

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ  
«СТВОЛ – ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ВЫРАБОТКА»  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Наведено математичну модель, розроблену за допомогою методу скінцевих елементів для професійного комплексу Structure CAD for Windows, що дозволяє одержати якісну характеристику напружень, переміщень в кріпленні спряження вертикального стволу та приконтурного масиву.

**MATHEMATICAL MODELLING OF SYSTEM  
«THE SHAFT – HORIZONTAL DEVELOPMENT»  
THE METHOD OF FINAL ELEMENTS**

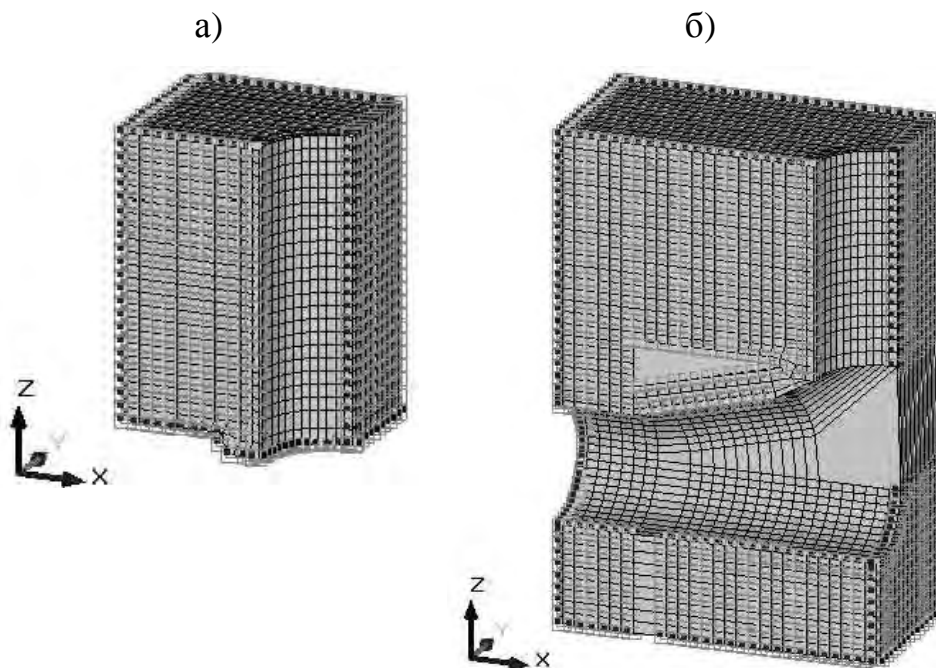
The mathematical model developed by means of a method of final elements for professional complex Structure CAD for Windows is presented, allowing to receive the qualitative characteristic of pressure, movings in крепи interfaces of a vertical shaft and frontier zone of a massive.

В процессе изучения условий эксплуатации Донецкого угольного бассейна накоплены весомые знания об особенностях проявления горного давления в подземных выработках, в т.ч. и в вертикальных стволах. Наиболее сложным участком является сопряжение с околоствольным двором, поэтому целью данного исследования является определение напряженно-деформированного состояния (НДС) моделей системы «ствол – горизонтальная выработка» при взаимодействии крепления со слоистым деформативным массивом [1]. В качестве метода исследования использован метод конечных элементов (МКЭ), программная реализация которого базируется на профессиональном расчетном комплексе Structure CAD for Windows, version 7.31 R.4 (SCAD), который имеет значительную теоретическую разработку и практическую апробацию [1, 2].

Следует отметить, что проведение математического моделирования выполнено в упругой постановке, что несколько снижает точность полученных результатов, так как известно, что породный массив на больших глубинах деформируется в нелинейной области [3]. Однако упругая постановка вычислительного эксперимента позволяет определить основные тенденции деформирования сложной системы «ствол – горизонтальная выработка» и характер влияния слоистости на общее НДС модели.

Для проведения численных расчетов созданы две конечно-элементные модели (КЭ-модели, рис. 1), которые являются континуальными на основе объемных конечных элементов. В качестве базового применялся КЭ библиотеки SCAD элемент 36 (8-узловой изопараметрический конечный объемный элемент задачи теории упругости), который наиболее соответствует геометрии модели и позволяет получить точные результаты. Тип КЭ, который применен в расчетах, определяется формой, функциями, которые определяют зависимость между перемещениями в узлах КЭ и узлов системы, физическим законом, который определяет зависимость между внутренними усилиями и внутренними перемещениями, и набором параметров (жесткостей), которые входят в описание этого

закона и так далее. Все узлы и элементы схемы нумеруются. Номера, которые присвоены КЭ, следует трактовать только как имена, которые позволяют сделать необходимые ссылки в процессе расчета.



а) без сопряжения; б) вместе с сопряжением с горизонтальной выработкой.

Рис. 1. – КЭ-модели ствола (с граничными условиями)

Таким образом, дискретизацию модели можно считать оптимизированной по параметру количества конечных элементов и их отношения к объему модели, что в дальнейшем положительно влияет на сходимость решения мультифронтальным методом с автоматическим способом оптимизации ширины ленты (точность разложения матрицы  $1 \cdot 10^{-6}$ ).

Правило знаков для перемещений принято таким образом, что линейные перемещения положительны, если они направлены в сторону возрастания соответствующей координаты, а углы поворота положительны, если они отвечают правилу правого винта. Правило знаков для напряжений приняты следующие. Компоненты объемного напряженного состояния определяются для элементарного параллелепипеда, который выделен вокруг точки действия напряжений. Кроме того, устанавливаются нормальные напряжения  $N_x (\sigma_x)$ ,  $N_y (\sigma_y)$ ,  $N_z (\sigma_z)$  и касательные напряжения  $T_{xy} (\tau_{xy})$ ,  $T_{yx} (\tau_{yx})$ ,  $T_{xz} (\tau_{xz})$ ,  $T_{zx} (\tau_{zx})$ ,  $T_{zy} (\tau_{zy})$ ,  $T_{yz} (\tau_{yz})$  (обозначение компонент в комплексе SCAD). С учетом закона парности касательных напряжений ( $T_{xy}=T_{yx}$ ,  $T_{xz}=T_{zx}$ ,  $T_{yz}=T_{zy}$ ) выводятся лишь значения трех из них:  $T_{xy}$ ,  $T_{xz}$ ,  $T_{yz}$ .

