



УДК 532.526

© 2010

Член-корреспондент НАН України А. А. Авраменко

Модель неустойчивости Лоренца для биоконвекции

Розвинено нелінійну модель Лоренца для дослідження критеріїв нестійкості біоконвективної течії для мікроорганізмів, рух яких регулюється силою ваги. На основі даної моделі визначені границі різних режимів руху середовища. Виявлено п'ять зон біоконвективних потоків.

Процесс ферментации заключается в выращивании колонии микроорганизмов. При этом желательнее, чтобы среда была неподвижна. Сами микроорганизмы могут двигаться под действием гравитационных сил (gyrotactic microorganisms), градиента концентрации кислорода (oxytactic microorganisms), светового излучения (phototaxis microorganisms), градиента питательных веществ (chemotaxis microorganisms) и т. д. В результате этого движения происходит перераспределение плотности среды, что при определенных условиях может вызвать конвективное движение — биоконвекцию.

Работы по исследованию устойчивости биоконвекции до сих пор ограничивались линейным анализом [1–5 и др.]. Это позволяло найти критерий начала возникновения биоконвективного потока. Однако экспериментально установлено, что при биоконвекции возможны различные гидродинамические режимы течения, вплоть до возникновения турбулентности [6–10].

В настоящем исследовании на основе подхода Лоренца [11] сделана попытка определить границы различных гидродинамических режимов двумерной биоконвекции для gyrotactic microorganisms.

Базовые уравнения. Рассмотрим биоконвективные процессы в плоском двумерном вертикальном слое высотой h . В общем виде уравнения для биоконвективного движения gyrotactic microorganisms можно представить в виде [1]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \hat{k} N v \Delta \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) N = -\operatorname{div}(N W c \hat{p} - D \nabla N), \quad (3)$$

где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения; p — давление, t — время; \mathbf{v} — вектор скорости ($u - x$ — компонента (горизонтальная), $v - y$ — компонента (вертикальная)); ρ — плотность среды; ρ_m — плотность микроорганизма; $\Delta\rho = \rho_m - \rho$; μ — динамическая вязкость; D — коэффициент диффузии микроорганизмов; N — концентрация микроорганизмов; v — средний объем микроорганизма; \hat{p} — единичный вектор направления движения микроорганизмов; $W_c\hat{p}$ — вектор средней скорости движения микроорганизмов относительно жидкости (предполагается, что W_c является постоянной величиной); \hat{k} — орт в направлении y .

Представим концентрацию микроорганизмов как сумму концентраций невозмущенной (покоящейся) среды $N_0(y)$ и концентрацию возмущенной $n(t, x, y)$

$$N = N_0(y) + n(t, x, y), \quad (4)$$

где [1]

$$N_0(y) = \bar{N} \frac{\text{Pe} \exp\left(\text{Pe} \frac{y}{h}\right)}{\exp(\text{Pe}) - 1}; \quad (5)$$

\bar{N} — средняя концентрация в слое; $\text{Pe} = W_c h / D$ — число Пекле. При условии $\text{Pe} \rightarrow 0$ из (5) следует $N_0 = \bar{N} = \text{const}$. Для упрощения анализа остановимся на этом случае.

Так как рассматривается двумерная задача, то для анализа удобно ввести функцию тока ψ следующим образом: $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$. После подстановки этих соотношения, а также (4) в систему (1)–(3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) = \nu \nabla^4\psi + g \frac{\Delta\rho}{\rho} v \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial y} = -\text{div}(nW_c\hat{p} - D\nabla n). \quad (7)$$

Для \hat{p} используем модель [1]

$$\hat{p} = \hat{k} + \tilde{p}'(t, x, y), \quad (8)$$

где

$$\tilde{p}'(t, x, y) = (-B\xi, 0); \quad (9)$$

$$B = 3 \frac{\mu}{\rho_m g H} — \quad (10)$$

параметр ориентации; H — смещение центра масс микроорганизма относительно его центра плавучести;

$$\xi = (1 + \alpha_0) \frac{\partial u}{\partial y} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (11)$$

В (11) α_0 представляет собой эксцентриситет, который вычисляется по формуле

$$\alpha_0 = \frac{b_{\max}^2 - b_{\min}^2}{b_{\max}^2 + b_{\min}^2}. \quad (12)$$

Здесь b_{\max} — большая полуось микроорганизма, который имеет форму эллипсоида; b_{\min} — малая полуось.

