ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.927

Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец

Непрерывность по параметру решений одномерных линейных краевых задач

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

Знайдено достатні умови неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних лінійних крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку за більш сильною, ніж рівномірна, нормою соболевського простору $(W_1^1)^m$. Це дозволило отримати умови неперервності за параметром розв'язків лінійних крайових задач довільного порядку $m \geqslant 2$ за нормою простору W_1^m.

Рассмотрим параметризированное числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ семейство наиболее общих линейных краевых задач для системы $m \in \mathbb{N}$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \qquad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$U_\varepsilon y(\cdot;\varepsilon) = c_\varepsilon. \tag{2}$$

Здесь квадратные матрицы-функции $A(\cdot;\varepsilon) \in L([a,b];\mathbb{C}^m) =: (L_1)^{m\times m}$, вектор-функции $f(\cdot;\varepsilon) \in L([a,b];\mathbb{C}^m) =: (L_1)^m$, векторы $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, а линейные ограниченные операторы

$$U_\varepsilon \colon W_1^1([a,b];\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Под решением системы (1_ε), (2_ε) понимается вектор-функция $y(\cdot;\varepsilon) \in W_1^1([a,b];\mathbb{C}^m) = {}=: (W_1^1)^m$, которая почти всюду на конечном отрезке $[a,b]$ имеет производную, для которой равенство (1_ε) выполняется на подмножестве полной меры Лебега, которое может зависеть от решения. Кроме того, $y(\cdot;\varepsilon)$ должна удовлетворять равенству (2_ε).

Если линейные операторы U_ε допускают продолжения с $(W_1^1)^m$ до *ограниченных* линейных операторов

$$\widetilde{U}_\varepsilon \colon C([a,b];\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m, \tag{4}$$

то линейные краевые условия вида (2_ε) называют *общими* (см. [1, 2] и цитированную там литературу). Такие краевые задачи охватывают все классические виды краевых условий:

задачи Коши, двухточечные и многоточечные, интегральные и смешанные краевые задачи (см. [3] и приведенную там библиографию). Непрерывность по параметру решений общих краевых задач в *равномерной* норме исследовалась ранее в работах [4–7]. Полученные там результаты носят законченный характер и близки к окончательным.

Цель данной работы — исследовать решения задачи (1_ε), (2_ε) в максимальной общности, т. е. без предположения о существовании непрерывных продолжений (4_ε). Вместе с тем приводимые нами результаты являются новыми и для условий вида (4_ε), поскольку мы устанавливаем непрерывность решений по параметру ε по более сильной, чем в $(C)^m$, норме пространства $(W_1^1)^m$. Поэтому они уточняют результаты [4–7].

Будем предполагать всюду далее, что выполнено

Предположение $\mathcal{E}$. *Предельная однородная краевая задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \qquad U_0 y(\cdot;0) = 0$$

имеет только тривиальное решение.

Это условие равносильно тому, что неоднородная краевая задача (1_0), (2_0) имеет ровно одно решение при любых значениях вектор-функции $f(\cdot;0) \in (L_1)^m$ и вектора $c_0 \in \mathbb{C}^m$.

В работе [7] для исследуемой задачи установлено утверждение, которое с учетом приводимых ниже теорем 2 и 3 равносильно следующему.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1_0), (2_0) *выполнено предположение* $\mathcal{E}$ *и при* $\varepsilon \to 0+$ *условия:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_1 \to 0$;
2) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_1 \to 0$;
3) $c_\varepsilon \to c_0$;
4) $\|U_\varepsilon - U_0\| \to 0$.

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ *задача* (1_ε), (2_ε) *имеет единственное решение и*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{1,1} \to 0.$$

Здесь и всюду далее $\|\cdot\|_p$ *— норма в пространстве Лебега* L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *а* $\|\cdot\|_{m,1}$ *— норма в пространстве Соболева* W_1^m, $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. Условие *1* в теореме 1 является неулучшаемым. Оно необходимо для непрерывности по параметру в норме $(W_1^1)^m$ решений задачи Коши:

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon), \qquad y(a;\varepsilon) = c$$

при каждом значении вектора $c \in \mathbb{C}^m$. Условия *2* и *3* также неулучшаемы.