На рис. 2 показаны положительные значения направлений напряжений и данного наименования соответствующих осей, вдоль которых они направлены, а также плоскостей, в которых они действуют.

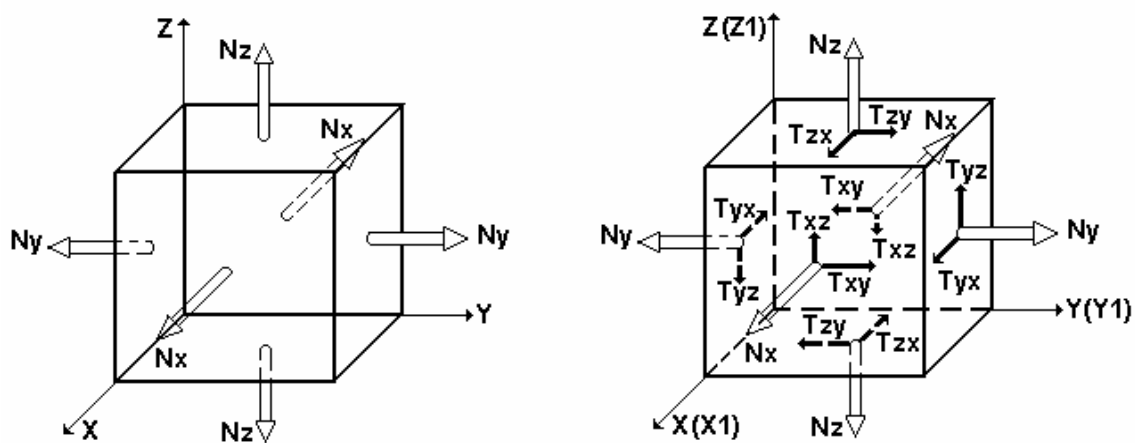


Рис. 2. – Направление положительных значений напряжений

Созданные пространственные модели из объемных элементов для исследования НДС ствола и сопряжения (рис. 1) наиболее полно отражает следующие особенности реальной конструкции:

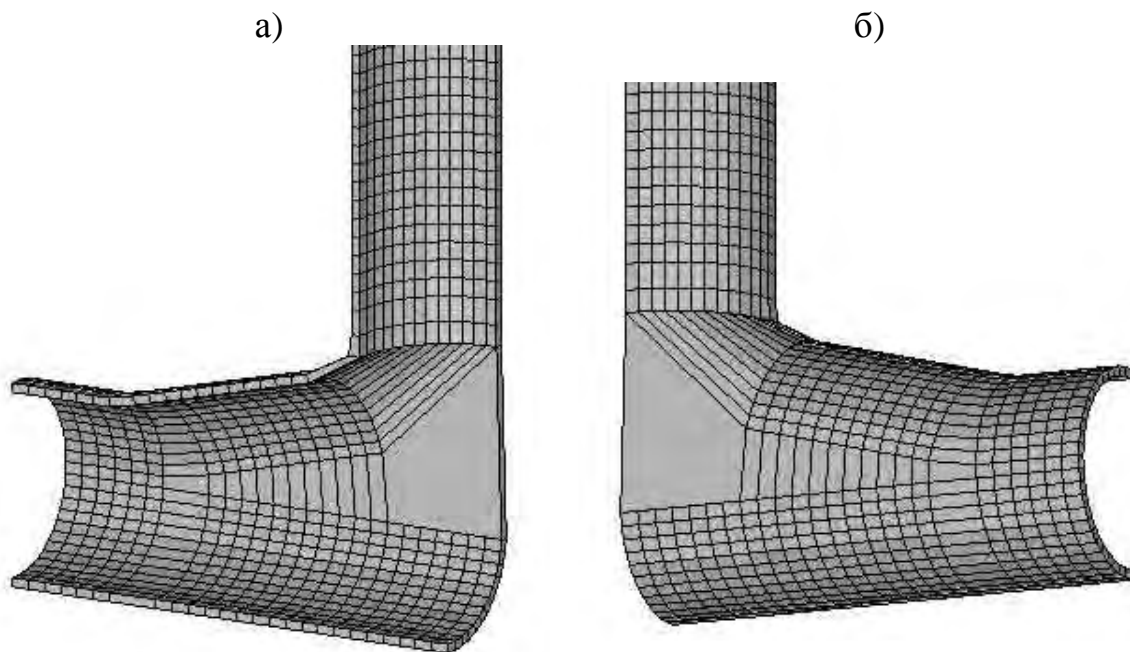
- влияние пространственного фактора на формирование напряженного состояния, то есть влияние третьей компоненты  $\sigma_y$  на компоненты  $\sigma_x$  та  $\sigma_z$ ;
- наиболее полное воссоздание взаимодействия железобетонного крепления с грунтовым массивом.

Разработка этих двух моделей также обусловлена проведением исследования влияния граничных условий, расположенных по нижней грани модели. В стандартных моделях, не учитывающих влияние сопряжения с горизонтальной выработкой на деформирование общей системы и ствола в частности, в качестве граничных условий по нижней грани КЭ-модели устанавливаются запреты перемещений по всем трем степеням свободы. Однако, в реальной ситуации деформирования данной системы об отсутствии перемещений не приходится говорить, так как деформативность сопряжения явно конечна и позволяет стволу и окружающему массиву развиваться как горизонтальные, так и вертикальные перемещения. Поэтому результаты расчета КЭ-модели, представленной на рис. 1., а, являясь стандартными, будут сравниваться с результатами расчета общей системы «ствол – горизонтальная выработка», что позволит выяснить, насколько достоверными являются результаты расчета модели ствола без учета сопряжения.

Размеры расчетной области составляют: длина (по горизонтальной оси  $x$ ) – 13,4 м; высота (по вертикальной оси  $z$ ) – 48,0 м, ширина (по горизонтальной оси  $y$ ) – 15 м. Количество КЭ в моделях: 1-ой – 15 296, 2-ой – 33 114; количество узлов: 1-ой – 17 473, 2-ой – 37 193; количество степеней свободы: 1-ой – около 52 419, 2-ой – около 111 579. Данная задача может считаться задачей средней размерности (количество КЭ – до 50 тысяч).

