хаотические явления в диссипативных нелинейных системах подчиняются регулярным законам и за ними «стоит» не бесформенный хаос, а хаос со спрятанным порядком – фрактальная структура, рис. 2 (см. асимметричный фрактал).

В соответствии с наличием устойчивых и неустойчивых математических образований (складок Уитни, каустик и бикаустик, различных перестроек) чисто абстрактно в природе возможно как самопроизвольное возникновение процессов самоорганизации, образования фракталов, так и процессов динамического хаоса, в том числе динамического детерминированного хаоса, при этом они в зависимости от положения равновесия могут быть устойчивыми или неустойчивыми, а в соответствии с теорией вероятностей о наличии возможных «мягких», «медленных» или «диких» состояний случайности, которые описываются распределениями Гаусса, Вейбулла, Коши, Парето и так далее, потеря устойчивости может быть мягкой или жесткой [2, 3, 8 – 10].

При *мягкой потере устойчивости устанавливается колебательный периодический режим*, который на начальном этапе мало отличается от состояния равновесия, при этом амплитуда колебаний из чисто энергетических соображений пропорциональная квадратному корню из условной величины закритичности (величины отличия исходного параметра от критического значения, при котором равновесие начинает терять свою устойчивость), рис. 3, а.

Теория мягкой потери устойчивости равновесных состояний приложима во всех областях науки (механике, электротехнике, физике, химии, биологии, экономике и так далее) как для колебательных систем с конечным числом степеней свободы, так и для сплошных диссипативных и мелкослоистых сред (осадочные и трещиноватые горные породы, шихтованные сердечники, статоры, рото-