Однако условие *4* теоремы 1 можно ослабить (см. теорему 4 ниже).

2. Основные результаты. Опишем сначала класс линейных непрерывных операторов

$$U\colon W_1^1([a,b];\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m, \tag{5}$$

посредством которых задаются дополнительные "краевые" условия.

Теорема 2. *При каждом значении матрицы* $\alpha \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *и квадратной матрицы-функции* $\Phi(\cdot) \in L_\infty([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ *формула*

$$U_{\alpha,\phi} y = \alpha y(a) + \int\limits_a^b \Phi(s) y'(s) ds, \qquad y \in (W_1^1)^m \tag{6}$$

задает некоторый линейный непрерывный оператор $U_{\alpha,\phi}$ вида (5). *Обратно, для каждого линейного непрерывного оператора* (5) *найдутся такие значения α и $\Phi(\cdot)$, что $U = U_{\alpha,\Phi}$. Отображение $U \mapsto \{\alpha, \Phi(\cdot)\}$ является взаимно однозначным.*

Более точно, последнее утверждение означает, что пары $\{\alpha_1, \Phi_1(\cdot)\}$ и $\{\alpha_2, \Phi_2(\cdot)\}$ задают по формуле (6) один и тот же оператор тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \Phi_1(t) = \Phi_2(t)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Замечание 2. Можно показать, что оператор $U_{\alpha,\Phi}$ допускает продолжение до непрерывного линейного оператора из $(C)^m$ в $\mathbb{C}^m$ тогда и только тогда, когда матрица-функция $\Phi(\cdot)$ совпадает почти всюду на $[a, b]$ с некоторой матричной функцией ограниченной вариации.

Теорема 3. *Пусть $\varepsilon \to 0+$.*

1. Условие $\|U_{\alpha_\varepsilon,\Phi_\varepsilon} - U_{\alpha_0,\Phi_0}\| \to 0$ равносильно тому, что $\alpha_\varepsilon \to \alpha_0$ и $\|\Phi(\cdot;\varepsilon) - \Phi(\cdot;0)\|_\infty \to \to 0$.

2. Условие, что оператор-функция $U_{\alpha_\varepsilon,\Phi_\varepsilon}$ сильно ограничена на $[0, \varepsilon_0]$ и сильно непрерывна в нуле, эквивалентно тому, что

$$\alpha_\varepsilon \to \alpha_0, \qquad \|\Phi(\cdot;\varepsilon)\|_\infty = O(1), \qquad \int\limits_a^t \Phi(s;\varepsilon)\,ds \to \int\limits_a^t \Phi(s;0)\,ds, \qquad t \in (a, b]. \tag{7}$$

Основным результатом работы является

Теорема 4. *В формулировке теоремы 1 условие 4 можно заменить более слабым условием:*

4′) оператор-функция U_ε сильно ограничена на $[0, \varepsilon_0]$ и сильно непрерывна в нуле. Оно равносильно условиям (7) *на α_ε и $\Phi(\cdot;\varepsilon)$.*

Следующий пример показывает, что теорема 4 сильнее теоремы 1.

Пример. Пусть $m = 1$, $\alpha_\varepsilon \equiv 0$,

$$\Phi(t;\varepsilon) = \begin{cases} e^{it/\varepsilon}, & \varepsilon > 0; \\ 0, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что выполнены все условия (7). Однако

$$\|\Phi(\cdot;\varepsilon) - \Phi(\cdot;0)\|_\infty = \|e^{it/\varepsilon}\|_\infty \equiv 1 \nrightarrow 0.$$

Поэтому условие *4* теоремы 1 не выполняется.