Объем конечного элемента в моделях колеблется в пределах от  $0,12 \text{ м}^3$  до  $3 \text{ м}^3$  (специальные КЭ в месте сопряжения), что для модели таких размеров достаточно, чтобы сходимость решения и точность результатов были достаточно

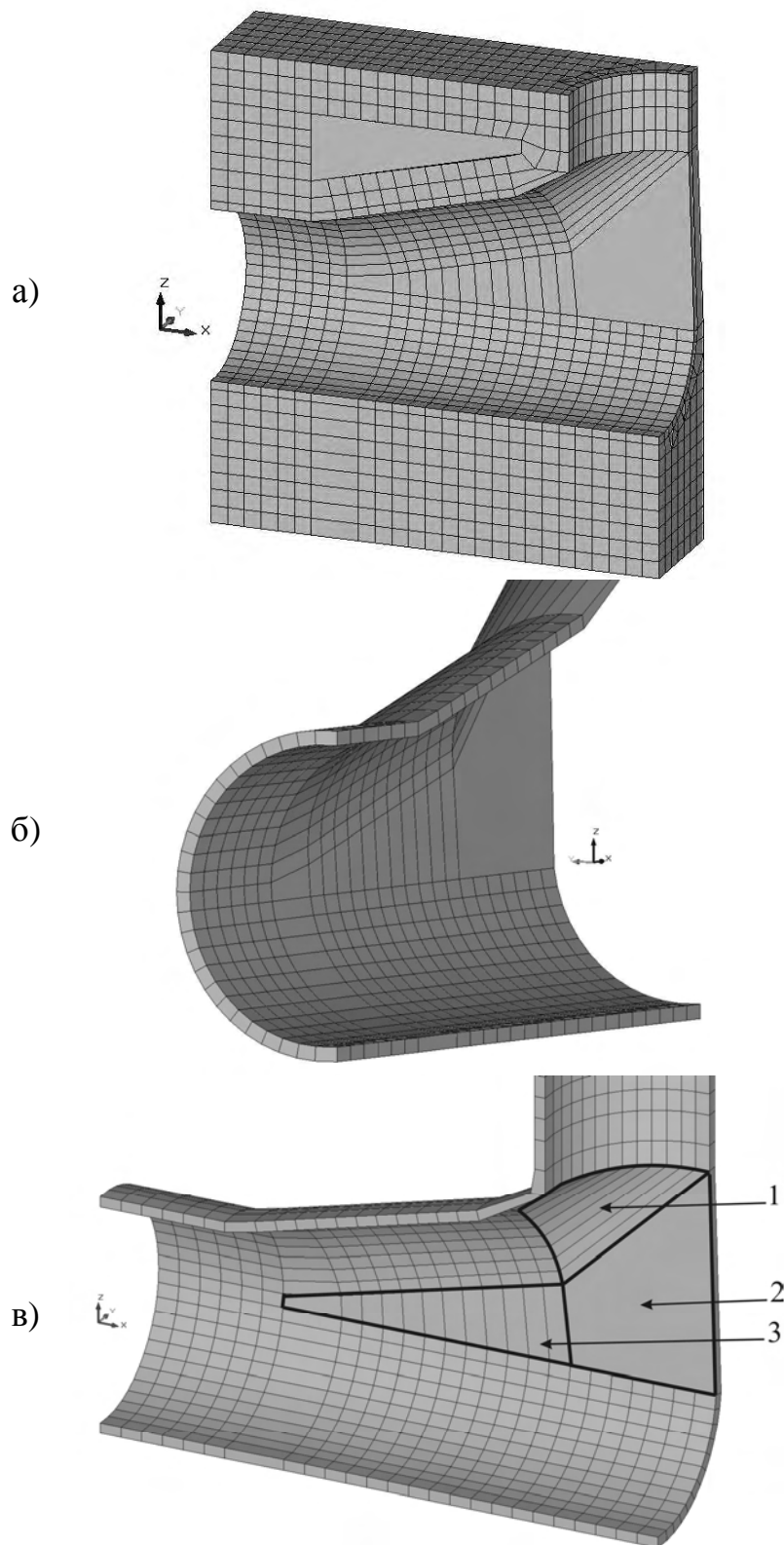
высоки [2]. На рис. 3. представлены фрагменты второй КЭ-модели, в которой массив фрагментирован и для иллюстрации соединения частей модели показано лишь ее крепление.



а) вид со стороны ствола; б) вид со стороны массива.

Рис. 3. – Вид фрагмента КЭ-модели

Примененная при создании перехода техника конечно-элементной дискретизации (рис. 4) заключалась в создании отдельно подсхемы ствола и подсхемы горизонтальной выработки, причем, кроме крепления, объемными КЭ моделировался окружающий массив. В дальнейшем создание модели значительно усложнилось, так как в процессе сборки состыковать горизонтальную и вертикальную трубы с моделью окружающего массива практически невозможно, поэтому представленные подсхемы из полных уменьшались до четвертой части. Таким образом, за счет симметрии стало возможным уменьшения размерности задачи, решение которой, по причине машинных мощностей, было бы невозможным.



а) сопряжение и подходная выработка с массивом; б) сопряжение – вид со стороны подходной; в) сопряжение – вид со стороны ствола.

Рис. 4. – Фрагмент КЭ-модели ствола

После размещения в пространстве модели горизонтальной и вертикальной подсхем с помощью приема, возможного в данном комплексе, часть горизон-

тальной подсыемы изгибалась в два приема и собиралась с вертикальной подсыемой с образованием общей КЭ-модели. В процессе такого изгиба в КЭ-модели образовались три зоны искаженных изопараметрических КЭ (рис. 4, в), причем зона 1 и 2 несколько отрицательно влияет на точность результатов. Даже притом, что во всей модели все узлы являются совместными, то есть узлы, находящиеся на ребре КЭ, отсутствуют, точность получения результатов по напряжениям в 1 и особенно 2 зоне занижена, что связано с увеличением размеров КЭ. Напряженное состояние в зоне 3 (рис. 4, в) можно считать удовлетворительным с точки зрения расположения изополей, что объясняется незначительным увеличением размеров КЭ по сравнению с размерами КЭ окружающего массива и крепления горизонтальной подходной и вертикального ствола. В зоне 1 напряжения также распределяются удовлетворительно, однако на их распределение негативно влияет вытянутость КЭ и даже ввод дополнительных узлов в изопараметрический КЭ не улучшает ситуацию. Также зона 3, которая представляет собой один КЭ больших размеров, не улучшает ситуацию в напряженном состоянии.