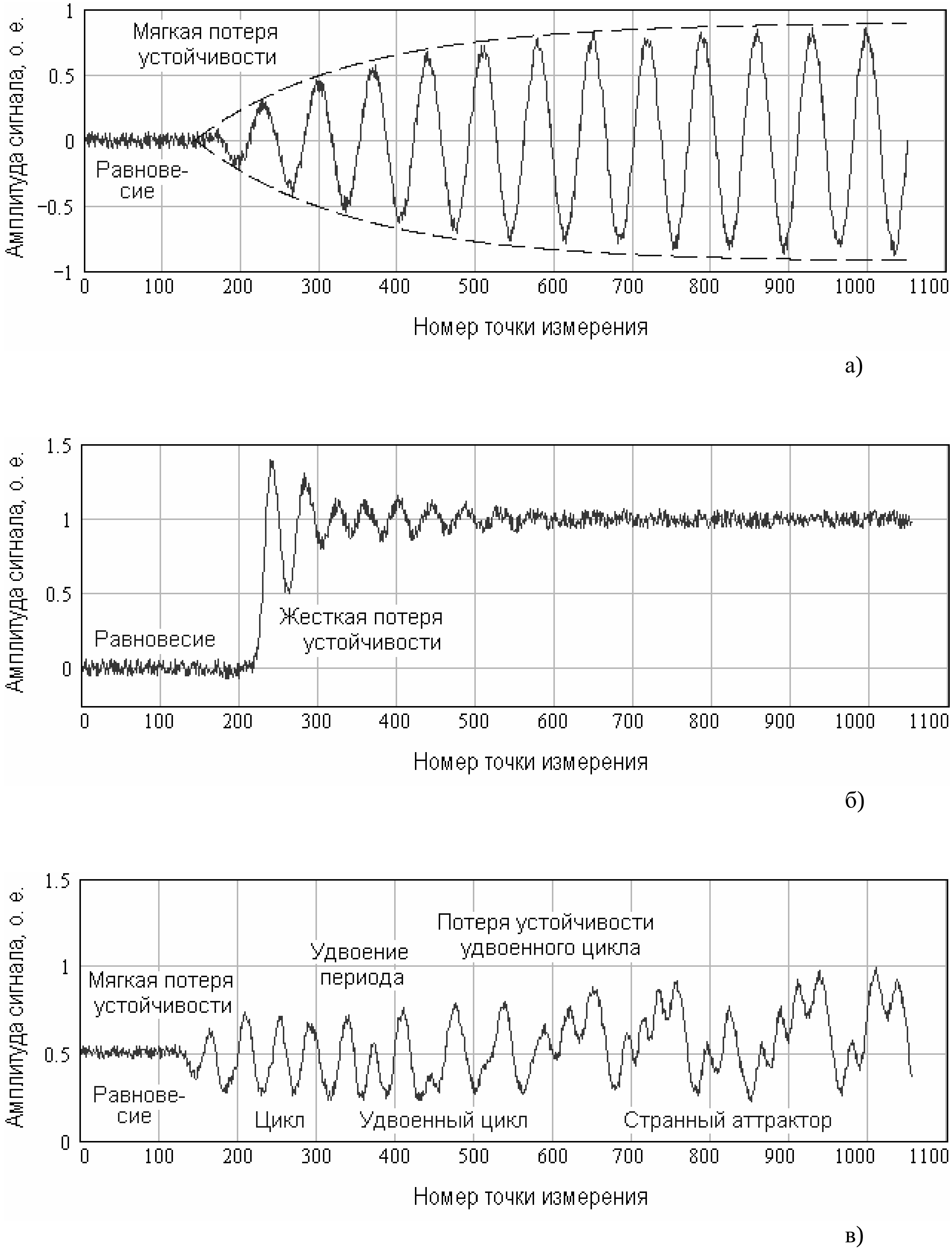


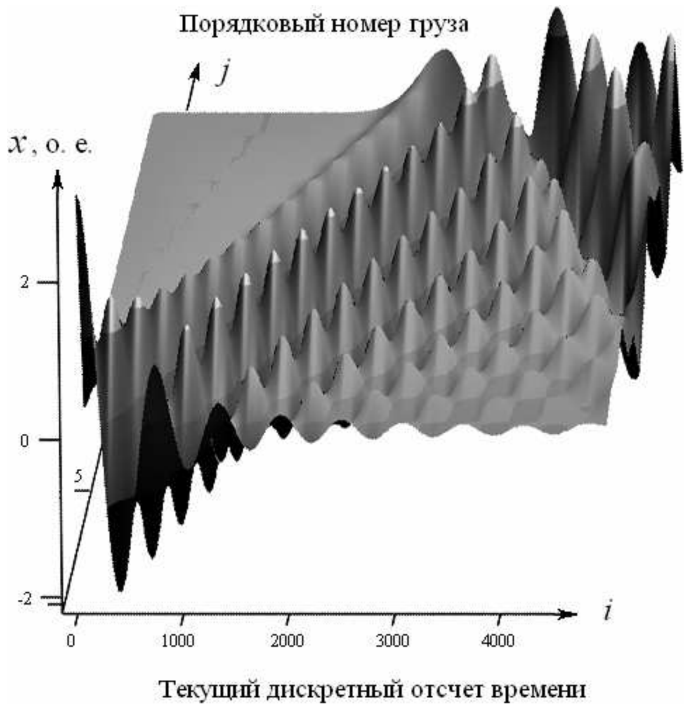
Рис. 3 – Изменение динамического поведения системы: а) мягкая потеря устойчивости; б) жесткая потеря устойчивости; в) сценарий хаотизации ры, якоря), в которых возбуждаются вынужденные колебания.

При *жесткой потере устойчивости система уходит из стационарного режима равновесия скачком и переходит на другой режим движения*, как правило, установившийся колебательный периодический режим, рис. 3, б. Установившиеся режимы движения получили название аттракторов, так как они «притягивают» соседние режимы (переходные процессы). Режим, установившийся после потери устойчивости равновесного состояния, называется странный аттрактор (не равновесие и не предельный цикл). Такой режим означает, что в системе наблюдаются сложные непериодические колебания, для внешнего экспериментатора – турбулентные.