Следуя Лоренцу [11], рассмотрим задачу со свободными границами. В этом случае система (6), (7) должна быть проанализирована при следующих условиях:

$$\psi = \nabla^2 \psi = n = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (13)$$

$$\psi = \nabla^2 \psi = n = 0 \quad \text{при} \quad y = h.$$

Возмущенные уравнения и их анализ. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (8), выберем следующие соотношения для возмущающих функций [11]

$$\psi = \sqrt{2} \frac{D(1+a^2)}{a} X(\text{Fo}) \sin\left(\frac{\pi ax}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right), \quad (14)$$

$$n = \frac{N_0}{\pi r} \left[\sqrt{2} Y(\text{Fo}) \cos\left(\frac{\pi ax}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - Z(\text{Fo}) \sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right) \right], \quad (15)$$

где $r = \text{Ra}/\text{Ra}_c$, $\text{Ra} = gh^3 v \Delta \rho N_0 / (D\mu)$, $\text{Ra}_c = \pi^4 (1+a^2)^3 / a^2$ — числа Рэлея, $\text{Fo} = \pi^2 (1+a^2) Dt / h^2$ — число Фурье.

Подстановка (14) и (15) в (6) дает

$$\frac{dX(\text{Fo})}{d\text{Fo}} = \text{Sc}[Y(\text{Fo}) - X(\text{Fo})], \quad (16)$$

где $\text{Sc} = \mu / (\rho D)$ — число Шмидта.

После подстановки (14) и (15) в (7) получаем $R(x, y)$ — невязку. Чтобы найти $dY/d\text{Fo}$ и $dZ/d\text{Fo}$, необходимо (следуя методу Галеркина) умножить $R(x, y)$ на пробные функции (в нашем случае $\sin(\pi y/h)$ и $\sin(2\pi y/h)$, а затем на $\cos(\pi ax/h)$ и $\sin(\pi ax/h)$) и проинтегрировать по y в пределах от нуля до h и от нуля до h/a . В результате получаем

$$\frac{dY(\text{Fo})}{d\text{Fo}} = AX(\text{Fo}) + X(\text{Fo})Z(\text{Fo}) - Y(\text{Fo}), \quad (17)$$

$$\frac{dZ(\text{Fo})}{d\text{Fo}} = -X(\text{Fo})Y(\text{Fo}) - bZ(\text{Fo}), \quad (18)$$

где

$$A = \frac{B\pi^2 r W_c}{h} \frac{4 + 2(b-2)\alpha_0}{b}, \quad (19)$$

$b = 4/(1+a^2)$. Система (16)–(18) подобна системе Лоренца [11]. Однако имеются отличия в знаках в уравнениях (17) и (18).

Автономная система (16)–(18) имеет два стационарных состояния. Первое стационарное состояние

$$X(\text{Fo}) = Y(\text{Fo}) = Z(\text{Fo}) = 0. \quad (20)$$

Матрица взаимодействия в этой точке имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} -\text{Sc} & \text{Sc} & 0 \\ A & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix}. \quad (21)$$

При $A > 0$ характеристическое уравнение матрицы взаимодействия имеет три вещественных корня. При $A < 1$ все собственные значения отрицательны — стационарное состояние устойчиво. При $A > 1$ одно собственное значение положительно. Таким образом, $A_{cr1} = 1$ — граница биоконвективной монотонной неустойчивости. Из выражения для A находим уравнения нейтральной кривой устойчивости в виде зависимости числа Рэлея от параметра a :

$$Ra_{1*} = Ra \frac{Pe}{G} = Ra \frac{W_c B}{h} = \frac{4(1+a^2)\pi^2}{a^2 \left[4 + 2 \left(\frac{4}{1+a^2} - 2 \right) \alpha_0 \right]}, \quad (22)$$

где

$$G = \frac{DB}{h^2} - \quad (23)$$

безразмерный параметр ориентации.

Минимум нейтральной кривой устойчивости (22) находится в точке

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+3\alpha_0^2} - 2\alpha_0}{1-\alpha_0}}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22), получим критический параметр монотонной неустойчивости

$$Ra_{*cr1} = \frac{\pi^2(\sqrt{1+3\alpha_0^2} + 1 - 3\alpha_0)\pi^2}{(1-\alpha_0)^2(\sqrt{1+3\alpha_0^2} + 1 - \alpha_0)(\sqrt{1+3\alpha_0^2} - 2\alpha_0)}. \quad (25)$$

Значение Ra_{*cr1} с ростом α_0 уменьшается — $Ra_{*cr1} = 4\pi^2$ при $\alpha_0 = 0$ и $Ra_{*cr1} = 27\pi^2/8$ при $\alpha_0 = 1$. Следовательно, сфероподобная форма микроорганизмов способствует стабилизации условий устойчивости биоконвекции. Однако влияния формы микроорганизмов на порог устойчивости биоконвекции невелик и в диапазоне $\alpha_0 = 0 \dots 1$ составляет около 15%.