Эту проблему в данном исследовании исправить сложно, так как, не разбив данную часть сопряжения на 3 зоны, провести сборку горизонтального и вертикального крепления невозможно. В других комплексах, которые оперируют с моделью как уже заранее созданной геометрией (как комплекс MSC.Nastran, который проводит разбивку твердотельных геометрий SolidWorks), провести дискретизацию такой системы возможно лишь на основе тетраэдров, что значительно ухудшает точность полученных результатов. Поэтому в данном исследовании, пока не разработаны принципы создания моделей столь сложных многосоставных объектов, применение разработанных КЭ-моделей является обоснованным.

Для отображения свойств массива и железобетонного крепления моделям присваивались деформационные параметры. Так как деформационные характеристики железобетона состоят из значений деформационных характеристик бетона и арматуры, предложено учитывать их анизотропию согласно приведенным характеристикам [5]:

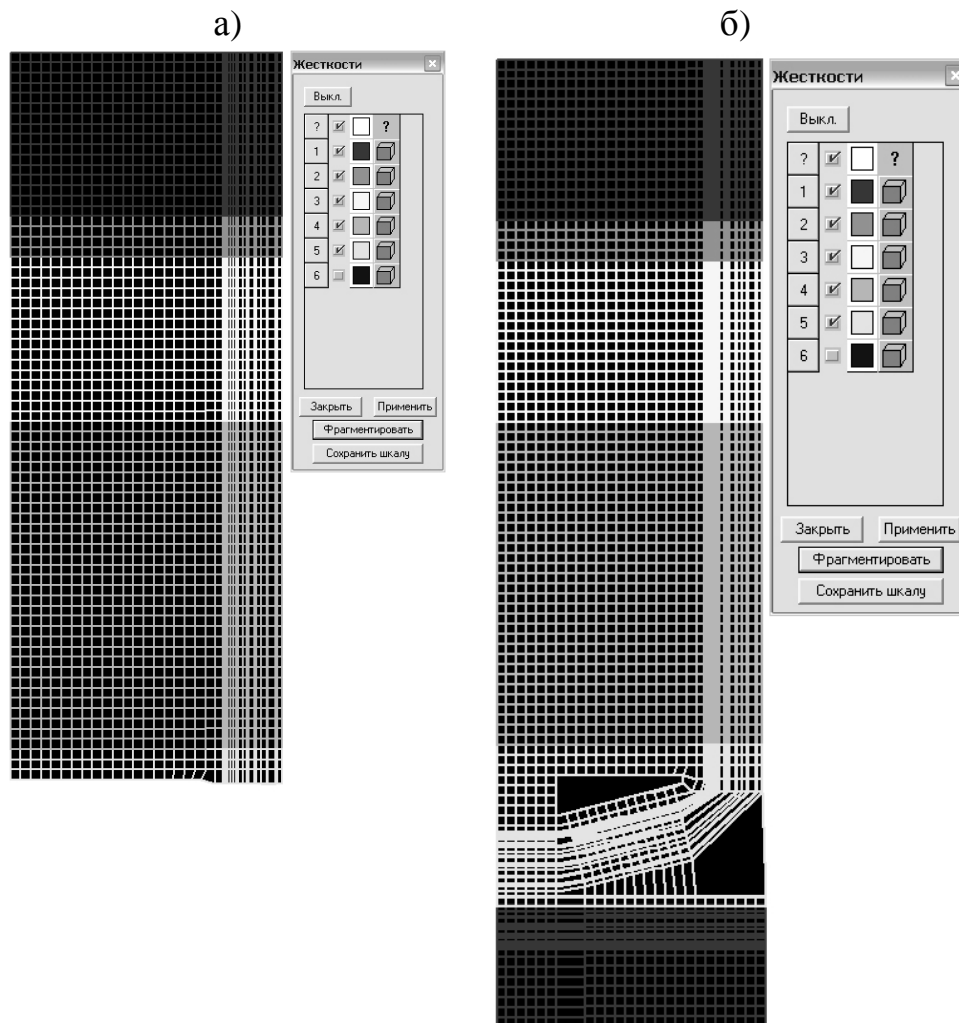
$$E_x = E_{\sigma} \cdot [1 + (n - 1) \cdot \alpha], \quad (1)$$

$$\mu_x = \frac{E_{\sigma}}{E_a} \cdot \left[ \mu_{\sigma} + \frac{(\mu_a - \mu_{\sigma}/n) \cdot \alpha}{1 - (1 - 1/n) \cdot \sqrt{\alpha}} \right], \quad (2)$$

где  $E_x$ ,  $\mu_x$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости ХУ, которые отыскиваются;  $E_{\sigma}$ ,  $\mu_{\sigma}$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона для бетона;  $E_a$ ,  $\mu_a$  – то же для арматуры;  $n = E_a/E_{\sigma}$ ;  $\alpha = F_a/F_{\sigma}$ ;  $F_a$ ,  $F_{\sigma}$  – площади поперечного сечения арматуры и бетона соответственно.

Список жесткостей в соответствии с картой жесткости КЭ-моделей (рис. 5): жесткость № 1 – плотные глины, модуль упругости  $E = 38$  МПа, коэффициент

Пуассона – 0,2, плотность – 17 кН/м<sup>3</sup>; жесткость № 2 – супесь, модуль упругости E= 17 МПа, коэффициент Пуассона – 0,3, плотность – 18 кН/м<sup>3</sup>; жесткость № 3 – суглинок, модуль упругости E= 25 МПа, коэффициент Пуассона – 0,3, плотность – 18 кН/м<sup>3</sup>; жесткость № 4 – слабый суглинок, модуль упругости E= 21 МПа, коэффициент Пуассона – 0,35, плотность – 18 кН/м<sup>3</sup>; жесткость № 5 – слабый суглинок, модуль упругости E= 19 МПа, коэффициент Пуассона – 0,3, плотность – 17 кН/м<sup>3</sup>; жесткость № 6 – железобетон, модуль упругости E= 351 000 МПа, коэффициент Пуассона – 0,03, плотность – 25 кН/м<sup>3</sup>.