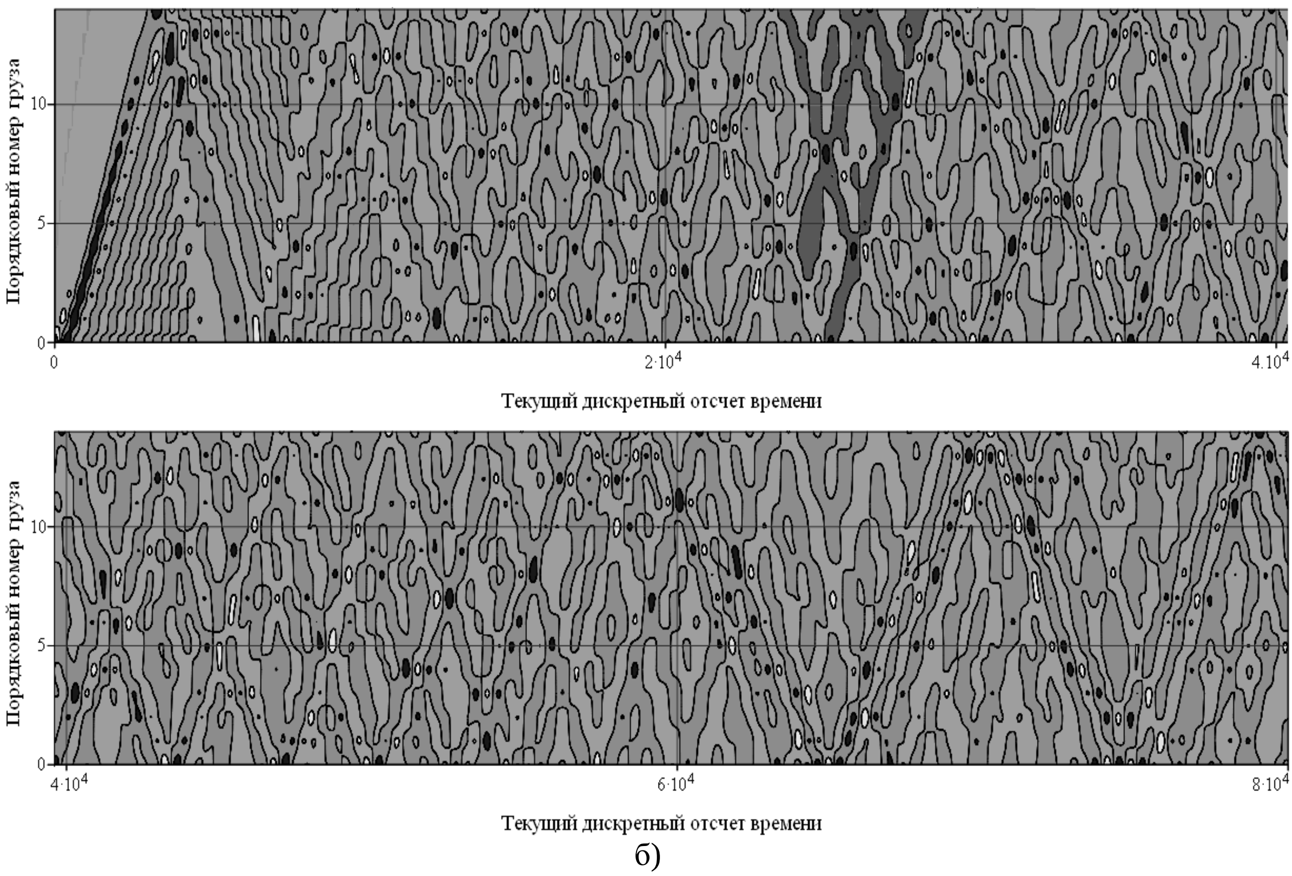
Переход от устойчивого состояния равновесия к странному аттрактору может совершаться непосредственно сразу скачком при жесткой потере устойчивости (рис. 3, б), так и после возникновения мягкой потери устойчивости (рис. 3, а). «Сценарий» хаотизации колебательного процесса приведен на рис. 3, в, исходя из которого наиболее простым и доступным способом контроля мягкой потери устойчивости является спектральный анализ акустических и электрических сигналов с учетом их поляризации, а информативными параметрами последовательно могут служить: развитие устойчивого предельного цикла (бифуркация Гопфа), удвоение периода (бифуркация Питчфорка), удвоенный цикл, потеря его устойчивости, странный аттрактор, рис. 4. Потеря устойчивости в однопараметрическом семействе системы возможна следующими способами: 1) столкновение с неустойчивым циклом; 2) удвоение; 3) смерть или рождение тора [3, 7].

Примером мягкой потери устойчивости в природе может служить образование циклонов, торнадо, смерчей при температурной конвекции воздуха, примером жесткой потери устойчивости могут служить землетрясения, оползни, извержения вулканов. В горной механике под детерминированным хаосом понимают нерегулярное или хаотическое движение, вызванное нелинейностью среды, но для которой динамические законы движения однозначно определяют эволюцию состояния системы во времени. В барабане мельницы наблюдается сдвиговая турбулентность пульпы, особенно на разделе фаз пульпа-футеровка, при этом детерминированный хаос может возникать в локальных областях сегмента загрузки. Из всех возможных вариантов реализуются лишь те, для которых затрачивается наименьшее количество энергии, т.е. диссипация энергии системы должна быть минимальной [11].