Второе стационарное состояние

$$X(Fo) = Y(Fo) = \pm \sqrt{b(A-1)}, \quad Z(Fo) = 1 - A \quad (26)$$

с матрицей взаимодействия

$$\begin{vmatrix} -Sc & Sc & 0 \\ 1 & -1 & \mp \sqrt{b(A-1)} \\ \pm \sqrt{b(A-1)} & \pm \sqrt{b(A-1)} & -b \end{vmatrix}. \quad (27)$$

При $A > 1$ один корень характеристического уравнения матрица взаимодействия (27) вещественный и отрицательный, а два других — либо вещественные и оба одного и того же знака, либо комплексно сопряженные. При $A \geq A_{cr1} \sim 1$ вещественные части второго и третьего корней отрицательны. Необходимое условие осциллирующей неустойчивости — это комплексная сопряженность второго и третьего корней при неотрицательной вещественной части. Граница этой неустойчивости — нулевая вещественная часть. Это дает следующее условие осциллирующей неустойчивости:

$$A_{cr2} = \frac{Sc(Sc + b + 3)}{Sc - b - 1}. \quad (28)$$

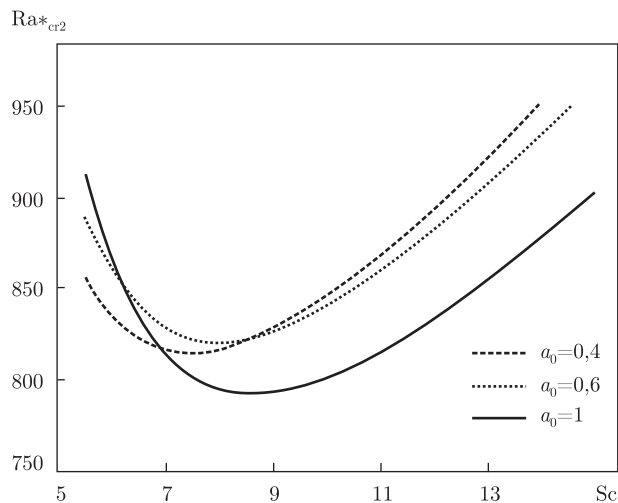


Рис. 1. Второе критическое число Рэлея как функция Sc при $\alpha_0 = \text{idem}$ ($\alpha_0 = 0,4$, $\alpha_0 = 0,6$, $\alpha_0 = 1$)

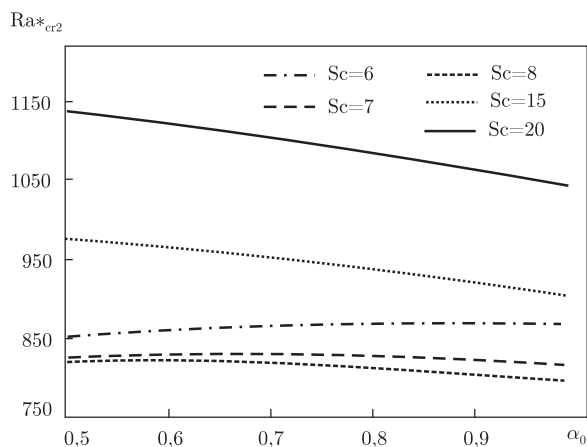


Рис. 2. Второе критическое число Рэлея как функция α_0 при $Sc = \text{idem}$ ($Sc = 6$, $Sc = 7$, $Sc = 8$, $Sc = 15$, $Sc = 20$)

Следовательно, при условии (28) возникает субкритическая бифуркация Хопфа, т. е. в фазовом пространстве возникает предельный цикл, который притягивает орбиты.