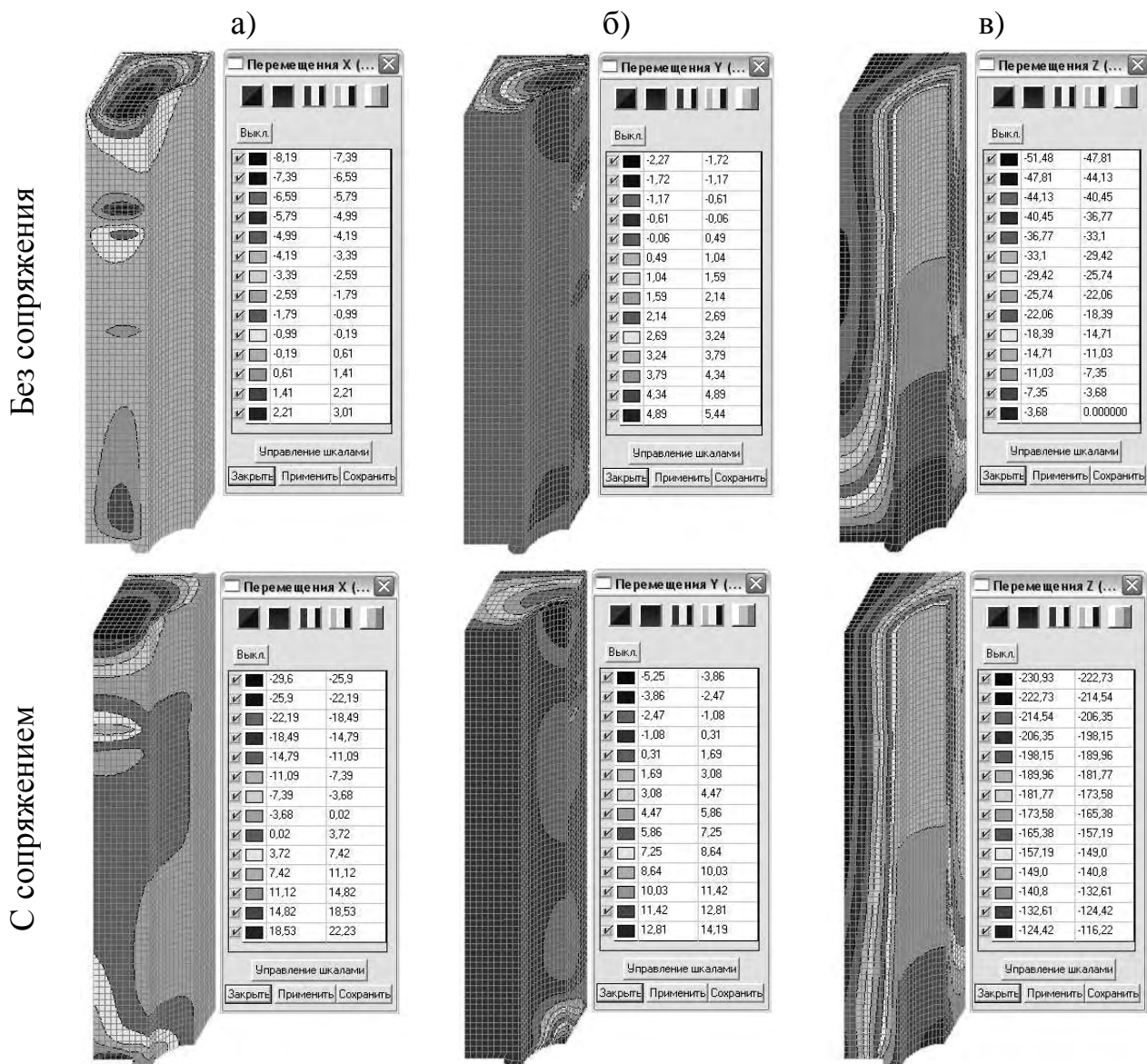


а) без сопряжения; б) с сопряжением.

Рис. 5. – Карта жесткости КЭ-моделей

На КЭ-модели наложены следующие граничные условия: верх модели свободен от граничных условий; правая (плоскость симметрии) и левая плоскость – запрет деформаций по горизонтальным осям; низ модели – запрет деформаций по горизонтальной и вертикальной осям. После выполнения всех операций проводились расчеты и их результаты были проанализированы. Предварим анализу результаты НДС моделей системы «ствол – горизонтальная выработка».

На рис. 6-7 представлены параметры НДС двух моделей (без сопряжения со стволом и с сопряжением).



