УДК 517.98

А. В. Чайковський

Про диференціальні рівняння зі зсувами та віддзеркаленнями аргументу

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Розглядаються лінійні диференціальні рівняння першого порядку із запізненнями, випередженнями та віддзеркаленнями аргументу щодо функцій зі значеннями в банаховому просторі. Знайдено необхідну і достатню умову існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(B)$ — простір усіх лінійних неперервних операторів у B, N — натуральне, $\{A_k, C_k\colon -N \leqslant k \leqslant N\} \subset L(B)$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = \sum_{k=-N}^{N} (A_k x(t-k) + C_k x(k-t)) + y(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $y \in C(\mathbb{R}, B)$ — відома обмежена за нормою на всій осі функція, $x \in C^1(\mathbb{R}, B)$ — невідома обмежена функція. Дане рівняння є узагальненням рівняння з відхиленнями аргументу

$$x'(t) = \sum_{k=-N}^{N} A_k x(t-k) + y(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

для якого існування і єдиність обмеженого розв'язку досліджені в [1]. Рівняння (1) додатково містить доданки з віддзеркаленнями аргументу. Диференціальні рівняння з віддзеркаленнями досліджувалися в роботі [2], де наведені умови розв'язку деякої крайової задачі. У цій роботі доведено необхідну і достатню умову існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку рівняння (1).

Допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексний банахів простір, $F_1, F_2, G_1, G_2 \in L(X)$ — попарно комутуючі оператори, то система рівнянь*

$$\begin{cases} F_1 v_1 + F_2 v_2 = u_1, \\ G_1 v_1 + G_2 v_2 = u_2 \end{cases}$$

має для будь-якої пари елементів $u_1, u_2 \in X$ єдиний обмежений розв'язок (v_1, v_2) тоді і лише тоді, коли оператор $\triangle := F_1 G_2 - G_1 F_2$ має неперервний обернений. При цьому розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} v_1 = \triangle^{-1}(G_2 u_1 - F_2 u_2), \\ v_2 = \triangle^{-1}(-G_1 u_1 + F_1 u_2). \end{cases}$$

Доведення леми 1 елементарне і тут не наводиться.

Лема 2. *Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in B$ — фіксовані і при $y(t) = y_1 e^{i\alpha t} + y_2 e^{-i\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$, рівняння* (1) *має єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, B)$. Тоді цей розв'язок має вигляд*

$$x(t) = x_1 e^{i\alpha t} + x_2 e^{-i\alpha t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

де $x_1, x_2 \in B$ — деякі сталі.

Доведення. Для всіх $s \in \Omega_\alpha := \{u \in \mathbb{R} \mid \cos(\alpha u) \neq 0\}$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ покладемо

$$z(t,s) = \frac{x(t+s) + x(t-s)}{2\cos(\alpha s)}.$$

Тоді, враховуючи, що x — розв'язок рівняння (1), маємо

$$z'_t(t,s) = \frac{1}{2\cos(\alpha s)} \left(\sum_{k=-N}^{N} (A_k x(t+s-k) + A_k x(t-s-k) + C_k x(k-t-s) + C_k x(k-t+s)) \right) +$$

$$+ \frac{y(t+s) + y(t-s)}{2\cos(\alpha s)} = \sum_{k=-N}^{N} (A_k z(t-k,s) + C_k z(k-t,s)) + y(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

З єдиності обмеженого розв'язку випливає, що $x(\tau) = z(\tau, s)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $s \in \Omega_\alpha$, тобто

$$x(\tau + s) + x(\tau - s) = 2\cos(\alpha s) x(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

для всіх $s \in \Omega_\alpha$, а внаслідок неперервності x, і для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Нехай F — деяка первісна функції x на $\mathbb{R}$. Тоді, інтегруючи рівність (3) за τ від 0 до t, отримуємо

$$F(t+s) + F(t-s) = 2\cos(\alpha s)(F(t) - F(0)) + F(s) + F(-s), \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Тому

$$\frac{F(t+s) + F(t-s) - 2F(t)}{s^2} = (F(t) - F(0)) \frac{2\cos(\alpha s) - 2}{s^2} + \frac{F(s) + F(-s) - 2F(0)}{s^2},$$

$$t \in \mathbb{R}, \qquad s \neq 0.$$

Враховуючи, що $F \in C^2(\mathbb{R}, B)$, перейдемо до границі при $s \to 0$:

$$F''(t) = -\alpha^2 F(t) + F''(0) + \alpha^2 F(0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Це рівняння другого порядку має при $\alpha \neq 0$ лише розв'язки вигляду

$$F(t) = L_1 e^{i\alpha t} + L_2 e^{-i\alpha t} + L_3, \qquad t \in \mathbb{R},$$

де L_1, L_2, $L_3 \in B$ — сталі. Диференціюючи цю рівність, отримуємо твердження леми.

При $\alpha = 0$ функція F — квадратний тричлен, диференціюючи його і враховуючи обмеженість x, отримуємо, що x — стала.