Из (28) получаем выражение для числа Рэлея

$$Ra^*_{cr2} = \frac{Sc(Sc + b + 3)}{Sc - b - 1} \frac{4(1 + a^2)\pi^2}{a^2 \left[4 + 2 \left(\frac{4}{1 + a^2} - 2 \right) \alpha_0 \right]}. \quad (29)$$

Исследуя данную функцию на минимум по a , находим критерий осциллирующей неустойчивости $Ra^*_{cr2} = Ra^*_{cr2}(Sc, \alpha_0)$. Эта зависимость не приведена из-за ее громоздкости. В графическом виде функция $Ra^*_{cr2} = Ra^*_{cr2}(Sc, \alpha_0)$ представлена на рис. 1 и 2.

Как видно, второе критическое значения Рэлея экстремально (с минимумом) зависит от числа Шмидта. Характер зависимости Ra^*_{cr2} от α_0 меняется с ростом числа Шмидта. При низких значениях Sc эта зависимость имеет возрастающий характер. При дальнейшем увеличении Sc функция $Ra^*_{cr2} = Ra^*_{cr2}(\alpha_0)$ уже имеет максимум. Далее, с ростом значений

чисел Шмидта функция $Ra^*_{cr2} = Ra^*_{cr2}(\alpha_0)$ принимает убывающий характер. К сожалению, функция $Ra^*_{cr2} = Ra^*_{cr2}(Sc, \alpha_0)$ дает физически реальные значения Ra^*_{cr2} только в диапазоне $\alpha_0 \sim 0,4 \dots 1$. Очевидно, это обусловлено маломодовостью исследуемой модели и накладываемыми ограничениями.

Далее возникает вопрос о том, что происходит при дальнейшем увеличении значения параметра A , т.е. необходимо исследовать, что происходит в фазовом пространстве после возникновения предельного цикла. Для этого было проведено численное исследование системы (16)–(18) с помощью пакета “Mathematica”. Это исследование показало, что при биоконвекции, как и при термоконвекции, существуют режимы, характеризующиеся возникновением странного аттрактора в фазовом пространстве $(X(F_0), Y(F_0), Z(F_0))$, которое характеризуется тем, что система начинает описывать вокруг одного из неустойчивых фокусов витки с амплитудой, возрастающей во времени. После нескольких таких витков система внезапно оставляет этот режим и устремляется ко второму фокусу, начиная описывать вокруг него витки по раскручивающейся спирали. Затем, совершив несколько витков, система перепрыгивает в окрестность первого фокуса и т.д. Промежутки времени, в течение которых система находится в окрестности каждого фокуса прежде чем перепрыгнуть в окрестность другого, распределены стохастически, и в описываемом процессе нет никакой закономерности, хотя он порожден развертывающейся во времени детерминистической системой. Число витков, описываемых системой вокруг каждого из двух фокусов, случайно и потому совершенно непредсказуемо. Вид такого аттрактора приведен в [11].

В работе Лоренца [11] исследован случай для следующих значений параметров: $b = 8/3$ ($a = 2^{-1/2}$), $Sc = 10$. При этом странный аттрактор возникает при $r \approx 28$. Данный набор параметров был выбран, так как при этом число Рэлея Ra_c имеет минимум. Однако минимум относительного числа Рэлея r , при котором возникает странный аттрактор, имеет другую координату. Поэтому необходимо было исследовать широкий диапазон изменения параметра b . Также следует отметить, что начальные условия в [11] были следующие: $(0, 1, 0)$. Это означает, что в начальный момент времени амплитуда конвективного движения и отклонение вертикального профиля температур от линейного были нулевыми, ненулевое значение имела только разность температур между восходящими и нисходящими потоками. Чтобы выяснить, как сильно влияет начальное значение Y на результаты расчетов, были использованы следующие начальные условия: $(0, m, 0)$. Результаты численного определения критерия возникновения странного аттрактора для разных m при $Sc = 10$ приведены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, изменение m в весьма широком диапазоне слабо влияет на критерий устойчивости, за исключением значения $m = 0$, когда имеется лишь нулевое решение.

Результаты численного исследования критерия возникновения странного аттрактора как функции числа Шмидта, а также средние значения параметров b_{cr3} и A_{cr3} в диапазоне изменения m от 0,001 до 100 приведены в табл. 2.