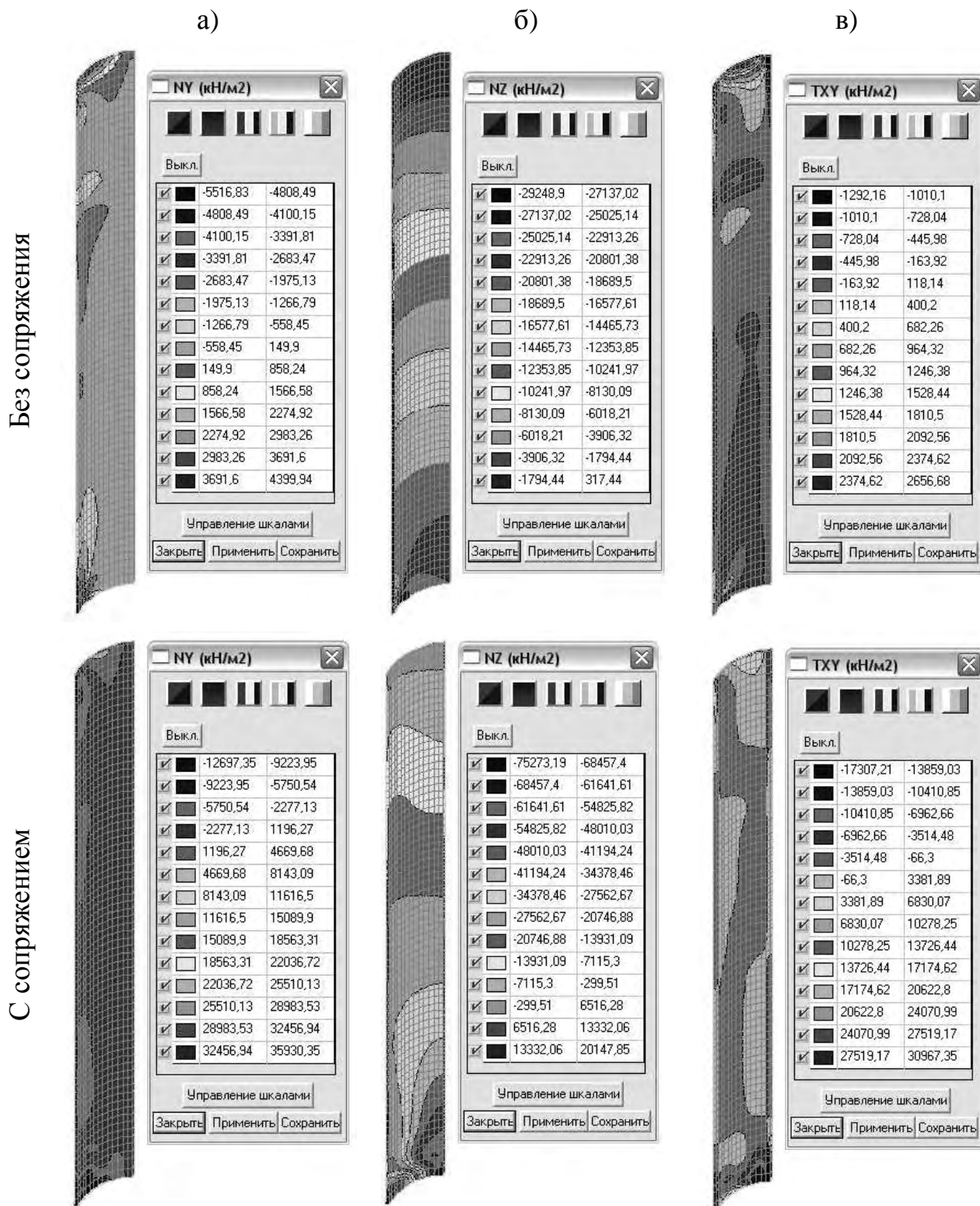
а) по оси X (горизонтальная); б) по оси Y (горизонтальная);  
в) по оси Z (вертикальная).

Рис. 6. – Изолинии и изополя перемещений в моделях (фрагмент – ствол)

Анализ деформированного состояния двух моделей (рис. 6-7) показывает, что учет сопряжения ствола и подходной выработки значительно влияет на распределение перемещений, чем случай, в котором сопряжение заменяется граничными условиями. Качественно характер горизонтальных перемещений по двум осям в двух моделях практически идентичен, однако количественно распределение перемещений значительно отличается. Следует отметить, что на границе слоёв (между жесткостями 2 и 3) наблюдается характерная зона перераспределения горизонтальных напряжений, обусловленная скачкообразным



изменением деформационных характеристик слоев (изменение модуля упругости практически в 1,5 раза).



а) нормальных по оси Y (горизонтальная); б) нормальных по оси Z (вертикальная); в) касательных в плоскости XY.

Рис. 7. – Изолинии и изополя напряжений в моделях (фрагмент – крепление ствола)

Также следует отметить характерную зону распределения горизонтальных перемещений в нижней части ствола в модели с сопряжением, которая объясняется активным деформированием как сопряжения, так и подходной горизонтальной выработки. Несомненно, учесть характер деформирования в случае граничных условий невозможно.

Кроме качественных изменений изополей горизонтальных перемещений, следует отметить количественные изменения. Так отличие между горизонтальными перемещениями двух моделей следующие: максимальные горизонтальные перемещения по оси X изменились в 3,5...3,6 раза (с -8,19 до -29,6 мм в верхней части модели) и максимальные горизонтальные перемещения по оси Y изменились примерно в 2 раза (с -2,27 до -5,25 мм в верхней части модели). Сравнение модели в нижней части ствола может показать изменение до 4 раз, однако такое сравнение не будет корректным, так как модель с граничными условиями по нижней грани значительно уступает модели с сопряжением по уровню адекватности реальному поведению системы «ствол – горизонтальная выработка».

Наибольший интерес представляет картина распределения вертикальных перемещений в обеих моделях (рис. 6, в), так как характер распределения данного параметра изменился и качественно, и количественно.

Прежде всего, следует отметить, что в модели с сопряжением можно отметить несколько неравномерный характер распределения вертикальных перемещений в области примыкания к сопряжению. Качественно характер вертикальных перемещений значительно изменяется, что связано с влиянием граничных условий модели без сопряжения, которые запрещают вертикальные напряжения, однако на границе реального сопряжения и ствола отмечается зона активного деформирования, отмеченного изменением армировки ствола и возможными трещинами.

Так в модели без сопряжения вертикальные перемещения по нижней границе ствола ожидаемо, равны нулю, в то время как в модели с сопряжением перемещения на той же границе равны -116...-120 мм. Это объясняется значительной деформационной способностью, как сопряжения, так и горизонтальной подходной, которые, деформируясь, позволяют развиваться и вертикальным перемещениям ствола. Количественно максимальные вертикальные перемещения в верхней части ствола увеличиваются в модели с сопряжением в 4,48...4,5 раза (с -51,48 до -230,93 мм), что свидетельствует о значительном влиянии сопряжения на общее деформированное состояние модели системы «ствол – горизонтальная выработка».

Напряженное состояние значительно изменяется как качественно, так и количественно, что также отображается в зоне границы ствола и сопряжения, где концентрация напряжений наибольшая.