Надалі використовується

Припущення 1. Усі оператори з набору $\{A_k, C_k\colon -N \leqslant k \leqslant N\} \subset L(B)$ попарно комутують.

Позначимо

$$\Phi(z) := \sum_{k=-N}^{N} A_k e^{zk} + z, \qquad \Psi(z) := \sum_{k=-N}^{N} C_k e^{zk}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Лема 3. *Нехай виконується умова*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad \exists\, (\Phi(i\alpha)\Phi(-i\alpha) - \Psi(i\alpha)\Psi(-i\alpha))^{-1} \in L(B). \tag{4}$$

Тоді однорідне рівняння

$$x'(t) = \sum_{k=-N}^{N} (A_k x(t-k) + C_k x(k-t)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

що відповідає рівнянню (1), *не має нетривіальних обмежених розв'язків.*

Доведення. Позначимо $\Theta := \sum\limits_{k=-N}^{N} (\|A_k\| + \|C_k\|)$, $\|u\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|$, де $u \in C(\mathbb{R}, B)$ — обмежена функція. Введемо простір

$$X_\Theta := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, B) \mid \|u\|_\Theta := \sup_{n\geqslant 0} \frac{\|u^{(n)}\|_\infty}{\Theta^n} < +\infty \right\}.$$

Тоді $(X_\Theta, \|\cdot\|_\Theta)$ — комплексний банахів простір (див. [1]). Розглянемо в цьому просторі оператор диференціювання

$$(Du)(t) := u'(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Цей оператор діє з X_Θ в X_Θ і обмежений. Дійсно,

$$\forall u \in X_\Theta\colon \|Du\|_\Theta = \sup_{n\geqslant 0} \frac{\|u^{(n+1)}\|_\infty}{\Theta^n} \leqslant \sup_{n\geqslant -1} \frac{\|u^{(n+1)}\|_\infty}{\Theta^n} = \Theta \|u\|_\Theta.$$

Група операторів $\{e^{Ds} \mid s \in \mathbb{R}\}$ в $L(X_\Theta)$ збігається з групою операторів зсуву $\{M_s \mid s \in \in \mathbb{R}\}$, де

$$(M_s u)(t) = u(t+s), \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Це випливає з теореми про розклад функції в ряд Тейлора. Оператор M_{-1} надалі позначатимемо просто M.

Припустимо, що x — обмежений розв'язок рівняння (5). Тоді функції x і $w(t) := x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, належать простору X_Θ. Дійсно, за індукцією встановлюється, що $x \in C^\infty(\mathbb{R}, B)$. Скінченність норми випливає з нерівності

$$\|x^{(n)}\|_\infty \leqslant \Theta \|x^{(n-1)}\|_\infty, \qquad n \in \mathbb{N},$$

яка отримується з рівняння (5), продиференційованого $n-1$ раз.

Враховуючи, що

$$x(t-k) = (M^k x)(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

$$x(k-t) = (M^k w)(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

рівняння (5) перепишемо у вигляді рівняння в просторі X_Θ:

$$Dx = \sum_{k=-N}^{N} (A_k M^k x + C_k M^k w).$$

Крім того, підставивши в рівняння (5) $(-t)$ замість t, отримаємо рівняння

$$x'(-t) = \sum_{k=-N}^{N} (A_k x(-t-k) + C_k x(k+t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

яке можна записати у вигляді

$$-Dw = \sum_{k=-N}^{N} (A_k M^{-k} w + C_k M^{-k} x).$$

Враховуючи, що $M^k = e^{-Dk}$, $k \in \mathbb{Z}$, отримуємо, що розв'язок x і відповідна функція w задовольняють систему

$$\begin{cases} \left(-D + \sum\limits_{k=-N}^{N} A_k e^{-Dk}\right) x + \sum\limits_{k=-N}^{N} C_k e^{-Dk} w = 0; \\ \sum\limits_{k=-N}^{N} C_k e^{Dk} x + \left(D + \sum\limits_{k=-N}^{N} A_k e^{Dk}\right) w = 0, \end{cases}$$

або, що те саме,

$$\begin{cases} \Phi(-D)x + \Psi(-D)w = 0; \\ \Psi(D)x + \Phi(D)w = 0. \end{cases}$$

З умови (4), рівності $\sigma(D) = [-i\Theta, i\Theta]$ і леми про достатні умови обертовності функції від кількох операторів [1] випливає, що оператор $\Phi(D)\Phi(-D) - \Psi(D)\Psi(-D)$ має обернений. Внаслідок леми 1 система має лише тривіальний розв'язок.

Основний результат.

Теорема 1. *Нехай виконується припущення 1. Рівняння* (1) *має для довільної обмеженої функції* $y \in C(\mathbb{R}, B)$ *єдиний обмежений на всій осі розв'язок* $x \in C^1(\mathbb{R}, B)$ *тоді і лише тоді, коли справджується умова* (4).