Видно, что с ростом числа Шмидта значения A_{cr3} увеличиваются. Однако поведение истинного параметра устойчивости (числа Рэлея) следует оценивать по формуле

Таблица 1

m	0,0001	0,5	1	2	3	4	6	8	10	25	50	100
b_{cr3}	0,9	0,89	0,88	0,9	0,92	0,91	0,9	0,88	0,88	0,89	0,9	0,92
A_{cr3}	14,1	13,7	13,7	14,2	14,2	14,1	13,8	14,0	14,1	14,2	14,0	14,1

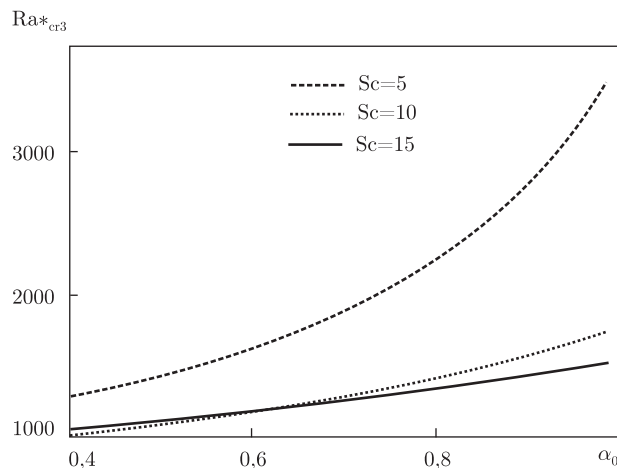


Рис. 3. Третье критическое число Рэля как функция α_0 при $Sc = \text{idem}$ ($Sc = 6$, $Sc = 10$, $Sc = 15$)

$$Ra^*_{cr3} = A_{cr3}(Sc) \frac{32\pi^2}{[4 - b_{cr3}(Sc)]b_{cr3}(Sc)[2 + 2[b_{cr3}(Sc) - 2]\alpha_0]}, \quad (30)$$

которая следует из выражения для A (19). Параметр Ra^*_{cr3} представляет собой критическое число Рэля возникновения странного аттрактора. В соответствии с моделями [12, 13] параметр Ra^*_{cr3} можно интерпретировать как критерий возникновения незатухающих турбулентных пульсаций, т. е. критерий начала переходного режима движения.

В графическом виде зависимость Ra^*_{cr3} от α_0 при $Sc = \text{idem}$ показана на рис. 3.

Как видно, зависимость Ra^*_{cr3} от α_0 при $Sc = \text{idem}$ носит монотонно возрастающий характер. Математически это обусловлено тем, что $b_{cr3} < 2$ и это, в соответствии с (30), приводит к описанному изменению Ra^*_{cr3} . Зависимость же Ra^*_{cr3} от числа Шмидта при $\alpha_0 = \text{idem}$ имеет экстремальный характер, в отличие от зависимости $A_{cr3} = A_{cr3}(Sc)$.

Последующее увеличение параметра A приводит к тому, что при определенных значениях $A = A_{cr4}$ в фазовом пространстве происходит вырождение странного аттрактора и наблюдается полностью хаотичное движение. Это соответствует режиму развитой турбулентности. Таким образом, значение A_{cr4} можно интерпретировать как границу, отделяющую переходный режим от режима развитой турбулентности. Далее была определена точка вырождения странного аттрактора. Результаты значения A_{cr4} и b_{cr4} как функции числа Шмидта, полученные на основе численных исследований, приведены в табл. 3.

На основе формулы (19) определяем четвертый критерий неустойчивости

$$Ra^*_{cr4} = A_{cr4}(Sc) \frac{32\pi^2}{[4 - b_{cr4}(Sc)]b_{cr4}(Sc)[2 + 2[b_{cr4}(Sc) - 2]\alpha_0]}, \quad (31)$$

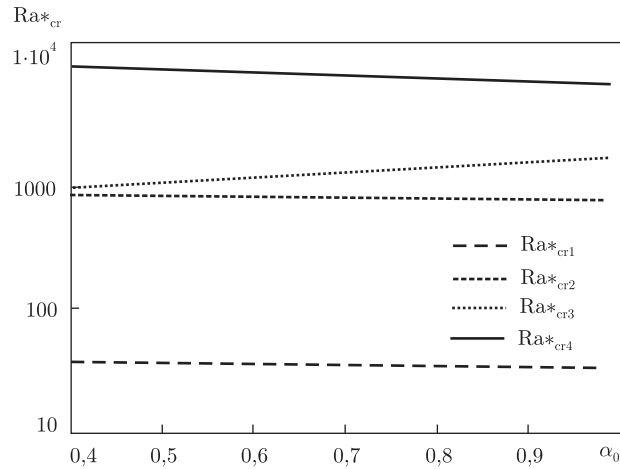
соответствующий возникновению полностью развитого турбулентного движения. Зависимость Ra^*_{cr4} от α_0 при $Sc = \text{idem}$ является ниспадающей, так как $b_{cr4} > 2$ (см. табл. 3).