В электродинамических системах, гидравлических и теплогидравлических контурах возможно возникновение всего многообразия колебаний, в том числе параметрических, феррорезонансных и хаотических. Параметрический механизм колебаний возникает за счет того, что рабочее оборудование, системы охлаждения и другие компоненты постоянно, даже при проектных режимах работы, подвергаются вибрации со стороны вращающихся механизмов (насосы, турбины, генераторы, двигатели) и перекачиваемой рабочей среды. Следует подчеркнуть, что все эти механизмы имеют высокую добротность. Исследования возбуждения субгармонических (комбинационных) и хаотических колеба-



а)



б)

Рис. 4 – Волновые процессы и самоорганизация в системе пружинных маятников (15 грузов): а) этап возбуждения колебаний (отображение в виде поверхности); б) этапы развития процесса: возбуждение колебаний – хаотизация – упорядочивание – … (отображение в виде карты эквипотенциальных линий, темным цветом выделены волны, организующие фрактальную структуру ний показало, что механизмом перехода к сложным неупорядоченным хаотическим колебаниям является механизм перекрытия резонансов. Область гармонических вынужденных колебаний возникает при низких напряжениях, затем возникают субгармонические колебания и только при высоких напряжениях возникают хаотические неуправляемые колебания [12]. В этом случае под высокими напряжениями как электрических сетей, так и механических конструкций следует понимать не просто их величину, а напряжения, при которых в электрической или механической системах возникают нелинейные эффекты за счет нелинейности изменения каких-либо характеристик системы, например, за счет магнитного насыщения, диссипации энергии или волн, гистерезисных или пластических свойств материала.

Таким образом, в открытых неравновесных системах, обладающих нелинейностью, всегда возможны флуктуации, способные привести к образованию новых типов структур и функциональных связей, при этом эволюция структуры определяется последовательностью событий в соответствии со схемой: функция – структура – флуктуация – функция; функция – флуктуация – структура – функция [13]. Эта эволюция систем подтверждается как результатами математического моделирования (рис. 4, б), так и результатами обширных экспериментальных исследований [14]. Введение в модели чисто нелинейных элементов значительно расширяет их возможности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Процеси самоорганізації в матеріалах різної природи: Навч. посіб. / А.П. Шпак, Ю.А. Куницький, В.А. Прокопенко, С.Ю. Смик. – К.: ІМ ім. Г.В. Курдюмова НАН України, 2004. – 113 с.

2. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фракталы в геомеханике. – К.: Наук. думка, 2005. – 358 с.

3. Арнольд В.И. Теория катастроф. – Изд. 3-е, дополненное. – М.: Наука, 1990. – 128 с.

4. Иконникова Н.А. Особенности моделирования динамики хаотических процессов в детерминированных системах методами аналитической механики // Геотехническая механика: Межведомственный сборник научных трудов. Вып. 73. – Днепропетровск: ИГТМ, 2007. – С. 263-280.

5. Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.

6. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 256 с.

7. Горобець Ю.І., Кучко А.М., Вавилова І.Б. Фрактальна геометрія у природознавстві: Навчальний посібник. – К.: Наук. думка, 2008. – 232 с.

8. Постон Т., Стюард И. Теория катастроф и ее приложения. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 350 с. – Т. 2. – 285 с.

10. Гребенкин С.С., Дегтярь Р.В., Рябичев В.Д. Теория катастроф в обосновании потери устойчивости вмещающих пород кровли в очисных забоях // Школа підземної розробки. Міжнародна науково-практична конференція 17-22 вересня 2007 року. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: НГУ, 2007. – С. 155-157.

11. Франчук В.П., Настоящий В.А., Маркелов А.Е., Чижик Е.Ф. Рабочие поверхности и футеровки барабанных и вибрационных мельниц: Монография. – Кременчуг: Изд-во Щербатых А.В., 2008. – 384 с.

12. Золотухин И.А. Анализ колебаний в многоконтурных электрических моделях теплогидравлических систем. Автореф. дис. кандидата технических наук / Московский энергетический институт. – М., 2008. – 19 с.

13. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 512 с.

14. Открытие № 318 Закономерность пространственно-временной структурно-фазовой самоорганизации грунтовых и породных массивов вокруг протяженных подземных выработок / Л.В. Байсаров, М.А. Ильяшов, В.В. Левит, Т.А. Паламарчук, В.Н. Сергиенко, В.Б. Усаченко, А.А. Яланский // Научные открытия, идеи, гипотезы (1992-2007). Информационно-аналитический обзор. – М.: МААНОН, 2008. – С. 298-299.