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$, y_1, $y_2 \in B$ — фіксовані. Для функції $y(t) = y_1 e^{i\alpha t} + y_2 e^{-i\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$, рівняння (1) за умовою має єдиний обмежений розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, B)$, який за лемою 2 має вигляд

$$x(t) = x_1 e^{i\alpha t} + x_2 e^{-i\alpha t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

де x_1, $x_2 \in B$ — деякі сталі. Підставимо цей розв'язок у рівняння. Маємо

$$i\alpha x_1 e^{i\alpha t} - i\alpha x_2 e^{-i\alpha t} = \sum_{k=-N}^{N} \Big(A_k (x_1 e^{i\alpha(t-k)} + x_2 e^{-i\alpha(t-k)}) + C_k (x_1 e^{i\alpha(k-t)} + x_2 e^{-i\alpha(k-t)}) \Big) + \\ + y_1 e^{i\alpha t} + y_2 e^{-i\alpha t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $e^{i\alpha t}$ і $e^{-i\alpha t}$, отримуємо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} \Phi(-i\alpha) x_1 + \Psi(-i\alpha) x_2 = -y_1, \\ \Psi(i\alpha) x_1 + \Phi(i\alpha) x_2 = -y_2. \end{cases}$$

За лемою 1 ця система для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ і довільної пари y_1, y_2 елементів банахового простору B має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова (4).

Достатність. Нехай виконується умова (4). Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$-w''(t) + \sum_{k=-N}^{N} A_k (w'(t-k) - w'(t+k)) + \sum_{k=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} A_k A_m w(t+m-k) - \\ - \sum_{k=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} C_k C_m w(t+m-k) = y(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де обмежена разом з першою та другою похідною функція $w \in C^2(\mathbb{R}, B)$ — шукана. Крім того,

$$\alpha^2 + \sum_{k=-N}^{N} A_k (i\alpha e^{-i\alpha k} - i\alpha e^{i\alpha k}) + \sum_{k=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} A_k A_m e^{i\alpha(m-k)} - \sum_{k=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} C_k C_m e^{i\alpha(m-k)} = \\ = \Phi(i\alpha)\Phi(-i\alpha) - \Psi(i\alpha)\Psi(-i\alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Враховуючи (4), аналогічно [1] можна показати, що рівняння (6) має для кожної обмеженої функції y єдиний обмежений разом з першою та другою похідною розв'язок.

Покажемо, що функція

$$x(t) = -w'(t) - \sum_{k=-N}^{N} A_k w(t+k) + \sum_{k=-N}^{N} C_k w(k-t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

є розв'язком рівняння (1). Дійсно, підставимо її в (1) і скористаємось рівністю (6):

$$x'(t) - \sum_{k=-N}^{N} (A_k x(t-k) + C_k x(k-t)) = \\ = -w''(t) - \sum_{k=-N}^{N} A_k w'(t+k) - \sum_{k=-N}^{N} C_k w'(k-t) + \sum_{k=-N}^{N} (A_k w'(t-k) + C_k w'(k-t)) +$$

$$+\sum_{k=-N}^{N}\left(A_k\left(\sum_{m=-N}^{N}A_m w(t-k+m)\right)+C_k\left(\sum_{m=-N}^{N}A_m w(k-t+m)\right)\right)-$$
$$-\sum_{k=-N}^{N}\left(A_k\left(\sum_{m=-N}^{N}C_m w(-t+k+m)\right)+C_k\left(\sum_{m=-N}^{N}C_m w(t-k+m)\right)\right)=$$
$$=y(t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Єдиність розв'язку випливає з леми 3.

Зауваження. У випадку відсутності доданків з віддзеркаленням аргументу умова (4) набуває вигляду

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\qquad\exists\,(\Phi(i\alpha)\Phi(-i\alpha))^{-1}\in L(B).$$

Оскільки добуток двох обмежених комутуючих операторів має обернений тоді і лише тоді, коли обернений має кожен множник, ця умова еквівалентна більш простій

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\qquad\exists\,(\Phi(i\alpha))^{-1}\in L(B),$$

яка збігається з отриманою в [1].

Таким чином, у роботі досліджені лінійні диференціальні рівняння першого порядку із запізненнями, випередженнями та віддзеркаленнями аргументу щодо функцій зі значеннями в банаховому просторі. Знайдені необхідні і достатні умови існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку.

1. *Чайковський А. В.* Про існування та єдиність обмеженого розв'язку лінійного диференціального рівняння зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доп. НАН України. – 2000. – № 8. – С. 33–37.
2. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференц. уравнения. – 2008. – **4**, № 2. – С. 196–204.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 21.12.2009

A. V. Chaikovskiy

On differential equations with shifts and reflections of an argument

Linear differential equations of the first order with delays, outstrippings, and reflections of arguments relative to functions with values in a Banach space are considered. Necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of the solution which is bounded on the axis are found.