Таблица 2

Sc	3	5	7	10	15	20
b_{cr3}	0,27	0,49	0,53	0,9	1,13	0,81
A_{cr3}	8,12	9,73	10,61	14	18	29,67

Таблиця 3

Sc	5	10	15
b_{cr4}	3,3	3,9	4
A_{cr4}	49,6	34	21

Рис. 4. Области режимов биоconvекции $Sc = 10$

Это означает, что приближение формы организмов к сфероподобной затягивает развитие турбулентности. Этот же факт подтверждается ренормгрупповым анализом процессов биоconvекции [14].

На рис. 4 приведены границы пяти режимов биоconvективных потоков при $Sc = idem$.

Таким образом, на основе подхода Лоренца построена маломодовая модель биоconvективного течения для gyrotactic microorganisms. Эта модель позволила определить границы различных режимов движения среды. С применением аналитических и численных методов выявлено четыре критерия устойчивости биоconvективных потоков в виде чисел Рэлея. Эти критерии соответствуют границам возникновения монотонной биоconvекции Ra^*_{cr1} , осциллирующей неустойчивости Ra^*_{cr2} , турбулентных пульсаций Ra^*_{cr3} и развитого турбулентного режима Ra^*_{cr4} . Критические числа Рэлея зависят от числа Шмидта и параметра α_0 , описывающего геометрическую структуру микроорганизма.

1. Pedley T. J., Hill N. A., Kessler J. O. The growth of bioconvection patterns in a uniform suspension of gyrotactic microorganisms // J. Fluid Mech. – 1988. – **195**. – P. 223–338.
2. Pedley T. J., Kessler J. O. Hydrodynamic phenomena in suspensions of swimming microorganisms // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1992. – **24**. – P. 313–358.
3. Hill N. A., Pedley T. J., Kessler J. O. Growth of bioconvection patterns in a suspension of gyrotactic microorganisms in a layer of finite depth // J. Fluid Mech. – 1989. – **208**. – P. 509–543.
4. Hillesdon A. J., Pedley T. J. Bioconvection in suspensions of oxytactic bacteria: linear theory // Ibid. – 1996. – **324**. – P. 223–259.
5. Avramenko A. A., Kuznetsov A. V. Linear Instability Analysis of a Suspension of Oxytactic Bacteria in Superimposed Fluid and Porous Layers // Transport in Porous Media. – 2005. – **61**. – P. 157–175.
6. Bees M. A., Hill N. A. Wavelengths of bioconvection patterns // J. of Exp. Biology. – 1997. – **200**. – P. 1515–1526.
7. Kessler J. O., Burnett G. D., Remick K. E. Mutual dynamics of swimming microorganisms and their fluid habitat // Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century / Ed. P. L. Christiansen, M. P. Sorensen, and A. C. Scott. – New York: Springer, 2000. – P. 409–426.

8. *Kessler J. O.* Path and pattern – the mutual dynamics of swimming cells and their environment // *Comments Theor. Biol.* – 1989. – **1**. – P. 85–108.
9. *Liu J.-K., Deng G.-H., Yuan Z.-T. et al.* Turbulence under the microscope // *J. of Biolog. Phys.* – 2000. – **26**. – P. 77–83.
10. *Wolgemuth C. W.* Collective Swimming and the Dynamics of Bacterial Turbulence // *Biophys. J.* – 2008. – **95**. – P. 1564–1574.
11. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* – 1963. – **20**. – P. 130–141.
12. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* – 1971. – **20**. – P. 167–192.
13. *Feigenbaum M. J.* Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations // *J. Stat. Phys.* – 1978. – **19**. – P. 25–52.
14. *Авраменко А. А., Басюк Б. И., Кузнецов А. В., Тыринов А. И.* Турбулентная биоконвекция // *Доп. НАН України.* – 2008. – № 1. – С. 76–82.

*Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 15.03.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Avramenko**

Model of Lorenz instability for bioconvection

Lorenz's nonlinear model for the research of criteria of bioconvection instability for microorganisms, whose motion is regulated by gravity, is developed. On the basis of the model, the borders of various regimes of environment motion are defined. Five zones of bioconvection streams are revealed.