Применения. Рассмотрим неоднородную краевую задачу с параметром для скалярного дифференциального уравнения произвольного порядка $m \geqslant 2$:

$$z^{(m)}(t;\varepsilon) + p_{m-1}(t;\varepsilon)z^{(m-1)}(t;\varepsilon) + \cdots + p_0(t;\varepsilon)z(t;\varepsilon) = \varphi(t;\varepsilon), \qquad t \in [a, b], \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk}(\varepsilon)z^{(k-1)}(a;\varepsilon) + \int\limits_a^b \varphi_j(t;\varepsilon)z^{(m)}(t;\varepsilon)\,dt = c_j(\varepsilon), \qquad j = \overline{1, m}. \tag{9}$$

Здесь комплекснозначные коэффициенты уравнения $p_i(\cdot;\varepsilon)$ и правая часть уравнения являются интегрируемыми по Лебегу на $[a, b]$, функции $\varphi_j(\cdot;\varepsilon) \in L_\infty([a, b];\mathbb{C})$, а числа $\alpha_{jk}(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, $c_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, j, $k = \overline{1, m}$.

Под решением краевой задачи (8_ε), (9_ε) понимается функция $z(t;\varepsilon) \in W_1^m([a,b];\mathbb{C})$, которая удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению (8_ε) почти всюду на отрезке $[a,b]$ и краевым условиям (9_ε).

Предположение $\mathcal{E}$ для рассматриваемой задачи принимает вид

Предположение $\mathcal{E}'$. *Предельная однородная краевая задача*

$$z^{(m)}(t;0) + p_{m-1}(t;0)z^{(m-1)}(t;0) + \cdots + p_0(t;0)z(t;0) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk}(0) z^{(k-1)}(a;0) + \int\limits_a^b \varphi_j(t;0) z^{(m)}(t;0)\,dt = 0, \qquad j = \overline{1,m}$$

имеет только тривиальное решение.

Для решений задач (8_ε), (9_ε) справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнено предположение $\mathcal{E}'$, а при $\varepsilon \to 0+$ и k, $j = \overline{1,m}$ условия:*

1) $\|p_j(\cdot;\varepsilon) - p_j(\cdot;0)\|_1 \to 0$;

2) $\|\varphi(\cdot;\varepsilon) - \varphi(\cdot;0)\|_1 \to 0$;

3) $\alpha_{jk}(\varepsilon) \to \alpha_{jk}(0)$;

4) $c_j(\varepsilon) \to c_j(0)$;

5) $\|\varphi_j(\cdot;\varepsilon)\|_\infty = O(1)$;

6) $\int\limits_a^t \varphi_j(s;\varepsilon)\,ds \to \int\limits_a^t \varphi_j(s;0)\,ds$, $t \in (a,b]$.

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ решения задач (8_ε), (9_ε) существуют, определены однозначно и удовлетворяют предельному соотношению

$$\|z(\cdot;\varepsilon) - z(\cdot;0)\|_{m,1} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0+.$$

Отметим, что при более сильном, чем *5* + *6*, условии

$$\|\varphi_j(\cdot;\varepsilon) - \varphi_j(\cdot;0))\|_\infty \to 0, \qquad j = \overline{1,m},$$

и тех же прочих условиях, утверждение теоремы 5 установлено ранее в [7].

Исследование поддержано Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, грант 28.1/017.

1. *Cole R. H.* General boundary conditions for an ordinary linear differential system // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – **111**. – P. 521–550.
2. *Bryan R. N.* A linear differential system with general linear boundary conditions // J. Diff. Eq. – 1969. – **5**. – P. 38–48.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1965. – 703 с.
4. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Соврем. проблемы математики. Новейшие достижения. – Т. 30. – Москва: ВИНИТИ, 1987. – С. 3–103.
5. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – No 9. – С. 23–27.
6. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, No 1. – С. 227–239.

7. *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Інститут математики НАН України, 2009. – 148 с.

Институт математики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 17.03.2010

T. I. Kodliuk, V. A. Mikhailets

Continuous parameter dependence for solutions of one-dimensional linear boundary-value problems

Sufficient conditions are found for the continuous dependence on a parameter of the solutions of the most general linear boundary-value problems for systems of first-order linear differential equations in the Sobolev space $(W_1^1)^m$, whose norm is stronger than the uniform one. This allows us to obtain sufficient conditions for the continuous dependence on the parameter of the solutions of linear boundary-value problems of an arbitrary order $m \geqslant 2$ in the W_1^m-norm.