Сравнение напряжений количественно затруднено, так как характер всех компонент напряжений значительно изменен (рис. 7), причем сравнение изополей одного цвета представляется затруднительным, так как они изменили свое положение. Так максимальные горизонтальные перемещения качественно из-

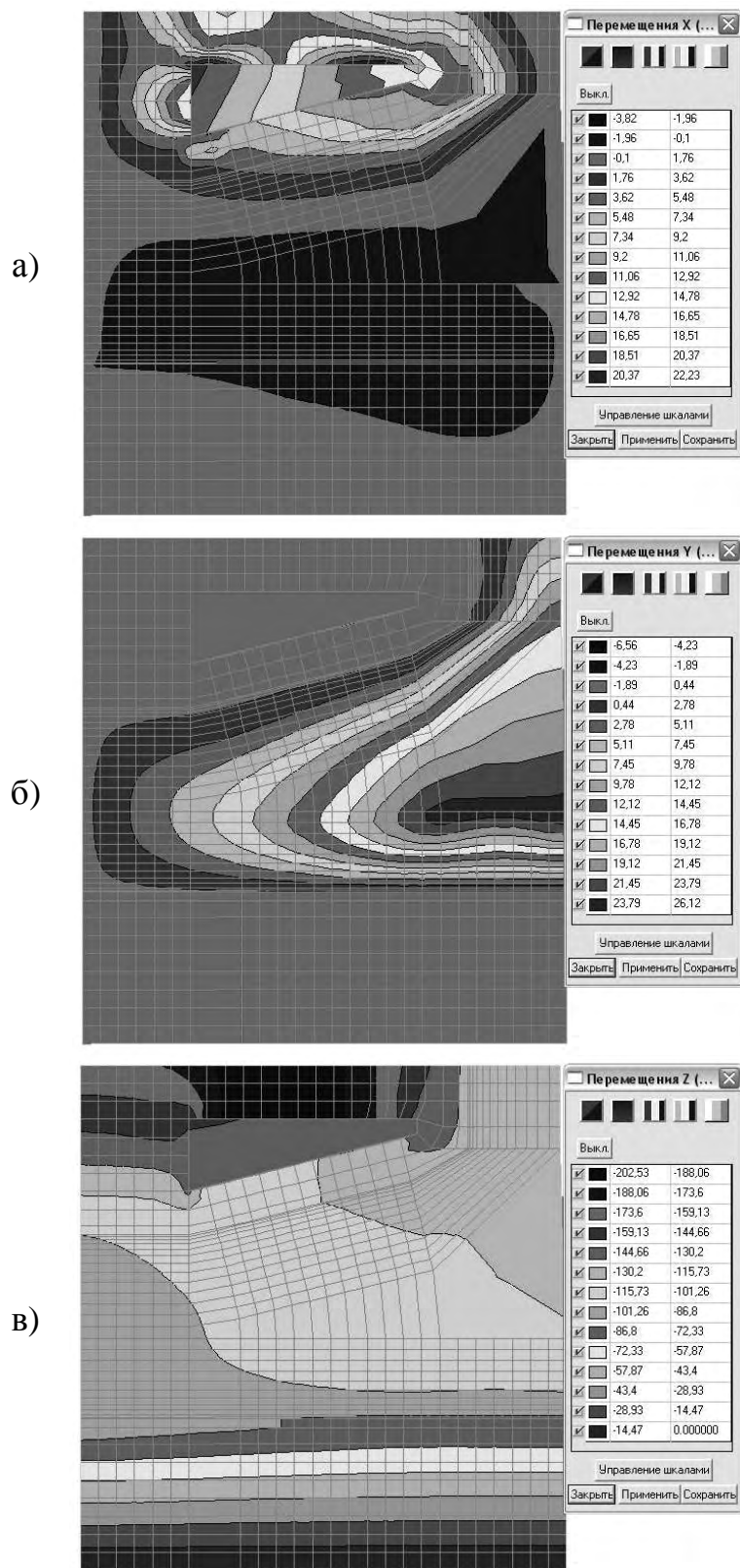
менились в месте примыкания ствола к сопряжению, причем они изменились и количественно (в 2,2...2,3 раза – с -5,5 МПа до -12,6 МПа). При анализе горизонтальных перемещений также следует отметить зону перенапряжения, обусловленную скачком деформационных характеристик между жесткостями 2 и 3, однако в модели с сопряжением ее расположение несколько сглажено, что обусловлено значительным перенапряжением в концентраторе на границе ствола и сопряжения.

Характер распределения вертикальных напряжений в обеих моделях качественно более сходен, однако в модели с сопряжением отмечается неравномерное распределение изополей ближе к границе ствола и сопряжения. Количественно вертикальные напряжения также значительно меняются в обеих моделях, увеличиваясь в модели с сопряжением примерно в 2,5...2,6 раза (с -29,2 МПа до -75,3 МПа). Такие значения сжимающих вертикальных напряжений свидетельствуют о возможном трещинообразовании бетона в концентраторе на границе ствола и сопряжения. Исследование модели с сопряжением также дает возможность проанализировать влияние сопряжения, которое вызывает неравномерность распределения напряжений, связанное с неравномерностью деформирования, которое менее выражено в модели без сопряжения, в которой крепления ствола в вертикальном направлении деформируется более равномерно.

Значительно влияние сопряжения отражается в картине касательных напряжений в плоскости поперечного сечения ствола (в кольцевом направлении). Это отображено не только в качественном характере распределения касательных напряжений, но и в их значительном увеличении в модели с сопряжением (примерно в 12...13 раз – с -1,3 МПа до -17,3 МПа). Значительная концентрация напряжений также наблюдается в зоне примыкания ствола и сопряжения, что также может свидетельствовать о возможных негативных последствиях действия напряжений.

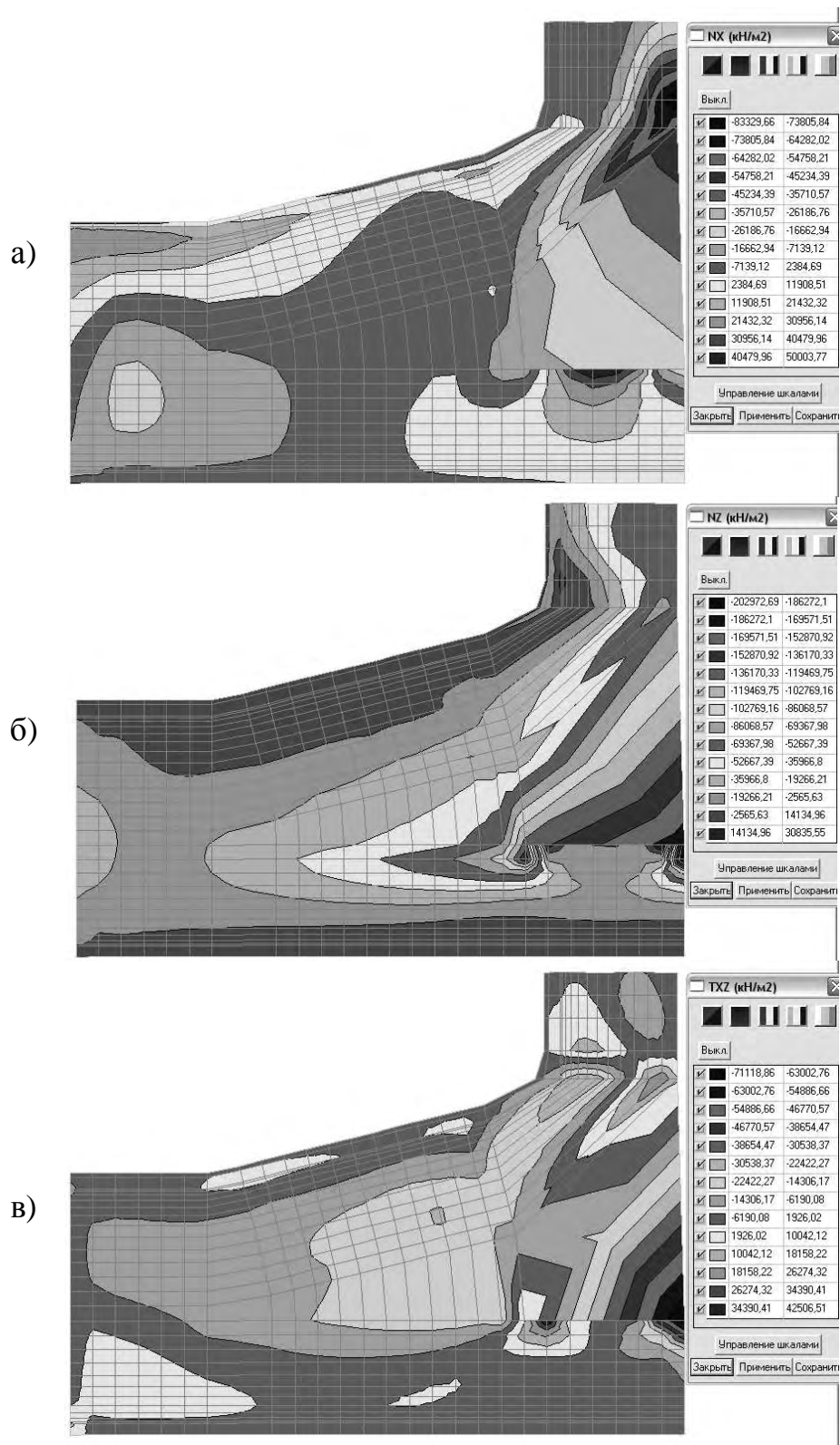
Для более детального анализа данного концентратора также проведен анализ НДС сопряжения и подходной выработки, который позволил более детально рассмотреть поведение этих частей системы «ствол – горизонтальная выработка». На рис. 8 и 9 представлены параметры НДС сопряжения и горизонтальной выработки.

Полученные результаты анализа модели ствола с сопряжением свидетельствуют о значительных вертикальных перемещениях (рис. 8, в) и высоком уровне напряженного состояния (рис. 9). Так горизонтальные перемещения сопряжения и подходной выработки незначительны (до 30 мм), однако уровень вертикальных напряжений (максимальные – -202 мм, средний уровень – -130...-140 мм) свидетельствует о значительных оседаниях сопряжения. Также следует отметить, что вертикальные перемещения не отличаются значительной неравномерностью (небольшое искажение изополей вертикальных перемещений наблюдается в области перехода сопряжения и подходной), что является позитивным фактором и свидетельствует о достаточной жесткости сопряжения.



а) по оси X (горизонтальная); б) по оси Y (горизонтальная); в) по оси Z (вертикальная).

Рис. 8. – Изолинии и изополя перемещений в модели (с сопряжением, фрагмент – сопряжение):



а) нормальных по оси X (горизонтальная); б) нормальных по оси Z (вертикальная);  
в) касательных в плоскости XZ.

Рис. 9. – Изолинии и изополя напряжений в модели (с сопряжением, фрагмент – сопряжение)

Напряженное состояние сопряжения и подходной выработки отличается неравномерным характером и наличием нескольких концентраторов (рис. 8). Так

горизонтальные напряжения в месте перехода вертикальной выработки в сопряжение отличаются повышенным уровнем (максимально до -83 МПа) и значительной площадью распространения (пределы – от -83 до -35 МПа). Из данных параметров можно сделать вывод, что в данном концентраторе запас прочности железобетона исчерпан и возможно трещинообразование, причем порода за креплением также разрушена и перешла в пластическое состояние. К сожалению, применение специальных элементов, рассмотренное выше (рис. 4, в) привело к завышению напряжений на их границах, что неадекватно реальному уровню напряженного состояния. Однако рассмотренные напряжения вне специальных КЭ также имеют высокий уровень (вертикальные – в среднем до -69 МПа, касательные – в среднем до -22 МПа), что свидетельствует о локальном разрушении бетона. В дальнейшем при разработке более совершенных моделей сопряжения ствола и подходной выработки, можно учесть сложность моделирования перехода вертикальной и горизонтальной выработок и сгустить сетку КЭ на границе. Учитывая новизну применения математического моделирования в данном вопросе, адекватность полученных результатов является удовлетворительной, однако их уточнение возможно при создании новых конечно-элементных моделей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. SCAD для пользователя [Текст] / В. С. Карпиловский, Э. З. Криксунов, А. В. Перельмутер и др. – К.: ВВП «Компас», 2000. – 332 с.
2. Перельмутер, А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа [Текст] / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – К.: Сталь, 2002. – 600 с.
3. Алексеев, А. Д. Предельное состояние горных пород [Текст] / А. Д. Алексеев, И. В. Недодаев. – К.: Наукова думка, 1982. – 200 с.